EDITORIAL MIR

И. БРОНШТЕЙН.
К. СЕМЕНДЯЕВ

# СПРАВОЧНИК ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ИНЖЕНЕРОВ И УЧАЩИХСЯ ВТУЗОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

I. BRONSHTEIN, K. SEMENDIAEV

# MANUAL DE MATEMÁTICAS

## PARA INGENIEROS Y ESTUDIANTES

---

VERSIÓN ESPAÑOLA DE

INÉS HARDING ROJAS,

PROFESORA DE MATEMÁTICAS SUPERIORES

TRADUCCIÓN REVISADA POR

EMILIANO APARICIO BERNARDO,

candidato a doctor en ciencias físico-matemáticas,
catedrático de matemáticas superiores

*2 a edición*

EDITORIAL · MIR · MOSCÚ

CDU 510 (022) = 60

*На испанском языке*

Impreso en la URSS 1973

# INDICE



## PRIMERA PARTE

## TABLAS Y GRÁFICAS

### I. TABLAS



### II. GRÁFICAS

## SEGUNDA PARTE
## MATEMÁTICA ELEMENTAL

### I. CÁLCULOS APROXIMADOS



### II. ÁLGEBRA



### III. GEOMETRÍA

## IV. TRIGONOMETRÍA



## TERCERA PARTE

## GEOMETRÍA ANALÍTICA Y GEOMETRÍA DIFERENCIAL

## I. GEOMETRÍA ANALÍTICA



## II. GEOMETRÍA DIFERENCIAL

## CUARTA PARTE

## FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

### I. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS



### II. CÁLCULO DIFERENCIAL



### III. CÁLCULO INTEGRAL

## II. CÁLCULO VECTORIAL



## III. SERIES DF FOURIER (ANÁLISIS ARMÓNICO)



# SEXTA PARTE

# ELABORACIÓN DE LAS OBSERVACIONES

## I. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES Y DE LA TEORÍA DE ERRORES



## II. FÓRMULAS EMPÍRICAS E INTERPOLACIÓN

# NOTACIONES MATEMATICAS*

## I. RELACIONES ENTRE LAS MAGNITUDES

| | |
|---|---|
| $=$ | igual |
| $\equiv$ | idénticamente igual |
| $\neq$ | desigual |
| $\approx$ | aproximadamente igual |
| $<$ | menor |
| $>$ | mayor |
| $\leqslant$ | menor o igual |
| $\geqslant$ | mayor o igual |

## II. ALGEBRA

| | |
|---|---|
| $\|a\|$ | valor absoluto del número $a$ |
| $+$ | suma (más) |
| $-$ | resta (menos) |
| $\cdot$ ó $\times$ | multiplicación, por ejemplo: $a \cdot b$ ó $a \times b$; frecuentemente se omite el signo de multiplicación, por ejemplo: $ab$ |
| $:$ ó $-$ | división $\left(a : b \text{ ó } \dfrac{a}{b}\right)$ |
| $a^m$ | $a$ elevado a $m$ |
| $\sqrt{\ }$ | raíz cuadrada, por ejemplo: $\sqrt{a}$ |
| $\sqrt[n]{\ }$ | raíz $n$-ésima, por ejemplo: $\sqrt[n]{a}$ |
| $\log_b$ | logaritmo de base $b$, por ejemplo: $5 = \log_2 32$ (pág. 149) |
| lg | logaritmo decimal, por ejemplo: $2 = \lg 100$ (pág. 149) |
| ln | logaritmo natural, por ejemplo: $1 = \ln e$ (pág. 149) |
| ( ), [ ], { }, | paréntesis (sucesión de operaciones) |
| ! | factorial, por ejemplo: $a!$; $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ (pág. 185) |

## III. GEOMETRÍA

| | |
|---|---|
| $\perp$ | es perpendicular |
| $\parallel$ | es paralela |
| $\#$ | es igual y paralela |
| $\sim$ | es semejante, por ejemplo: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ |
| $\triangle$ | triángulo |
| $\angle$ | ángulo (a veces $\sphericalangle$), por ejemplo: $\angle ABC$, $\sphericalangle ABC$ |
| $\frown$ | arco, por ejemplo: $\overset{\frown}{AB}$ |
| $^\circ$ | grado |
| $'$ | minuto |
| $''$ | segundo |

grado, minuto, segundo: de ángulos o de arcos, por ejemplo: $32^\circ 14' 11'',5$

* En paréntesis se indican las páginas del manual en que son explicados los conceptos correspondientes.

## IV. TRIGONOMETRÍA FUNCIONES HIPERBÓLICAS

| | | |
|---|---|---|
| sen | seno | (pág. 207.) |
| cos | coseno | |
| tg | tangente | |
| ctg | cotangente | |
| sec | secante | |
| cosec | cosecante | |
| Arc sen | arco seno | (pág. 216.) |
| Arc cos | arco coseno | |
| Arc tg | arco tangente | |
| Arc ctg | arco cotangente | |
| arc sen | valor principal del arco seno | (pág. 217.) |
| arc cos | valor principal del arco coseno | |
| arc tg | valor principal del arco tangente | |
| arc ctg | valor principal del arco cotangente | |
| sh | seno hiperbólico | (pág. 223.) |
| ch | coseno hiperbólico | |
| th | tangente hiperbólica | |
| cth | cotangente hiperbólica | |
| sech | secante hiperbólica | |
| cosech | cosecante hiperbólica | |
| Ar sh | área-seno hiperbólico | (pág. 226.) |
| Ar ch | área-coseno hiperbólico | |
| Ar th | área-tangente hiperbólica | |
| Ar cth | área-cotangente hiperbólica | |

## V. DESIGNACIONES DE CONSTANTES

| | |
|---|---|
| const | cantidad constante (constante) |
| $\pi = 3{,}14159 \ldots$ | razón de la longitud de la circunferencia al diámetro (pág. 1 |
| $e = 2{,}71828 \ldots$ | base de los logaritmos naturales (pág. 324.) |
| $C = 0{,}57722 \ldots$ | constante de Euler (pág. 324.) |

## VI. ANÁLISIS MATEMÁTICO

| | | |
|---|---|---|
| lim | límite (pág. 310, 320.) | ejemplo: $\lim\limits_{N \to \infty} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N = e$ |
| $\to$ | tiende a ... | |
| $\infty$ | infinito | |
| $\Sigma$ | suma | |
| $\sum\limits_{i=1}^{n}$ | suma en la cual $i$ varía desde 1 hasta $n$ | |
| $f(\,), \varphi(\,)$ | designaciones de funciones, por ejemplo: $y = f(x)$, $u = \varphi(x, y, z)$ | |
| $\Delta$ | incremento, por ejemplo: $\Delta x$ | |
| $d$ | diferencial, por ejemplo: $dx$ (pág. 355.) | |
| $d_x, d_y$, etc. | diferencial parcial, por ejemplo: $d_x u$ (pág. 356.) | |
| $'$, $''$, $'''$, IV, ó $\dot{}$, $\ddot{}$, $\dddot{}$, $\ddddot{}$ | designaciones de las derivadas sucesivas de la función de una variable; por ejemplo, de la función $y = f(x)$: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, $y'$, $y''$, $y'''$, $y^{IV}$, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, $\ddddot{y}$, (pág. 353, 357) | |
| $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$ | derivada primera, derivada segunda, etc. | por ejemplo: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc. (pág. 353, 356.) |

| | |
|---|---|
| $D$ | signo de la derivada (operador de derivación), por ejemplo: $Dy = y'$, $D^2y = y''$, etc. (pág. 353, 357.) |
| $f'_x, f''_{xx}, f''_{xy}$ ó $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$ | derivadas parciales, por ejemplo: $f'_x(u)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, etc. (págs. 354, 357) |
| $\int$ | integral (pág. 386) |
| $\int_a^b$ | integral definida desde el límite inferior $a$ hasta el límite superior $b$ (pág. 440) |
| $\int_{(K)}$ | integral curvilínea tomada sobre el arco $K$ o sobre la proyección del arco $K$ (pág. 470, 472) |
| $\int_S \int_V$ | integral sobre la superficie $S$, sobre el volumen $V$ (págs. 479, 481) |
| $\iint$ | integral doble (pág. 479, 481) |
| $\iiint$ | integral triple (pág. 479, 481) |

## VII. NÚMEROS COMPLEJOS

| | |
|---|---|
| $i$ (a veces $j$) | unidad imaginaria ($i^2 = -1$) (pág. 566) |
| $\Re(a)$ | parte real del número $a$ (pág. 566) |
| $\Im(a)$ | parte imaginaria del número $a$ (pág. 566) |
| $\|a\|$ | módulo de $a$ (pág. 567) |
| arg $a$ | argumento de $a$ (pág. 567) |
| $\bar{a}$ | número conjugado con $a$, por ejemplo: $a = 2+3i$, $\bar{a} = 2-3i$ (pág. 568) |
| Ln | logaritmo (natural) de un número complejo (pág. 574) |

## VIII. CÁLCULO VECTORIAL

| | |
|---|---|
| $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ó $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ | designaciones de vectores (pág. 596) |
| $\mathbf{a}^0$ | vector unitario de la misma dirección que el vector $\mathbf{a}$ (pág. 596) |
| $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ | versores fundamentales de un sistema ortogonal de coordenadas (pág. 598) |
| $\|\mathbf{a}\|$ ó $a$ | longitud (valor absoluto) del vector $\mathbf{a}$ (pág. 596) |
| $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ | igualdad, suma, resta de vectores (págs. 596, 597) |
| $\alpha\mathbf{a}$ | multiplicación de un escalar por un vector (pág. 596, 597) |
| $\mathbf{ab}$ | producto escalar de vectores (pág. 600) |

| | |
|---|---|
| $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ó $[\mathbf{ab}]$ | producto vectorial de vectores (pág. 600) |
| $\mathbf{abc} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ | producto mixto de tres vectores (pág. 600) |
| $a_x, a_y, a_z$ | coordenadas del vector $\mathbf{a}$ en un sistema cartesiano (pág. 598). |
| $\nabla$ | operador diferencial de Hamilton ("nabla") (pág. 626) |
| $\Delta$ | operador de Laplace (pág. 627) |
| grad | gradiente de un campo escalar (grad $\varphi = \nabla\varphi$) (pág. 615) |
| div | divergencia de un campo vectorial (div $V = \nabla V$) (pág. 623) |
| rot | rotor de un campo vectorial (rotV $= \nabla \times V$) (pág. 624) |
| $\frac{\partial U}{\partial c}$ | derivada de un campo escalar en la dirección de c (pág. 615). |

| ALFABETO GRIEGO | | ALFABETO RUSO | |
|---|---|---|---|
| $A\alpha$ — alfa | $N\nu$ — ny | Аа — a | Рр — r |
| $B\beta$ — beta | $\Xi\xi$ — xi | Бб — b | Сс — s |
| $\Gamma\gamma$ — gamma | $Oo$ — omicron | Вв — v | Тт — t |
| $\Delta\delta$ — delta | $\Pi\pi$ — pi | Гг — g | Уу — u |
| $E\varepsilon$ — epsilon | $P\rho$ — ro | Дд — d | Фф — f |
| $Z\zeta$ — zeta | $\Sigma\sigma\varsigma$ — sigma | Ее — e | Хх — j |
| $H\eta$ — eta | $T\tau$ — tau | Ёё — yo | Цц — ts |
| $\Theta\theta$ — theta | $Y\upsilon$ — ypsilon | Жж — zh | Чч — ch |
| $I\iota$ — iota | $\Phi\varphi$ — fi | Зз — z (ds) | Шш — sh |
| $K\varkappa$ — kappa | $X\chi$ — ji | Ии — i | Щщ — sch |
| $\Lambda\lambda$ — lambda | $\Psi\psi$ — psi | Йй — y | Ъъ — signo de dureza |
| $M\mu$ — my | $\Omega\omega$ — omega | Кк — k | Ыы — i (dura) |
| | | Лл — l | Ьь — signo de blandura |
| | | Мм — m | Ээ — e (abierta) |
| | | Нн — n | Юю — yu |
| | | Оо — o | Яя — ya |
| | | Пп — p | |

PRIMERA PARTE

# TABLAS Y GRÁFICAS

---

## I. TABLAS

**Interpolación.** La mayoría de las tablas incluidas más abajo dan los valores de las funciones con cuatro cifras significativas, para los valores del argumento con tres cifras. Si el argumento se ha dado con mayor exactitud y el valor de la función buscado no se puede encontrar directamente en las tablas, es necesario recurrir a la interpolación. La más simple es la *interpolación lineal* en la cual se supone que el incremento de la función es **proporcional** al incremento del argumento. Si el valor dado del argumento $x$ yace entre los valores incluídos en la tabla $x_0$ y $x_1 = x_0+h$, a los que corresponden los valores de la función $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1) = y_0+\Delta$, entonces

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{h}\Delta.$$

*La corrección de la interpolación* $\frac{x-x_0}{h}\Delta$ fácilmente se calcula mediante las tablas de partes proporcionales en las págs. 78, 79 y las de las págs. 17, 18 que da los productos $\Delta$ (desde 11 hasta 90) por 0,1, 0,2, ..., 0,9; ésta puede ser separada para la comodidad de uso.

*Ejemplos:* 1) ¿$1{,}6754^2$? En las tablas (pág. 23) hallamos: $1{,}67^2 = 2{,}789$; $1{,}68^2 = 2{,}822$; $\Delta = 33$*. De la tabla de partes proporcionales

* Generalmente, la diferencia $\Delta$ y la corrección se expresan en unidades de la fila de la última cifra significativa, no anotando delante los ceros ni la coma.

$$0{,}5\cdot 33 = 16{,}5;\ 0{,}04\cdot 33 = 1{,}3;\ \frac{x-x_0}{h}\Delta = 16{,}5+1{,}3 \approx 18;$$

$$1{,}6754^2 = 2{,}807.$$

2) ¿tg 79°24′? En las tablas (págs. 56 y 79) hallamos tg 79° 20′ = 5,309; tg 79°30′ = 5,396; $\Delta$ = 87; 0,4·87 ≈ 35, tg 79°24′ = 5,344.

El error de la interpolación lineal no es superior a una unidad de la fila de la última cifra significativa, si las dos diferencias contiguas $\Delta_0$ y $\Delta_1$ difieren no más de cuatro unidades (del último guarismo). Si esta condición no se cumple (como, por ejemplo, en la tabla tg $x$, para $x > 80°$, pág. 56), es necesario emplear fórmulas de interpolación más complicadas. En la mayoría de los casos es suficiente la *interpolación cuadrática* de Bessel:

$$f(x) = f(x_0)+k\Delta_0-k_1(\Delta_1-\Delta_{-1}),$$

donde

$$k = \frac{x-x_0}{h} \quad \text{y} \quad k_1 = \frac{k(1-k)}{4},$$

el valor $k_1$ se encuentra en la tabla en la pág. 80.

*Ejemplo*: Se pide encontrar tg 85°33′ (la tabla en la pág. 56). Hallamos ($h$ = 10′); $k$ = 0,3, $k_1$ = 0,052, la corrección es igual a 0,3·491 − −0,052·75 ≈ 143; tg 85°33′ = 12,849.

| | | |
|---|---|---|
| $x_{-1} = x_0-h$ | $y_{-1}$ | $\Delta_{-1}$ |
| $x_0$ | $y_0$ | $\Delta_0$ |
| $x_1 = x_0+h$ | $y_1$ | $\Delta_1$ |
| $x_2 = x_0+2h$ | $y_2$ | |

| $x$ | tg $x$ | $\Delta$ |
|---|---|---|
| 85°20′ | 12,251 | |
| | | 455 |
| 85°30′ | 12,706 | |
| | | 491 |
| 85°40′ | 13,197 | |
| | | 530 |
| 85°50′ | 13,727 | |

*de partes proporcionales*

| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 1 |
| 2 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 3,2 | 3,4 | 3,6 | 3,8 | 4,0 | 2 |
| 3 | 3,3 | 3,6 | 3,9 | 4,2 | 4,5 | 4,8 | 5,1 | 5,4 | 5,7 | 6,0 | 3 |
| 4 | 4,4 | 4,8 | 5,2 | 5,6 | 6,0 | 6,4 | 6,8 | 7,2 | 7,6 | 8,0 | 4 |
| 5 | 5,5 | 6,0 | 6,5 | 7,0 | 7,5 | 8,0 | 8,5 | 9,0 | 9,5 | 10,0 | 5 |
| 6 | 6,6 | 7,2 | 7,8 | 8,4 | 9,0 | 9,6 | 10,2 | 10,8 | 11,4 | 12,0 | 6 |
| 7 | 7,7 | 8,4 | 9,1 | 9,8 | 10,5 | 11,2 | 11,9 | 12,6 | 13,3 | 14,0 | 7 |
| 8 | 8,8 | 9,6 | 10,4 | 11,2 | 12,0 | 12,8 | 13,6 | 14,4 | 15,2 | 16,0 | 8 |
| 9 | 9,9 | 10,8 | 11,7 | 12,6 | 13,5 | 14,4 | 15,3 | 16,2 | 17,1 | 18,0 | 9 |

| | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 | 3,0 | 1 |
| 2 | 4,2 | 4,4 | 4,6 | 4,8 | 5,0 | 5,2 | 5,4 | 5,6 | 5,8 | 6,0 | 2 |
| 3 | 6,3 | 6,6 | 6,9 | 7,2 | 7,5 | 7,8 | 8,1 | 8,4 | 8,7 | 9,0 | 3 |
| 4 | 8,4 | 8,8 | 9,2 | 9,6 | 10,0 | 10,4 | 10,8 | 11,2 | 11,6 | 12,0 | 4 |
| 5 | 10,5 | 11,0 | 11,5 | 12,0 | 12,5 | 13,0 | 13,5 | 14,0 | 14,5 | 15,0 | 5 |
| 6 | 12,6 | 13,2 | 13,8 | 14,4 | 15,0 | 15,6 | 16,2 | 16,8 | 17,4 | 18,0 | 6 |
| 7 | 14,7 | 15,4 | 16,1 | 16,8 | 17,5 | 18,2 | 18,9 | 19,6 | 20,3 | 21,0 | 7 |
| 8 | 16,8 | 17,6 | 18,4 | 19,2 | 20,0 | 20,8 | 21,6 | 22,4 | 23,2 | 24,0 | 8 |
| 9 | 18,9 | 19,8 | 20,7 | 21,6 | 22,5 | 23,4 | 24,3 | 25,2 | 26,1 | 27,0 | 9 |

| | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,7 | 3,8 | 3,9 | 4,0 | 1 |
| 2 | 6,2 | 6,4 | 6,6 | 6,8 | 7,0 | 7,2 | 7,4 | 7,6 | 7,8 | 8,0 | 2 |
| 3 | 9,3 | 9,6 | 9,9 | 10,2 | 10,5 | 10,8 | 11,1 | 11,4 | 11,7 | 12,0 | 3 |
| 4 | 12,4 | 12,8 | 13,2 | 13,6 | 14,0 | 14,4 | 14,8 | 15,2 | 15,6 | 16,0 | 4 |
| 5 | 15,5 | 16,0 | 16,5 | 17,0 | 17,5 | 18,0 | 18,5 | 19,0 | 19,5 | 20,0 | 5 |
| 6 | 18,6 | 19,2 | 19,8 | 20,4 | 21,0 | 21,6 | 22,2 | 22,8 | 23,4 | 24,0 | 6 |
| 7 | 21,7 | 22,4 | 23,1 | 23,8 | 24,5 | 25,2 | 25,9 | 26,6 | 27,3 | 28,0 | 7 |
| 8 | 24,8 | 25,6 | 26,4 | 27,2 | 28,0 | 28,8 | 29,6 | 30,4 | 31,2 | 32,0 | 8 |
| 9 | 27,9 | 28,8 | 29,7 | 30,6 | 31,5 | 32,4 | 33,3 | 34,2 | 35,1 | 36,0 | 9 |

| | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 | 4,7 | 4,8 | 4,9 | 5,0 | 1 |
| 2 | 8,2 | 8,4 | 8,6 | 8,8 | 9,0 | 9,2 | 9,4 | 9,6 | 9,8 | 10,0 | 2 |
| 3 | 12,3 | 12,6 | 12,9 | 13,2 | 13,5 | 13,8 | 14,1 | 14,4 | 14,7 | 15,0 | 3 |
| 4 | 16,4 | 16,8 | 17,2 | 17,6 | 18,0 | 18,4 | 18,8 | 19,2 | 19,6 | 20,0 | 4 |
| 5 | 20,5 | 21,0 | 21,5 | 22,0 | 22,5 | 23,0 | 23,5 | 24,0 | 24,5 | 25,0 | 5 |
| 6 | 24,6 | 25,2 | 25,8 | 26,4 | 27,0 | 27,6 | 28,2 | 28,8 | 29,4 | 30,0 | 6 |
| 7 | 28,7 | 29,4 | 30,1 | 30,8 | 31,5 | 32,2 | 32,9 | 33,6 | 34,3 | 35,0 | 7 |
| 8 | 32,8 | 33,6 | 34,4 | 35,2 | 36,0 | 36,8 | 37,6 | 38,4 | 39,2 | 40,0 | 8 |
| 9 | 36,9 | 37,8 | 38,7 | 39,6 | 40,5 | 41,4 | 42,3 | 43,2 | 44,1 | 45,0 | 9 |

Línea de separación

| | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 | 5,7 | 5,8 | 5,9 | 6,0 | 1 |
| 2 | 10,2 | 10,4 | 10,6 | 10,8 | 11,0 | 11,2 | 11,4 | 11,6 | 11,8 | 12,0 | 2 |
| 3 | 15,3 | 15,6 | 15,9 | 16,2 | 16,5 | 16,8 | 17,1 | 17,4 | 17,7 | 18,0 | 3 |
| 4 | 20,4 | 20,8 | 21,2 | 21,6 | 22,0 | 22,4 | 22,8 | 23,2 | 23,6 | 24,0 | 4 |
| 5 | 25,5 | 26,0 | 26,5 | 27,0 | 27,5 | 28,0 | 28,5 | 29,0 | 29,5 | 30,0 | 5 |
| 6 | 30,6 | 31,2 | 31,8 | 32,4 | 33,0 | 33,6 | 34,2 | 34,8 | 35,4 | 36,0 | 6 |
| 7 | 35,7 | 36,4 | 37,1 | 37,8 | 38,5 | 39,2 | 39,9 | 40,6 | 41,3 | 42,0 | 7 |
| 8 | 40,8 | 41,6 | 42,4 | 43,2 | 44,0 | 44,8 | 45,6 | 46,4 | 47,2 | 48,0 | 8 |
| 9 | 45,9 | 46,8 | 47,7 | 48,6 | 49,5 | 50,4 | 51,3 | 52,2 | 53,1 | 54,0 | 9 |

| | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 | 6,7 | 6,8 | 6,9 | 7,0 | 1 |
| 2 | 12,2 | 12,4 | 12,6 | 12,8 | 13,0 | 13,2 | 13,4 | 13,6 | 13,8 | 14,0 | 2 |
| 3 | 18,3 | 18,6 | 18,9 | 19,2 | 19,5 | 19,8 | 20,1 | 20,4 | 20,7 | 21,0 | 3 |
| 4 | 24,4 | 24,8 | 25,2 | 25,6 | 26,0 | 26,4 | 26,8 | 27,2 | 27,6 | 28,0 | 4 |
| 5 | 30,5 | 31,0 | 31,5 | 32,0 | 32,5 | 33,0 | 33,5 | 34,0 | 34,5 | 35,0 | 5 |
| 6 | 36,6 | 37,2 | 37,8 | 38,4 | 39,0 | 39,6 | 40,2 | 40,8 | 41,4 | 42,0 | 6 |
| 7 | 42,7 | 43,4 | 44,1 | 44,8 | 45,5 | 46,2 | 46,9 | 47,6 | 48,3 | 49,0 | 7 |
| 8 | 48,8 | 49,6 | 50,4 | 51,2 | 52,0 | 52,8 | 53,6 | 54,4 | 55,2 | 56,0 | 8 |
| 9 | 54,9 | 55,8 | 56,7 | 57,6 | 58,5 | 59,4 | 60,3 | 61,2 | 62,1 | 63,0 | 9 |

| | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,1 | 7,2 | 7,3 | 7,4 | 7,5 | 7,6 | 7,7 | 7,8 | 7,9 | 8,0 | 1 |
| 2 | 14,2 | 14,4 | 14,6 | 14,8 | 15,0 | 15,2 | 15,4 | 15,6 | 15,8 | 16,0 | 2 |
| 3 | 21,3 | 21,6 | 21,9 | 22,2 | 22,5 | 22,8 | 23,1 | 23,4 | 23,7 | 24,0 | 3 |
| 4 | 28,4 | 28,8 | 29,2 | 29,6 | 30,0 | 30,4 | 30,8 | 31,2 | 31,6 | 32,0 | 4 |
| 5 | 35,5 | 36,0 | 36,5 | 37,0 | 37,5 | 38,0 | 38,5 | 39,0 | 39,5 | 40,0 | 5 |
| 6 | 42,6 | 43,2 | 43,8 | 44,4 | 45,0 | 45,6 | 46,2 | 46,8 | 47,4 | 48,0 | 6 |
| 7 | 49,7 | 50,4 | 51,1 | 51,8 | 52,5 | 53,2 | 53,9 | 54,6 | 55,3 | 56,0 | 7 |
| 8 | 56,8 | 57,6 | 58,4 | 59,2 | 60,0 | 60,8 | 61,6 | 62,4 | 63,2 | 64,0 | 8 |
| 9 | 63,9 | 64,8 | 65,7 | 66,6 | 67,5 | 68,4 | 69,3 | 70,2 | 71,1 | 72,0 | 9 |

| | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8,1 | 8,2 | 8,3 | 8,4 | 8,5 | 8,6 | 8,7 | 8,8 | 8,9 | 9,0 | 1 |
| 2 | 16,2 | 16,4 | 16,6 | 16,8 | 17,0 | 17,2 | 17,4 | 17,6 | 17,8 | 18,0 | 2 |
| 3 | 24,3 | 24,6 | 24,9 | 25,2 | 25,5 | 25,8 | 26,1 | 26,4 | 26,7 | 27,0 | 3 |
| 4 | 32,4 | 32,8 | 33,2 | 33,6 | 34,0 | 34,4 | 34,8 | 35,2 | 35,6 | 36,0 | 4 |
| 5 | 40,5 | 41,0 | 41,5 | 42,0 | 42,5 | 43,0 | 43,5 | 44,0 | 44,5 | 45,0 | 5 |
| 6 | 48,6 | 49,2 | 49,8 | 50,4 | 51,0 | 51,6 | 52,2 | 52,8 | 53,4 | 54,0 | 6 |
| 7 | 56,7 | 57,4 | 58,1 | 58,8 | 59,5 | 60,2 | 60,9 | 61,6 | 62,3 | 63,0 | 7 |
| 8 | 64,8 | 65,6 | 66,4 | 67,2 | 68,0 | 68,8 | 69,6 | 70,4 | 71,2 | 72,0 | 8 |
| 9 | 72,9 | 73,8 | 74,7 | 75,6 | 76,5 | 77,4 | 78,3 | 79,2 | 80,1 | 81,0 | 9 |

# A. TABLAS DE LAS FUNCIONES PRINCIPALES (ELEMENTALES)

## 1. *Algunas constantes de uso frecuente*

| Valor | $n$ | lg $n$ | Valor | $n$ | lg $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | 3,1415 93 | 0,49715 | $1:\pi$ | 0,3183 10 | $\bar{1}$,50285 |
| $2\pi$ | 6,2831 85 | 0,79818 | $1:2\pi$ | 0,1591 55 | $\bar{1}$,20182 |
| $3\pi$ | 9,4247 78 | 0,97427 | $1:3\pi$ | 0,1061 03 | $\bar{1}$,02573 |
| $4\pi$ | 12,5663 71 | 1,09921 | $1:4\pi$ | 0,0795 77 | $\bar{2}$,90079 |
| $\pi:2$ | 1,5707 96 | 0,19612 | $2:\pi$ | 0,6366 20 | $\bar{1}$,80388 |
| $\pi:3$ | 1,0471 98 | 0,02003 | $3:\pi$ | 0,9549 30 | $\bar{1}$,97997 |
| $\pi:4$ | 0,7853 98 | $\bar{1}$,89509 | $4:\pi$ | 1,2732 40 | 0,10491 |
| $\pi:6$ | 0,5235 99 | $\bar{1}$,71900 | $6:\pi$ | 1,9098 59 | 0.28100 |
| $\pi:180\ (=1°)$ | 0,0174 53 | $\bar{2}$,24188 | $180°:\pi$ | 57°, 2957 80 | 1,75812 |
| $\pi:10\,800\ (=1')$ | 0,0002 91 | $\bar{4}$,46373 | $10\,800':\pi$ | 3437', 74 68 | 3,53627 |
| $\pi:648\,000(=1'')$ | 0,0000 05 | $\bar{6}$,68557 | $648\,000'':\pi$ | 206264'', 81 | 5,31443 |
| $\pi^2$ | 9,8696 04 | 0,99430 | $1:\pi^2$ | 0,1013 21 | $\bar{1}$,00570 |
| $\sqrt{\pi}$ | 1,7724 54 | 0,24857 | $\sqrt{1:\pi}$ | 0,5641 90 | $\bar{1}$,75143 |
| $\sqrt{2\pi}$ | 2,5066 28 | 0,39909 | $\sqrt{1:2\pi}$ | 0,3989 42 | $\bar{1}$,60091 |
| $\sqrt{\pi:2}$ | 1,2533 14 | 0,09806 | $\sqrt{2:\pi}$ | 0,7978 85 | $\bar{1}$,90194 |
| $\sqrt[3]{\pi}$ | 1,4645 92 | 0,16572 | $\sqrt[3]{1:\pi}$ | 0,6827 84 | $\bar{1}$,83428 |
| $\sqrt[3]{4\pi:3}$ | 1,6119 92 | 0,20736 | $\sqrt[3]{3:4\pi}$ | 0,6203 50 | $\bar{1}$,79264 |
| $e$ | 2,7182 82 | 0,43429 | $1:e$ | 0,3678 79 | $\bar{1}$,56571 |
| $e^2$ | 7,3890 56 | 0,86859 | $1:e^2$ | 0,1353 35 | $\bar{1}$,13141 |
| $\sqrt{e}$ | 1,6487 21 | 0,21715 | $\sqrt{1:e}$ | 0,6065 31 | $\bar{1}$,78285 |
| $\sqrt[3]{e}$ | 1,3956 12 | 0,14476 | $\sqrt[3]{1:e}$ | 0,7165 32 | $\bar{1}$,85524 |
| $e\pi$ : | 4,8104 77 | 0,68219 | $e^{-\pi:2}$ | 0,2078 80 | $\bar{1}$,31781 |
| $e^{\pi}$ | 23,1406 93 | 1,36438 | $e^{-\pi}$ | 0,0432 14 | $\bar{2}$,63562 |
| $e^{2\pi}$ | 535,4916 56 | 2,72875 | $e^{-2\pi}$ | 0,0018 67 | $\bar{3}$,27125 |
| $C$* | 0,5772 16 | $\bar{1}$,76134 | $\ln\pi$ | 1,1447 30 | 0,05870 |
| $M=\lg e$ | 0,4342 94 | $\bar{1}$,63778 | $1:M=\ln 10$ | 2,3025 85 | 0,36222 |
| $g$** | 9,81 | 0,99167 | $1:g$ | 0,10194 | $\bar{1}$,00833 |
| $g^2$ | 96,2361 | 1,98334 | $1:2g$ | 0,050968 | $\bar{2}$,70730 |
| $\sqrt{g}$ | 3,13209 | 0,49583 | $\pi\sqrt{g}$ | 9,83976 | 0,99298 |
| $\sqrt{2g}$ | 4,42945 | 0,64635 | $\pi\sqrt{2g}$ | 13,91552 | 1,14350 |

* $C$ es la constante de Euler, véase pág. 324.

**$g$ es la aceleración de gravedad en m/seg²; en este caso está dado el valor redondeado de $g$ al nivel del mar a 45 – 50° de latitud.

## 2. *Cuadrados, cubos, raíces*

### EXPLICACIONES DE LA TABLA

La tabla incluida en las págs. 22-41 permite hallar los **cuadrados, cubos, raíces cuadradas y raíces cúbicas** con cuatro cifras significativas. Para los argumentos de $n$ comprendidos entre 1 y 10, los valores $n^2$ y $n^3$ se encuentran directamente en la tabla, si el valor del argumento está dado con tres cifras significativas. *Ejemplo:* $1{,}79^2 = 3{,}204$ (pág. 23). Si el valor del argumento está dado con más de tres cifras significativas es necesario recurrir a la interpolación (véase pág. 15). En esta tabla el error de la interpolación lineal en ningún caso excede una unidad del último guarismo.

Para hallar los valores $n^2$, $n^3$ cuando $n > 10$ y $n < 1$ señalaremos que, cuando $n$ aumenta $10^k$ veces, $n^2$ aumenta $10^{2k}$ veces y $n^3$, $10^{3k}$ veces, es decir, cuando la coma de $n$ se corre $k$ lugares a la derecha, la coma de $n^2$ se debe correr $2k$ lugares a la derecha y la de $n^3$, $3k$ lugares a la derecha. En este caso, si es necesario, al número tomado de la tabla se le añaden ceros a la derecha o a la izquierda. *Ejemplo*: $0{,}179^2 = 0{,}03204$; $179^3 = 5\,735\,000$*.

LAS RAÍCES CUADRADAS de los $n$ comprendidos entre 1 y 100, pueden encontrarse directamente en las tablas aplicando la interpolación lineal (pág. 15) y para cualesquiera $n$, según las siguientes reglas:

1) El número subradical se divide en grupos de a dos cifras a ambos lados de la coma. 2). El valor de la raíz se halla en la columna $\sqrt{n}$ o en la columna $\sqrt{10n}$, según que contenga el primero de los grupos de la izquierda que no está compuesto de ceros **una** o **dos** cifras significativas. 3) En el valor de la raíz encontrado se pone la coma partiendo del principio de que cada grupo del número subradical que figura antes de la coma, da para la ráiz una cifra antes de la coma y que para los números, menores que 1, cada grupo formado por ceros después de la coma da para la raíz un cero después de la coma.

*Ejemplos:* 1) $\sqrt{23{,}9} = 4{,}889$; 2) $\sqrt{0{,}00'02'39} = 0{,}01546$; 3) $\sqrt{23'90'00} = 488{,}9$; 4) $\sqrt{0{,}00'3} = 0{,}05477$. (En el último ejemplo, bajo la raíz debe ser agregado mentalmente otro cero al final para completar el grupo; por esto, la raíz se debe buscar en la columna $\sqrt{10n}$.)

LAS RAÍCES CÚBICAS de los números $n$ comprendidos entre 1 y 1000 pueden ser encontradas directamente en la tabla (aplicando la interpolación lineal) y para todos los $n$, según las siguientes reglas:

---

* Es mejor escribir $179^3 = 5{,}735 \cdot 10^6$, evitando el empleo de ceros para el reemplazo de las cifras incógnitas (exactamente $179^3 = 5\,735\,339$).

1) El número subradical se divide a ambos lados de la coma en grupos que contengan tres cifras. 2) El valor de la raíz se halla en la tabla, respectivamente, en las columnas $\sqrt[3]{n}$, $\sqrt[3]{10n}$ o $\sqrt[3]{100n}$, según que contenga el primer grupo de la izquierda, que no esté formado por ceros, **una, dos** o **tres** cifras significativas. 3) En el valor de la raíz encontrado se pone la coma por las mismas reglas que para las raíces cuadradas.

*Ejemplos:* 1) $\sqrt[3]{23{,}9} = 2{,}880$*; 2) $\sqrt[3]{239'000} = 62{,}06$; 3) $\sqrt[3]{0{,}000'002'39} = 0{,}01337$; 4) $\sqrt[3]{0{,}000'3} = 0{,}06694$; 5) $\sqrt[3]{0{,}03} = 0{,}3107$. (En los dos últimos ejemplos es necesario añadir mentalmente al final dos ceros y un cero, respectivamente.)

---

* Es necesario conservar el cero al final, ya que es una cifra significativa (véase pág. 127) y caracteriza la exactitud del valor obtenido de la raíz.

*Cuadrados, cubos, raíces cuadradas y raíces cúbicas*

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,00** | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 3,162 | 1,000 | 2,154 | 4,642 |
| 1,01 | 1,020 | 1,030 | 1,005 | 3,178 | 1,003 | 2,162 | 4,657 |
| 1,02 | 1,040 | 1,061 | 1,010 | 3,194 | 1,007 | 2,169 | 4,672 |
| 1,03 | 1,061 | 1,093 | 1,015 | 3,209 | 1,010 | 2,176 | 4,688 |
| 1,04 | 1,082 | 1,125 | 1,020 | 3,225 | 1,013 | 2,183 | 4,703 |
| **1,05** | 1,102 | 1,158 | 1,025 | 3,240 | 1,016 | 2,190 | 4,718 |
| 1,06 | 1,124 | 1,191 | 1,030 | 3,256 | 1,020 | 2,197 | 4,733 |
| 1,07 | 1,145 | 1,225 | 1,034 | 3,271 | 1,023 | 2,204 | 4,747 |
| 1,08 | 1,166 | 1,260 | 1,039 | 3,286 | 1,026 | 2,210 | 4,762 |
| 1,09 | 1,188 | 1,295 | 1,044 | 3,302 | 1,029 | 2,217 | 4,777 |
| **1,10** | 1,210 | 1,331 | 1,049 | 3,317 | 1,032 | 2,224 | 4,791 |
| 1,11 | 1,232 | 1,368 | 1,054 | 3,332 | 1,035 | 2,231 | 4,806 |
| 1,12 | 1,254 | 1,405 | 1,058 | 3,347 | 1,038 | 2,237 | 4,820 |
| 1,13 | 1,277 | 1,443 | 1,063 | 3,362 | 1,042 | 2,244 | 4,835 |
| 1,14 | 1,300 | 1,482 | 1,068 | 3,376 | 1,045 | 2,251 | 4,849 |
| **1,15** | 1,322 | 1,521 | 1,072 | 3,391 | 1,048 | 2,257 | 4,863 |
| 1,16 | 1,346 | 1,561 | 1,077 | 3,406 | 1,051 | 2,264 | 4,877 |
| 1,17 | 1,369 | 1,602 | 1,082 | 3,421 | 1,054 | 2,270 | 4,891 |
| 1,18 | 1,392 | 1,643 | 1,086 | 3,435 | 1,057 | 2,277 | 4,905 |
| 1,19 | 1,416 | 1,685 | 1,091 | 3,450 | 1,060 | 2,283 | 4,919 |
| **1,20** | 1,440 | 1,728 | 1,095 | 3,464 | 1,063 | 2,289 | 4,932 |
| 1,21 | 1,464 | 1,772 | 1,100 | 3,479 | 1,066 | 2,296 | 4,946 |
| 1,22 | 1,488 | 1,816 | 1,105 | 3,493 | 1,069 | 2,302 | 4,960 |
| 1,23 | 1,513 | 1,861 | 1,109 | 3,507 | 1,071 | 2,308 | 4,973 |
| 1,24 | 1,538 | 1,907 | 1,114 | 3,521 | 1,074 | 2,315 | 4,987 |
| **1,25** | 1,562 | 1,953 | 1,118 | 3,536 | 1,077 | 2,321 | 5,000 |
| 1,26 | 1,588 | 2,000 | 1,122 | 3,550 | 1,080 | 2,327 | 5,013 |
| 1,27 | 1,613 | 2,048 | 1,127 | 3,564 | 1,083 | 2,333 | 5,027 |
| 1,28 | 1,638 | 2,097 | 1,131 | 3,578 | 1,086 | 2,339 | 5,040 |
| 1,29 | 1,664 | 2,147 | 1,136 | 3,592 | 1,089 | 2,345 | 5,053 |
| **1,30** | 1,690 | 2,197 | 1,140 | 3,606 | 1,091 | 2,351 | 5,066 |
| 1,31 | 1,716 | 2,248 | 1,145 | 3,619 | 1,094 | 2,357 | 5,079 |
| 1,32 | 1,742 | 2,300 | 1,149 | 3,633 | 1,097 | 2,363 | 5,092 |
| 1,33 | 1,769 | 2,353 | 1,153 | 3,647 | 1,100 | 2,369 | 5,104 |
| 1,34 | 1,796 | 2,406 | 1,158 | 3,661 | 1,102 | 2,375 | 5,117 |
| **1,35** | 1,822 | 2,460 | 1,162 | 3,674 | 1,105 | 2,381 | 5,130 |
| 1,36 | 1,850 | 2,515 | 1,166 | 3,688 | 1,108 | 2,387 | 5,143 |
| 1,37 | 1,877 | 2,571 | 1,170 | 3,701 | 1,111 | 2,393 | 5,155 |
| 1,38 | 1,904 | 2,628 | 1,175 | 3,715 | 1,113 | 2,399 | 5,168 |
| 1,39 | 1,932 | 2,686 | 1,179 | 3,728 | 1,116 | 2,404 | 5,181 |
| **1,40** | 1,960 | 2,744 | 1,183 | 3,742 | 1,119 | 2,410 | 5,192 |
| 1,41 | 1,988 | 2,803 | 1,187 | 3,755 | 1,121 | 2,416 | 5,205 |
| 1,42 | 2,016 | 2,863 | 1,192 | 3,768 | 1,124 | 2,422 | 5,217 |
| 1,43 | 2,045 | 2,924 | 1,196 | 3,782 | 1,127 | 2,427 | 5,229 |
| 1,44 | 2,074 | 2,986 | 1,200 | 3,795 | 1,129 | 2,433 | 5,241 |
| **1,45** | 2,102 | 3,049 | 1,204 | 3,808 | 1,132 | 2,438 | 5,254 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,45** | 2,102 | 3,049 | 1,204 | 3,808 | 1,132 | 2,438 | 5,254 |
| 1,46 | 2,132 | 3,112 | 1,208 | 3,821 | 1,134 | 2,444 | 5,266 |
| 1,47 | 2,161 | 3,177 | 1,212 | 3,834 | 1,137 | 2,450 | 5,278 |
| 1,48 | 2,190 | 3,242 | 1,217 | 3,847 | 1,140 | 2,455 | 5,290 |
| 1,49 | 2,220 | 3,308 | 1,221 | 3,860 | 1,142 | 2,461 | 5,301 |
| **1,50** | 2,250 | 3,375 | 1,225 | 3,873 | 1,145 | 2,466 | 5,313 |
| 1,51 | 2,280 | 3,443 | 1,229 | 4,886 | 1,147 | 2,472 | 5,325 |
| 1,52 | 2,310 | 3,512 | 1,233 | 3,899 | 1,150 | 2,477 | 5,337 |
| 1,53 | 2,341 | 3,582 | 1,237 | 3,912 | 1,152 | 2,483 | 5,348 |
| 1,54 | 2,372 | 3,652 | 1,241 | 3,924 | 1,155 | 2,488 | 5,360 |
| **1,55** | 2,402 | 3,724 | 1,245 | 3,937 | 1,157 | 2,493 | 5,372 |
| 1,56 | 2,434 | 3,796 | 1,249 | 3,950 | 1,160 | 2,499 | 5,383 |
| 1,57 | 2,465 | 3,870 | 1,253 | 3,962 | 1,162 | 2,504 | 5,395 |
| 1,58 | 2,496 | 3,944 | 1,257 | 3,975 | 1,165 | 2,509 | 5,406 |
| 1,59 | 2,528 | 4,020 | 1,261 | 3,987 | 1,167 | 2,515 | 5,418 |
| **1,60** | 2,560 | 4,096 | 1,265 | 4,000 | 1,170 | 2,520 | 5,429 |
| 1,61 | 2,592 | 4,173 | 1,269 | 4,012 | 1,172 | 2,525 | 5,440 |
| 1,62 | 2,624 | 4,252 | 1,273 | 4,025 | 1,174 | 2,530 | 5,451 |
| 1,63 | 2,657 | 4,331 | 1,277 | 4,037 | 1,177 | 2,535 | 5,463 |
| 1,64 | 2,690 | 4,411 | 1,281 | 4,050 | 1,179 | 2,541 | 5,474 |
| **1,65** | 2,722 | 4,492 | 1,285 | 4,062 | 1,182 | 2,546 | 5,485 |
| 1,66 | 2,756 | 4,574 | 1,288 | 4,074 | 1,184 | 2,551 | 5,496 |
| 1,67 | 2,789 | 4,657 | 1,292 | 4,087 | 1,186 | 2,556 | 5,507 |
| 1,68 | 2,822 | 4,742 | 1,296 | 4,099 | 1,189 | 2,561 | 5,518 |
| 1,69 | 2,856 | 4,827 | 1,300 | 4,111 | 1,191 | 2,566 | 5,529 |
| **1,70** | 2,890 | 4,913 | 1,304 | 4,123 | 1,193 | 2,571 | 5,540 |
| 1,71 | 2,924 | 5,000 | 1,308 | 4,135 | 1,196 | 2,576 | 5,550 |
| 1,72 | 2,958 | 5,088 | 1,311 | 4,147 | 1,198 | 2,581 | 5,561 |
| 1,73 | 2,993 | 5,178 | 1,315 | 4,159 | 1,200 | 2,586 | 5,572 |
| 1,74 | 3,028 | 5,268 | 1,319 | 4,171 | 1,203 | 2,591 | 5,583 |
| **1,75** | 3,062 | 5,359 | 1,323 | 4,183 | 1,205 | 2,596 | 5,593 |
| 1,76 | 3,098 | 5,452 | 1,327 | 4,195 | 1,207 | 2,601 | 5,604 |
| 1,77 | 3,133 | 5,545 | 1,330 | 4,207 | 1,210 | 2,606 | 5,615 |
| 1,78 | 3,168 | 5,640 | 1,334 | 4,219 | 1,212 | 2,611 | 5,625 |
| 1,79 | 3,204 | 5,735 | 1,338 | 4,231 | 1,214 | 2,616 | 5,636 |
| **1,80** | 3,240 | 5,832 | 1,342 | 4,243 | 1,216 | 2,621 | 5,646 |
| 1,81 | 3,276 | 5,930 | 1,345 | 4,254 | 1,219 | 2,626 | 5,657 |
| 1,82 | 3,312 | 6,029 | 1,349 | 4,266 | 1,221 | 2,630 | 5,667 |
| 1,83 | 3,349 | 6,128 | 1,353 | 4,278 | 1,223 | 2,635 | 5,677 |
| 1,84 | 3,386 | 6,230 | 1,356 | 4,290 | 1,225 | 2,640 | 5,688 |
| **1,85** | 3,422 | 6,332 | 1,360 | 4,301 | 1,228 | 2,645 | 5,698 |
| 1,86 | 3,460 | 6,435 | 1,364 | 4,313 | 1,230 | 2,650 | 5,708 |
| 1,87 | 3,497 | 6,539 | 1,367 | 4,324 | 1,232 | 2,654 | 5,718 |
| 1,88 | 3,534 | 6,645 | 1,371 | 4,336 | 1,234 | 2,659 | 5,729 |
| 1,89 | 3,572 | 6,751 | 1,375 | 4,347 | 1,236 | 2,664 | 5,739 |
| **1,90** | 3,610 | 6,859 | 1,378 | 4,359 | 1,239 | 2,668 | 5,749 |

Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,90** | 3,610 | 6,859 | 1,378 | 4,359 | 1,239 | 2,668 | 5,749 |
| 1,91 | 3,648 | 6,968 | 1,382 | 4,370 | 1,241 | 2,673 | 5,759 |
| 1,92 | 3,686 | 7,078 | 1,386 | 4,382 | 1,243 | 2,678 | 5,769 |
| 1,93 | 3,725 | 7,189 | 1,389 | 4,393 | 1,245 | 2,682 | 5,779 |
| 1,94 | 3,764 | 7,301 | 1,393 | 4,405 | 1,247 | 2,687 | 5,789 |
| **1,95** | 3,802 | 7,415 | 1,396 | 4,416 | 1,249 | 2,692 | 5,799 |
| 1,96 | 3,842 | 7,530 | 1,400 | 4,427 | 1,251 | 2,696 | 5,809 |
| 1,97 | 3,881 | 7,645 | 1,404 | 4,438 | 1,254 | 2,701 | 5,819 |
| 1,98 | 3,920 | 7,762 | 1,407 | 4,450 | 1,256 | 2,705 | 5,828 |
| 1,99 | 3,960 | 7,881 | 1,411 | 4,461 | 1,258 | 2,710 | 5,838 |
| **2,00** | 4,000 | 8,000 | 1,414 | 4,472 | 1,260 | 2,714 | 5,848 |
| 2,01 | 4,040 | 8,121 | 1,418 | 4,483 | 1,262 | 2,719 | 5,858 |
| 2,02 | 4,080 | 8,242 | 1,421 | 4,494 | 1,264 | 2,723 | 5,867 |
| 2,03 | 4,121 | 8,365 | 1,425 | 4,506 | 1,266 | 2,728 | 5,877 |
| 2,04 | 4,162 | 8,490 | 1,428 | 4,517 | 1,268 | 2,732 | 5,887 |
| **2,05** | 4,202 | 8,615 | 1,432 | 4,528 | 1,270 | 2,737 | 5,896 |
| 2,06 | 4,244 | 8,742 | 1,435 | 4,539 | 1,272 | 2,741 | 5,906 |
| 2,07 | 4,285 | 8,870 | 1,439 | 4,550 | 1,274 | 2,746 | 5,915 |
| 2,08 | 4,326 | 8,999 | 1,442 | 4,561 | 1,277 | 2,750 | 5,925 |
| 2,09 | 4,368 | 9,129 | 1,446 | 4,572 | 1,279 | 2.755 | 5,934 |
| **2,10** | 4,410 | 9,261 | 1,449 | 4,583 | 1,281 | 2,759 | 5,944 |
| 2,11 | 4,452 | 9,394 | 1,453 | 4,593 | 1,283 | 2,763 | 5,953 |
| 2,12 | 4,494 | 9,528 | 1,456 | 4,604 | 1,285 | 2,768 | 5,963 |
| 2,13 | 4,537 | 9,664 | 1,459 | 4,615 | 1,287 | 2,772 | 5,972 |
| 2,14 | 4,580 | 9,800 | 1,463 | 4.626 | 1,289 | 2,776 | 5,981 |
| **2,15** | 4,622 | 9,938 | 1,466 | 4,637 | 1,291 | 2,781 | 5,991 |
| 2,16 | 4,666 | 10,08 | 1,470 | 4,648 | 1,293 | 2,785 | 6,000 |
| 2,17 | 4,709 | 10,22 | 1,473 | 4,658 | 1,295 | 2,789 | 6,009 |
| 2,18 | 4,752 | 10,36 | 1,476 | 4,669 | 1,297 | 2,794 | 6,018 |
| 2,19 | 4,796 | 10,50 | 1,480 | 4,680 | 1,299 | 2.798 | 6,028 |
| **2,20** | 4,840 | 10,65 | 1,483 | 4,690 | 1,301 | 2,802 | 6,037 |
| 2,21 | 4,884 | 10,79 | 1,487 | 4,701 | 1,303 | 2,806 | 6,046 |
| 2,22 | 4,928 | 10,94 | 1,490 | 4,712 | 1,305 | 2,811 | 6,055 |
| 2,23 | 4,973 | 11,09 | 1,493 | 4,722 | 1,306 | 2,815 | 6,064 |
| 2,24 | 5,018 | 11,24 | 1,497 | 4,733 | 1,308 | 2,819 | 6,073 |
| **2,25** | 5,062 | 11,39 | 1,500 | 4,743 | 1,310 | 2,823 | 6,082 |
| 2,26 | 5,108 | 11,54 | 1,503 | 4,754 | 1,312 | 2,827 | 6,091 |
| 2,27 | 5,153 | 11,70 | 1,507 | 4,764 | 1,314 | 2,831 | 6,100 |
| 2,28 | 5,198 | 11,85 | 1,510 | 4,775 | 1,316 | 2,836 | 6,109 |
| 2,29 | 5,244 | 12,01 | 1,513 | 4,785 | 1,318 | 2,840 | 6,118 |
| **2,30** | 5,290 | 12,17 | 1,517 | 4,796 | 1,320 | 2,844 | 6,127 |
| 2,31 | 5,336 | 12,33 | 1,520 | 4,806 | 1.322 | 2,848 | 6,136 |
| 2,32 | 5,382 | 12,49 | 1,523 | 4,817 | 1,324 | 2,852 | 6,145 |
| 2,33 | 5,429 | 12,65 | 1,526 | 4,827 | 1,326 | 2,856 | 6,153 |
| 2,34 | 5,476 | 12,81 | 1,530 | 4,837 | 1,328 | 2,860 | 6,162 |
| **2,35** | 5,522 | 12,98 | 1,533 | 4,848 | 1,330 | 2,864 | 6,171 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,35 | 5,522 | 12,98 | 1,533 | 4,848 | 1,330 | 2,864 | 6,171 |
| 2,36 | 5,570 | 13,14 | 1,536 | 4,858 | 1,331 | 2,868 | 6,180 |
| 2,37 | 5,617 | 13,31 | 1,539 | 4,868 | 1,333 | 2,872 | 6,188 |
| 2,38 | 5,664 | 13,48 | 1,543 | 4,879 | 1,335 | 2,876 | 6,197 |
| 2,39 | 5,712 | 13,65 | 1,546 | 4,889 | 1,337 | 2,880 | 6,206 |
| 2,40 | 5,760 | 13,82 | 1,549 | 4,899 | 1,339 | 2,884 | 6,214 |
| 2,41 | 5,808 | 14,00 | 1,552 | 4,909 | 1,341 | 2,888 | 6,223 |
| 2,42 | 5,856 | 14,17 | 1,556 | 4,919 | 1,343 | 2,892 | 6,232 |
| 2,43 | 5,905 | 14,35 | 1,559 | 4,930 | 1,344 | 2,896 | 6,240 |
| 2,44 | 5,954 | 14,53 | 1,562 | 4,940 | 1,346 | 2,900 | 6,249 |
| 2,45 | 6,002 | 14,71 | 1,565 | 4,950 | 1,348 | 2,904 | 6,257 |
| 2,46 | 6,052 | 14,89 | 1,568 | 4,960 | 1,350 | 2,908 | 6,266 |
| 2,47 | 6,101 | 15,07 | 1,572 | 4,970 | 1,352 | 2,912 | 6,274 |
| 2,48 | 6,150 | 15,25 | 1,575 | 4,980 | 1,354 | 2,916 | 6,283 |
| 2,49 | 6,200 | 15,44 | 1,578 | 4,990 | 1,355 | 2,920 | 6,291 |
| 2,50 | 6,250 | 15,62 | 1,581 | 5,000 | 1,357 | 2,924 | 6,300 |
| 2,51 | 6,300 | 15,81 | 1,584 | 5,010 | 1,359 | 2,928 | 6,308 |
| 2,52 | 6,350 | 16,00 | 1,587 | 5,020 | 1,361 | 2,932 | 6,316 |
| 2,53 | 6,401 | 16,19 | 1,591 | 5,030 | 1,363 | 2,936 | 6,325 |
| 2,54 | 6,452 | 16,39 | 1,594 | 5,040 | 1,364 | 2,940 | 6,333 |
| 2,55 | 6,502 | 16,58 | 1,597 | 5,050 | 1,366 | 2,943 | 6,341 |
| 2,56 | 6,554 | 16,78 | 1,600 | 5,060 | 1,368 | 2,947 | 6,350 |
| 2,57 | 6,605 | 16,97 | 1,603 | 5,070 | 1,370 | 2,951 | 6,358 |
| 2,58 | 6,656 | 17,17 | 1,606 | 5,079 | 1,372 | 2,955 | 6,366 |
| 2,59 | 6,708 | 17,37 | 1,609 | 5,089 | 1,373 | 2,959 | 6,374 |
| 2,60 | 6,760 | 17,58 | 1,612 | 5,099 | 1,375 | 2,962 | 6,383 |
| 2,61 | 6,812 | 17,78 | 1,616 | 5,109 | 1,377 | 2,966 | 5,391 |
| 2,62 | 6,864 | 17,98 | 1,619 | 5,119 | 1,379 | 2,970 | 6,399 |
| 2,63 | 6,917 | 18,19 | 1,622 | 5,128 | 1,380 | 2,974 | 6,407 |
| 2,64 | 6,970 | 18,40 | 1,625 | 5,138 | 1,382 | 2,978 | 6,415 |
| 2,65 | 7,022 | 18,61 | 1,628 | 5,148 | 1,384 | 2,981 | 6,423 |
| 2,66 | 7,076 | 18,82 | 1,631 | 5,158 | 1,386 | 2,985 | 6,431 |
| 2,67 | 7,129 | 19,03 | 1,634 | 5,167 | 1,387 | 2,989 | 6,439 |
| 2,68 | 7,182 | 19,25 | 1,637 | 5,177 | 1,389 | 2,993 | 6,447 |
| 2,69 | 7,236 | 19,47 | 1,640 | 5,187 | 1,391 | 2,996 | 6,455 |
| 2,70 | 7,290 | 19,68 | 1,643 | 5,196 | 1,392 | 3,000 | 6,463 |
| 2,71 | 7,344 | 19,90 | 1,646 | 5,206 | 1,394 | 3,004 | 6,471 |
| 2,72 | 7,398 | 20,12 | 1,649 | 5,215 | 1,396 | 3,007 | 6,479 |
| 2,73 | 7,453 | 20,35 | 1,652 | 5,225 | 1,398 | 3,011 | 6,487 |
| 2,74 | 7,508 | 20,57 | 1,655 | 5,235 | 1,399 | 3,015 | 6,495 |
| 2,75 | 7,562 | 20,80 | 1,658 | 5,244 | 1,401 | 3,018 | 6,503 |
| 2,76 | 7,618 | 21,02 | 1,661 | 5,254 | 1,403 | 3,022 | 6,511 |
| 2,77 | 7,673 | 21,25 | 1,664 | 5,263 | 1,404 | 3,026 | 6,519 |
| 2,78 | 7,728 | 21,48 | 1,667 | 5,273 | 1,406 | 3,029 | 6,527 |
| 2,79 | 7,784 | 21,72 | 1,670 | 5,282 | 1,408 | 3,033 | 6,534 |
| 2,80 | 7,840 | 21,95 | 1,673 | 5,292 | 1,409 | 3,037 | 6,542 |

Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2,80** | 7,840 | 21,95 | 1,673 | 5,292 | 1,409 | 3,037 | 6,542 |
| 2,81 | 7,896 | 22,19 | 1,676 | 5,301 | 1,411 | 3,040 | 6,550 |
| 2,82 | 7,952 | 22,43 | 1,679 | 5,310 | 1,413 | 3,044 | 6,558 |
| 2,83 | 8,009 | 22,67 | 1,682 | 5,320 | 1,414 | 3,047 | 6,565 |
| 2,84 | 8,066 | 22,91 | 1,685 | 5,329 | 1,416 | 3,051 | 6,573 |
| **2,85** | 8,122 | 23,15 | 1,688 | 5,339 | 1,418 | 3,055 | 6,581 |
| 2,86 | 8,180 | 23,39 | 1,691 | 5,348 | 1,419 | 3,058 | 6,589 |
| 2,87 | 8,237 | 23,64 | 1,694 | 5,357 | 1,421 | 3,062 | 6,596 |
| 2,88 | 8,294 | 23,89 | 1,697 | 5,367 | 1,423 | 3,065 | 6,604 |
| 2,89 | 8,352 | 24,14 | 1,700 | 5,376 | 1,424 | 3,069 | 6,611 |
| **2,90** | 8,410 | 24,39 | 1,703 | 5,385 | 1,426 | 3,072 | 6,619 |
| 2,91 | 8,468 | 24,64 | 1,706 | 5,394 | 1,428 | 4,076 | 6,627 |
| 2,92 | 8,526 | 24,90 | 1,709 | 5,404 | 1,429 | 3,079 | 6,634 |
| 2,93 | 8,585 | 25,15 | 1,712 | 5,413 | 1,431 | 3,083 | 6,642 |
| 2,94 | 8,644 | 25,41 | 1,715 | 5,422 | 1,433 | 3,086 | 6,649 |
| **2,95** | 8,702 | 25,67 | 1,718 | 5,431 | 1,434 | 3,090 | 6,657 |
| 2,96 | 8,762 | 25,93 | 1,720 | 5,441 | 1,436 | 3,093 | 6,664 |
| 2,97 | 8,821 | 26,20 | 1,723 | 5,450 | 1,437 | 3,097 | 6,672 |
| 2,98 | 8,880 | 26,46 | 1,726 | 5,459 | 1,439 | 3,100 | 6,679 |
| 2,99 | 8,940 | 26,73 | 1,729 | 5,468 | 1,441 | 3,104 | 6,687 |
| **3,00** | 9,000 | 27,00 | 1,732 | 5,477 | 1,442 | 3,107 | 6,694 |
| 3,01 | 9,060 | 27,27 | 1,735 | 5,486 | 1,444 | 3,111 | 6,702 |
| 3,02 | 9,120 | 27,54 | 1,738 | 5,495 | 1,445 | 3,114 | 6,709 |
| 3,03 | 9,181 | 27,82 | 1,741 | 5,505 | 1,447 | 3,118 | 6,717 |
| 3,04 | 9,242 | 28,09 | 1,744 | 5,514 | 1,449 | 3,121 | 6,724 |
| **3,05** | 9,302 | 28,37 | 1,746 | 5,523 | 1,450 | 4,124 | 6,731 |
| 3,06 | 9,364 | 28,65 | 1,749 | 5,532 | 1,452 | 4,128 | 6,739 |
| 3,07 | 9,425 | 28,93 | 1,752 | 5,541 | 1,453 | 3,131 | 6,746 |
| 3,08 | 9,486 | 29,22 | 1,755 | 5,550 | 1,455 | 3,135 | 6,753 |
| 3,09 | 9,548 | 29,50 | 1,758 | 5,559 | 1,457 | 3,138 | 6,761 |
| **3,10** | 9,610 | 29,79 | 1,761 | 5,568 | 1,458 | 3,141 | 6,768 |
| 3,11 | 9,672 | 30,08 | 1,764 | 5,577 | 1,460 | 3,145 | 6,775 |
| 3,12 | 9,734 | 30,37 | 1,766 | 5,586 | 1,461 | 3,148 | 6,782 |
| 3,13 | 9,797 | 30,66 | 1,769 | 5,595 | 1,463 | 3,151 | 6,790 |
| 3,14 | 9,860 | 30,96 | 1,772 | 5,604 | 1,464 | 3,155 | 6,797 |
| **3,15** | 9,922 | 31,26 | 1,775 | 5,612 | 1,466 | 4,158 | 6,804 |
| 3,16 | 9,986 | 31,55 | 1,778 | 5,621 | 1,467 | 3,162 | 6,811 |
| 3,17 | 10,05 | 31,86 | 1,780 | 5,630 | 1,469 | 3,165 | 6,818 |
| 3,18 | 10,11 | 32,16 | 1 783 | 5,639 | 1,471 | 3,168 | 6,826 |
| 3,19 | 10,18 | 32,46 | 1,786 | 5,648 | 1,472 | 3,171 | 6,833 |
| **3,20** | 10,24 | 32,77 | 1,789 | 5 657 | 1,474 | 3,175 | 6,840 |
| 3,21 | 10,30 | 33,08 | 1,792 | 5,666 | 1,475 | 3,178 | 6,847 |
| 3,22 | 10,37 | 33,39 | 1,794 | 5,675 | 1,477 | 3,181 | 6,854 |
| 3,23 | 10,43 | 33,70 | 1,797 | 5,683 | 1,478 | 3,185 | 6,861 |
| 3,24 | 10,50 | 34,01 | 1,800 | 5,692 | 1,480 | 3,188 | 6,868 |
| **3,25** | 10,56 | 34,33 | 1,803 | 5,701 | 1,481 | 3,191 | 6,875 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3,25** | 10,56 | 34,33 | 1,803 | 5,701 | 1,481 | 3,191 | 6,875 |
| 3,26 | 10,63 | 34,65 | 1,806 | 5,710 | 1,483 | 3,195 | 6,882 |
| 3,27 | 10,69 | 34,97 | 1,808 | 5,718 | 1,484 | 3,198 | 6,889 |
| 3,28 | 10,76 | 35,29 | 1,811 | 5,727 | 1,486 | 3,201 | 6,896 |
| 3,29 | 10,82 | 35,61 | 1,814 | 5,736 | 1,487 | 3,204 | 6,903 |
| **3,30** | 10,89 | 35,94 | 1,817 | 5,745 | 1,489 | 3,208 | 6,910 |
| 3,31 | 10,96 | 36,26 | 1,819 | 5,753 | 1,490 | 3,211 | 6,917 |
| 3,32 | 11,02 | 36,59 | 1,822 | 5,762 | 1,492 | 3,214 | 6,924 |
| 3,33 | 11,09 | 36,93 | 1,825 | 5,771 | 1,493 | 3,217 | 6,931 |
| 3,34 | 11,16 | 37,26 | 1,828 | 5,779 | 1,495 | 3,220 | 6,938 |
| **3,35** | 11,22 | 37,60 | 1,830 | 5,788 | 1,496 | 3,224 | 6,945 |
| 3,36 | 11,29 | 37,93 | 1,833 | 5,797 | 1,498 | 3,227 | 6,952 |
| 3,37 | 11,36 | 38,27 | 1,836 | 5,805 | 1,499 | 3,230 | 6,959 |
| 3,38 | 11,42 | 38,61 | 1,838 | 5,814 | 1,501 | 3,233 | 6,966 |
| 3,39 | 11,49 | 38,96 | 1,841 | 5,822 | 1,502 | 3,236 | 6,973 |
| **3,40** | 11,56 | 39,30 | 1,844 | 5,831 | 1,504 | 3,240 | 6,980 |
| 3,41 | 11,63 | 39,65 | 1,847 | 5,840 | 1,505 | 3,243 | 6,986 |
| 3,42 | 11,70 | 40,00 | 1,849 | 5,848 | 1,507 | 3,246 | 6,993 |
| 3,43 | 11,76 | 40,35 | 1,852 | 5,857 | 1,508 | 3,249 | 7,000 |
| 3,44 | 11,83 | 40,71 | 1,855 | 5,865 | 1,510 | 3,252 | 7,007 |
| **3,45** | 11,90 | 41,06 | 1,857 | 5,874 | 1,511 | 3,255 | 7,014 |
| 3,46 | 11,97 | 41,42 | 1,860 | 5,882 | 1,512 | 3,259 | 7,020 |
| 3,47 | 12,04 | 41,78 | 1,863 | 5,891 | 1,514 | 3,262 | 7,027 |
| 3,48 | 12,11 | 42,14 | 1,865 | 5,899 | 1,515 | 3,265 | 7,034 |
| 3,49 | 12,18 | 42,51 | 1,868 | 5,908 | 1,517 | 3,268 | 7,041 |
| **3,50** | 12,25 | 42,88 | 1,871 | 5,916 | 1,518 | 3,271 | 7,047 |
| 3,51 | 12,32 | 43,24 | 1,873 | 5,925 | 1,520 | 2,274 | 7,054 |
| 3,52 | 12,39 | 43,61 | 1,876 | 5,933 | 1,521 | 3,277 | 7,061 |
| 3,53 | 12,46 | 43,99 | 1,879 | 5,941 | 1,523 | 3,280 | 7,067 |
| 3,54 | 12,53 | 44,36 | 1,881 | 5,950 | 1,524 | 3,283 | 7,074 |
| **3,55** | 12,60 | 44,74 | 1,884 | 5,958 | 1,525 | 3,287 | 7,081 |
| 3,56 | 12,67 | 45,12 | 1,887 | 5,967 | 1,527 | 3,290 | 7,087 |
| 3,57 | 12,74 | 45,50 | 1,889 | 5,975 | 1,528 | 3,293 | 7,094 |
| 3,58 | 12,82 | 45,88 | 1,892 | 5,983 | 1,530 | 3,296 | 7,101 |
| 3,59 | 12,89 | 46,27 | 1,895 | 5,992 | 1,531 | 3,299 | 7,107 |
| **3,60** | 12,96 | 46,66 | 1,897 | 6,000 | 1,533 | 3,302 | 7,114 |
| 3,61 | 13,03 | 47,05 | 1,900 | 6,008 | 1,534 | 3,305 | 7,120 |
| 3,62 | 13,10 | 47,44 | 1,903 | 6,017 | 1,535 | 3,308 | 7,127 |
| 3,63 | 13,18 | 47,83 | 1,905 | 6,025 | 1,537 | 3,311 | 7,133 |
| 3,64 | 13,25 | 48,23 | 1,908 | 6,033 | 1,538 | 3,314 | 7,140 |
| **3,65** | 13,32 | 48,63 | 1,910 | 6,042 | 1,540 | 3,317 | 7,147 |
| 3,66 | 13,40 | 49,03 | 1,913 | 6,050 | 1,541 | 3,320 | 7,153 |
| 3,67 | 13,47 | 49,43 | 1,916 | 6,058 | 1,542 | 3,323 | 7,160 |
| 3,68 | 13,54 | 49,84 | 1,918 | 6,066 | 1,544 | 3,326 | 7,166 |
| 3,69 | 13,62 | 50,24 | 1,921 | 6,075 | 1,545 | 3,329 | 7,173 |
| **3,70** | 13,69 | 50,65 | 1,924 | 6,083 | 1,547 | 3,332 | 7,179 |

Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3,70** | 13,69 | 50,65 | 1,924 | 6,083 | 1,547 | 3,332 | 7,179 |
| 3,71 | 13,76 | 51,06 | 1,926 | 6,091 | 1,548 | 3,335 | 7,186 |
| 3,72 | 13,84 | 51,48 | 1,929 | 6,099 | 1,549 | 3,338 | 7,192 |
| 3,73 | 13,91 | 51,90 | 1,931 | 6,107 | 1,551 | 3,341 | 7,198 |
| 3,74 | 13,99 | 52,31 | 1,934 | 6,116 | 1,552 | 3,344 | 7,205 |
| **3,75** | 14,06 | 52,73 | 1,936 | 6,124 | 1,554 | 3,347 | 7,211 |
| 3,76 | 14,14 | 53,16 | 1,939 | 6,132 | 1,555 | 3,350 | 7,218 |
| 3,77 | 14,21 | 53,58 | 1,942 | 6,140 | 1,556 | 3,353 | 7,224 |
| 3,78 | 14,29 | 54,01 | 1,944 | 6,148 | 1,558 | 3,356 | 7,230 |
| 3,79 | 14,36 | 54,44 | 1,947 | 6,156 | 1,559 | 3,359 | 7,237 |
| **3,80** | 14,44 | 54,87 | 1,949 | 6,164 | 1,560 | 3,362 | 7,243 |
| 3,81 | 14,52 | 55,31 | 1,952 | 6,173 | 1,562 | 3,365 | 7,250 |
| 3,82 | 14,59 | 55,74 | 1,954 | 6,181 | 1,563 | 3,368 | 7,256 |
| 3,83 | 14,67 | 56,18 | 1,957 | 6,189 | 1,565 | 3,371 | 7,262 |
| 3,84 | 14,75 | 56,62 | 1,960 | 6,197 | 1,566 | 3,374 | 7,268 |
| **3,85** | 14,82 | 57,07 | 1,962 | 6,205 | 1,567 | 3,377 | 7,275 |
| 3,86 | 14,90 | 57,51 | 1,965 | 6,213 | 1,569 | 3,380 | 7,281 |
| 3,87 | 14,98 | 57,96 | 1,967 | 6,221 | 1,570 | 3,382 | 7,287 |
| 3,88 | 15,05 | 58,41 | 1,970 | 6,229 | 1,571 | 3,385 | 7,294 |
| 3,89 | 15,13 | 58,86 | 1,972 | 6,237 | 1,573 | 3,388 | 7,300 |
| **3,90** | 15,21 | 59,32 | 1,975 | 6,245 | 1,574 | 3,391 | 7,306 |
| 3,91 | 15,29 | 59,78 | 1,977 | 6,253 | 1,575 | 3,394 | 7,312 |
| 3,92 | 15,37 | 60,24 | 1,980 | 6,261 | 1,577 | 3,397 | 7,319 |
| 3,93 | 15,44 | 60,70 | 1,982 | 6,269 | 1,578 | 3,400 | 7,325 |
| 3,94 | 15,52 | 61,16 | 1,985 | 6,277 | 1,579 | 3,403 | 7,331 |
| **3,95** | 15,60 | 61,63 | 1,987 | 6,285 | 1,581 | 3,406 | 7,337 |
| 3,96 | 15,68 | 62,10 | 1,990 | 6,293 | 1,582 | 3,409 | 7,343 |
| 3,97 | 15,76 | 62,57 | 1,992 | 6,301 | 1,583 | 3,411 | 7,350 |
| 3,98 | 15,84 | 63,04 | 1,995 | 6,309 | 1,585 | 3,414 | 7,356 |
| 3,99 | 15,92 | 63,52 | 1,997 | 6,317 | 1,586 | 3,417 | 7,362 |
| **4,00** | 16,00 | 64,00 | 2,000 | 6,325 | 1,587 | 3,420 | 7,368 |
| 4,01 | 16,08 | 64,48 | 2,002 | 6,332 | 1,589 | 3,423 | 7,374 |
| 4,02 | 16,16 | 64,96 | 2,005 | 6,340 | 1,590 | 3,426 | 7,380 |
| 4,03 | 16,24 | 65,45 | 2,007 | 6,348 | 1,591 | 3,428 | 7,386 |
| 4,04 | 16,32 | 65,94 | 2,010 | 6,356 | 1,593 | 3,431 | 7,393 |
| **4,05** | 16,40 | 66,43 | 2,012 | 6,364 | 1,594 | 3,434 | 7,399 |
| 4,06 | 16,48 | 66,92 | 2,015 | 6,372 | 1,595 | 3,437 | 7,405 |
| 4,07 | 16,56 | 67,42 | 2,017 | 6,380 | 1,597 | 3,440 | 7,411 |
| 4,08 | 16,65 | 67,92 | 2,020 | 6,387 | 1,598 | 3,443 | 7,417 |
| 4,09 | 16,73 | 68,42 | 2,022 | 6,395 | 1,599 | 3,445 | 7,423 |
| **4,10** | 16,81 | 68,92 | 2,025 | 6,403 | 1,601 | 3,448 | 7,429 |
| 4,11 | 16,89 | 69,43 | 2,027 | 6,411 | 1,602 | 3,451 | 7,435 |
| 4,12 | 16,97 | 69,93 | 2,030 | 6,419 | 1,603 | 3,454 | 7,441 |
| 4,13 | 17,06 | 70,44 | 2,032 | 6,427 | 1,604 | 3,457 | 7,447 |
| 4,14 | 17,14 | 70,96 | 2,035 | 6,434 | 1,606 | 3,459 | 7,453 |
| **4,15** | 17,22 | 71,47 | 2,037 | 6,442 | 1,607 | 3,462 | 7,459 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,15 | 17,22 | 71,47 | 2,037 | 6,442 | 1,607 | 3,462 | 7,459 |
| 4,16 | 17,31 | 71,99 | 2,040 | 6,450 | 1,608 | 3,465 | 7,465 |
| 4,17 | 17,39 | 72,51 | 2,042 | 6,458 | 1,610 | 3,468 | 7,471 |
| 4,18 | 17,47 | 73,03 | 2,045 | 6,465 | 1,611 | 3,471 | 7,477 |
| 4,19 | 17,56 | 73,56 | 2,047 | 6,473 | 1,612 | 3,473 | 7,483 |
| 4,20 | 17,64 | 74,09 | 2,049 | 6,481 | 1,613 | 3,476 | 7,489 |
| 4,21 | 17,72 | 74,62 | 2,052 | 6,488 | 1,615 | 3,479 | 7,495 |
| 4,22 | 17,81 | 75,15 | 2,054 | 6,496 | 1,616 | 3,482 | 7,501 |
| 4,23 | 17,89 | 75,69 | 2,057 | 6,504 | 1,617 | 3,484 | 7,507 |
| 4,24 | 17,98 | 76,23 | 2,059 | 6,512 | 1,619 | 3,487 | 7,513 |
| 4,25 | 18,06 | 76,77 | 2,062 | 6,519 | 1,620 | 3,490 | 7,518 |
| 4,26 | 18,15 | 77,31 | 2,064 | 6,527 | 1,621 | 3,493 | 7,524 |
| 4,27 | 18,23 | 77,85 | 2,066 | 6,535 | 1,622 | 3,495 | 7,530 |
| 4,28 | 18,32 | 78,40 | 2,069 | 6,542 | 1,624 | 3,498 | 7,536 |
| 4,29 | 18,40 | 78,95 | 2,071 | 6,550 | 1,625 | 3,501 | 7,542 |
| 4,30 | 18,49 | 79,51 | 2,074 | 6,557 | 1,626 | 3,503 | 7,548 |
| 4,31 | 18,58 | 80,06 | 2,076 | 6,565 | 1,627 | 3,506 | 7,554 |
| 4,32 | 18,66 | 80,62 | 2,078 | 6,573 | 1,629 | 3,509 | 7,560 |
| 4,33 | 18,75 | 81,18 | 2,081 | 6,580 | 1,630 | 3,512 | 7,565 |
| 4,34 | 18,84 | 81,75 | 2,083 | 6,588 | 1,631 | 3,514 | 7,571 |
| 4,35 | 18,92 | 82,31 | 2,086 | 6,595 | 1,632 | 3,517 | 7,577 |
| 4,36 | 19,01 | 82,88 | 2,088 | 6,603 | 1,634 | 3,520 | 7,583 |
| 4,37 | 19,10 | 83,45 | 2,090 | 6,611 | 1,635 | 3,522 | 7,589 |
| 4,38 | 19,18 | 84,03 | 2,093 | 6,618 | 1,636 | 3,525 | 7,594 |
| 4,39 | 19,27 | 84,60 | 2,095 | 6,626 | 1,637 | 3,528 | 7,600 |
| 4,40 | 19,36 | 85,18 | 2,098 | 6,633 | 1,639 | 3,530 | 7,606 |
| 4,41 | 19,45 | 85,77 | 2,100 | 6,641 | 1,640 | 3,533 | 7,612 |
| 4,42 | 19,54 | 86,35 | 2,102 | 6,648 | 1,641 | 3,536 | 7,617 |
| 4,43 | 19,62 | 86,94 | 2,105 | 6,656 | 1,642 | 3,538 | 7,623 |
| 4,44 | 19,71 | 87,53 | 2,107 | 6,663 | 1,644 | 3,541 | 7,629 |
| 4,45 | 19,80 | 88,12 | 2,110 | 6,671 | 1,645 | 3,544 | 7,635 |
| 4,46 | 19,89 | 88,72 | 2,112 | 6,678 | 1,646 | 3,546 | 7,640 |
| 4,47 | 19,98 | 89,31 | 2,114 | 6,686 | 1,647 | 3,549 | 7,646 |
| 4,48 | 20,07 | 89,92 | 2,117 | 6,693 | 1,649 | 3,552 | 7,652 |
| 4,49 | 20,16 | 90,52 | 2,119 | 6,701 | 1,650 | 3,554 | 7,657 |
| 4,50 | 20,25 | 91,12 | 2,121 | 6,708 | 1,651 | 3,557 | 7,663 |
| 4,51 | 20,34 | 91,73 | 2,124 | 6,716 | 1,652 | 3,560 | 7,669 |
| 4,52 | 20,43 | 92,35 | 2,126 | 6,723 | 1,653 | 3,562 | 7 674 |
| 4,53 | 20,52 | 92,96 | 2,128 | 6,731 | 1,655 | 3,565 | 7,680 |
| 4,54 | 20,61 | 93,58 | 2,131 | 6,738 | 1,656 | 3.567 | 7,686 |
| 4,55 | 20,70 | 94,20 | 2,133 | 6,745 | 1,657 | 3,570 | 7,691 |
| 4,56 | 20,79 | 94,82 | 2,135 | 6,753 | 1,658 | 3,573 | 7,697 |
| 4,57 | 20,88 | 95,44 | 2,138 | 6,760 | 1,659 | 3,575 | 7,703 |
| 4,58 | 20,98 | 96,07 | 2,140 | 6,768 | 1,661 | 3,578 | 7,708 |
| 4,59 | 21,07 | 96,70 | 2,142 | 6,775 | 1,662 | 3,580 | 7,714 |
| 4,60 | 21,16 | 97,34 | 2,145 | 6,782 | 1,663 | 3,583 | 7,719 |

**Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.**

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **4.60** | 21,16 | 97,34 | 2,145 | 6,782 | 1,663 | 3,583 | 7,719 |
| **4,61** | 21,25 | 97,97 | 2,147 | 6,790 | 1,664 | 3,586 | 7,725 |
| **4,62** | 21,34 | 98,61 | 2,149 | 6,797 | 1,666 | 3,588 | 7,731 |
| **4,63** | 21,44 | 99,25 | 2,152 | 6,804 | 1,667 | 3,591 | 7,736 |
| **4,64** | 21,53 | 99,90 | 2,154 | 6,812 | 1,668 | 3,593 | 7,742 |
| **4,65** | 21,62 | 100,5 | 2,156 | 6,819 | 1,669 | 3,596 | 7,747 |
| **4,66** | 21,72 | 101,2 | 2,159 | 6,826 | 1,670 | 3,599 | 7,753 |
| **4,67** | 21,81 | 101,8 | 2,161 | 6,834 | 1,671 | 3,601 | 7,758 |
| **4,68** | 21,90 | 102,5 | 2,163 | 6,841 | 1,673 | 3,604 | 7,764 |
| **4,69** | 22,00 | 103,2 | 2,166 | 6,848 | 1,674 | 3,606 | 7,769 |
| **4,70** | 22,09 | 103,8 | 2,168 | 6,856 | 1,675 | 3,609 | 7,775 |
| **4,71** | 22,18 | 104,5 | 2,170 | 6,863 | 1,676 | 3,611 | 7,780 |
| **4,72** | 22,28 | 105,2 | 2,173 | 6,870 | 1,677 | 3,614 | 7,786 |
| **4,73** | 22,37 | 105,8 | 2,175 | 6,877 | 1,679 | 3,616 | 7,791 |
| **4,74** | 22,47 | 106,5 | 2,177 | 6,885 | 1,680 | 3,619 | 7,797 |
| **4,75** | 22,56 | 107,2 | 2,179 | 6,892 | 1,681 | 3,622 | 7,802 |
| **4,76** | 22,66 | 107,9 | 2,182 | 6,899 | 1,682 | 3,624 | 7,808 |
| **4,77** | 22,75 | 108,5 | 2,184 | 6,907 | 1,683 | 3,627 | 7,813 |
| **4,78** | 22,85 | 109,2 | 2,186 | 6,914 | 1,685 | 3,629 | 7,819 |
| **4,79** | 22,94 | 109,9 | 2,189 | 6,921 | 1,686 | 3,632 | 7,824 |
| **4,80** | 23,04 | 110,6 | 2,191 | 6,928 | 1,687 | 3,634 | 7,830 |
| **4,81** | 23,14 | 111,3 | 2,193 | 6,935 | 1,688 | 3,637 | 7,835 |
| **4,82** | 23,23 | 112,0 | 2,195 | 6,943 | 1,689 | 3,639 | 7,841 |
| **4,83** | 23,33 | 112,7 | 2,198 | 6,950 | 1,690 | 3,642 | 7,846 |
| **4,84** | 23,43 | 113,4 | 2,200 | 6,957 | 1,692 | 3,644 | 7,851 |
| **4,85** | 23,52 | 114,1 | 2,202 | 6,964 | 1,693 | 3,647 | 7,857 |
| **4,86** | 23,62 | 114,8 | 2,205 | 6,971 | 1,694 | 3,649 | 7,862 |
| **4,87** | 23,72 | 115,5 | 2,207 | 6,979 | 1,695 | 3,652 | 7,868 |
| **4,88** | 23,81 | 116,2 | 2,209 | 6,986 | 1,696 | 3,654 | 7,873 |
| **4,89** | 23,91 | 116,9 | 2,211 | 6,993 | 1,697 | 3,657 | 7,878 |
| **4,90** | 24,01 | 117,6 | 2,214 | 7,000 | 1,698 | 3,659 | 7,884 |
| **4,91** | 24,11 | 118,4 | 2,216 | 7,007 | 1,700 | 3,662 | 7,889 |
| **4,92** | 24,21 | 119,1 | 2,218 | 7,014 | 1,701 | 3,664 | 7,894 |
| **4,93** | 24,30 | 119,8 | 2,220 | 7,021 | 1,702 | 3,667 | 7,900 |
| **4,94** | 24,40 | 120,6 | 2,223 | 7,029 | 1,703 | 3,669 | 7,905 |
| **4,95** | 24,50 | 121,3 | 2,225 | 7,036 | 1,704 | 3,672 | 7,910 |
| **4,96** | 24,60 | 122,0 | 2,227 | 7,043 | 1,705 | 3,674 | 7,916 |
| **4,97** | 24,70 | 122,8 | 2,229 | 7,050 | 1,707 | 3,677 | 7,921 |
| **4,98** | 24,80 | 123,5 | 2,232 | 7,057 | 1,708 | 3,679 | 7,926 |
| **4,99** | 24,90 | 124,3 | 2,234 | 7,064 | 1,709 | 3,682 | 7,932 |
| **5,00** | 25,00 | 125,0 | 2,236 | 7,071 | 1,710 | 3,684 | 7,937 |
| **5,01** | 25,10 | 125,8 | 2,238 | 7,078 | 1,711 | 3,686 | 7,942 |
| **5,02** | 25,20 | 126,5 | 2,241 | 7,085 | 1,712 | 3,689 | 7,948 |
| **5,03** | 25,30 | 127,3 | 2,243 | 7,092 | 1,713 | 3,691 | 7,953 |
| **5,04** | 25,40 | 128,0 | 2,245 | 7,099 | 1,715 | 3,694 | 7,958 |
| **5,05** | 25,50 | 128,8 | 2,247 | 7,106 | 1,716 | 3,696 | 7,963 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5,05** | 25,50 | 128,8 | 2,247 | 7,106 | 1,716 | 3,696 | 7,963 |
| 5,06 | 25,60 | 129,6 | 2,249 | 7,113 | 1,717 | 3,699 | 7,969 |
| 5,07 | 25,70 | 130,3 | 2,252 | 7,120 | 1,718 | 3,701 | 7,974 |
| 5,08 | 25,81 | 131,1 | 2,254 | 7,127 | 1,719 | 3,704 | 7,979 |
| 5,09 | 25,91 | 131,9 | 2,256 | 7,134 | 1,720 | 3,706 | 7,984 |
| **5,10** | 26,01 | 132,7 | 2,258 | 7,141 | 1,721 | 3,708 | 7,990 |
| 5,11 | 26,11 | 133,4 | 2,261 | 7,148 | 1,722 | 3,711 | 7,995 |
| 5,12 | 26,21 | 134,2 | 2,263 | 7,155 | 1.724 | 3 713 | 8,000 |
| 5,13 | 26,32 | 135,0 | 2,265 | 7,162 | 1,725 | 3,716 | 8,005 |
| 5,14 | 26,42 | 135,8 | 2,267 | 7,169 | 1,726 | 3,718 | 8,010 |
| **5,15** | 26,52 | 136,6 | 2,269 | 7,176 | 1,727 | 3,721 | 8,016 |
| 5,16 | 26,63 | 137,4 | 2,272 | 7,183 | 1,728 | 3,723 | 8,021 |
| 5,17 | 26,73 | 138,2 | 2,274 | 7,190 | 1,729 | 3,725 | 8,026 |
| 5,18 | 26,83 | 139,0 | 2,276 | 7,197 | 1,730 | 3,728 | 8,031 |
| 5,19 | 26,94 | 139,8 | 2,278 | 7,204 | 1,731 | 3,730 | 8,036 |
| **5,20** | 27,04 | 140,6 | 2,280 | 7,211 | 1,732 | 3,733 | 8,041 |
| 5,21 | 27,14 | 141,4 | 2,283 | 7,218 | 1,734 | 3,735 | 8,047 |
| 5,22 | 27,25 | 142,2 | 2,285 | 7,225 | 1,735 | 3,737 | 8,052 |
| 5,23 | 27,35 | 143,1 | 2,287 | 7,232 | 1,736 | 3,740 | 8,057 |
| 5,24 | 27,46 | 143,9 | 2,289 | 7,239 | 1,737 | 3,742 | 8,062 |
| **5,25** | 27,56 | 144,7 | 2,291 | 7,246 | 1,738 | 3,744 | 8,067 |
| 2,26 | 27,67 | 145,5 | 2,293 | 7,253 | 1,739 | 3,747 | 8,072 |
| 5,27 | 27,77 | 146,4 | 2,296 | 7,259 | 1,740 | 3,749 | 8,077 |
| 5,28 | 27,88 | 147,2 | 2,298 | 7,266 | 1,741 | 3,752 | 8,082 |
| 5,29 | 27,98 | 148,0 | 2,300 | 7,273 | 1,742 | 3,754 | 8,088 |
| **5,30** | 28,09 | 148,9 | 2,302 | 7,280 | 1,744 | 3,756 | 8,093 |
| 5,31 | 28,20 | 149,7 | 2,304 | 7,287 | 1,745 | 3,759 | 8,098 |
| 5,32 | 28,30 | 150,6 | 2,307 | 7,294 | 1,746 | 3,761 | 8,103 |
| 5,33 | 28,41 | 151,4 | 2,309 | 7,301 | 1,747 | 3,763 | 8,108 |
| 5,34 | 28,52 | 152,3 | 2,311 | 7,308 | 1,748 | 3,766 | 8,113 |
| **5,35** | 28,62 | 153,1 | 2,313 | 7,314 | 1,749 | 3,768 | 8,118 |
| 5,36 | 28,73 | 154,0 | 2,315 | 7,321 | 1,750 | 3,770 | 8,123 |
| 5,37 | 28,84 | 154,9 | 2,317 | 7,328 | 1,751 | 3,773 | 8,128 |
| 5,38 | 28,94 | 155,7 | 2,319 | 7,335 | 1,752 | 3,775 | 8,133 |
| 5,39 | 29,05 | 156,6 | 2,322 | 7,342 | 1,753 | 3,777 | 8,138 |
| **5,40** | 29,16 | 157,5 | 2,324 | 7,348 | 1,754 | 3,780 | 8,143 |
| 5,41 | 29,27 | 158,3 | 2,326 | 7,355 | 1,755 | 3,782 | 8,148 |
| 5,42 | 29,38 | 159,2 | 2,328 | 7,362 | 1,757 | 3,784 | 8,153 |
| 5,43 | 29,48 | 160,1 | 2,330 | 7,369 | 1,758 | 3,787 | 8,158 |
| 5,44 | 29,59 | 161,0 | 2,332 | 7,376 | 1,759 | 3,789 | 8,163 |
| **5,45** | 29,70 | 161,9 | 2,335 | 7,382 | 1,760 | 3,791 | 8,168 |
| 5,46 | 29,81 | 162,8 | 2,337 | 7,389 | 1,761 | 3,794 | 8,173 |
| 5,47 | 29,92 | 163,7 | 2,339 | 7,396 | 1,762 | 3,796 | 8,178 |
| 5,48 | 30,03 | 164,6 | 2,341 | 7,403 | 1,763 | 3,798 | 8,183 |
| 5,49 | 30,14 | 165,5 | 2,343 | 7,409 | 1,764 | 3,801 | 8,188 |
| **5,50** | 30,25 | 166,4 | 2,345 | 7,416 | 1,765 | 3,803 | 8,193 |

Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,50 | 30,25 | 166,4 | 2,345 | 7,416 | 1,765 | 3,803 | 8,193 |
| 5,51 | 30,36 | 167,3 | 2,347 | 7,423 | 1,766 | 3,805 | 8,198 |
| 5,52 | 30,47 | 168,2 | 2,349 | 7,430 | 1,767 | 3,808 | 8,203 |
| 5,53 | 30,58 | 169,1 | 3,352 | 7,436 | 1,768 | 3,810 | 8,208 |
| 5,54 | 30,69 | 170,0 | 2,354 | 7,443 | 1,769 | 3,812 | 8,213 |
| 5,55 | 30,80 | 171,0 | 2,356 | 7,450 | 1,771 | 3,814 | 8,218 |
| 5,56 | 30,91 | 171,9 | 2,358 | 7,457 | 1,772 | 3,817 | 8,223 |
| 5,57 | 31,02 | 172,8 | 2,360 | 7,463 | 1,773 | 3,819 | 8,228 |
| 5,58 | 31,14 | 173,7 | 2,362 | 7,470 | 1,774 | 3,821 | 8,233 |
| 5,59 | 31,25 | 174,7 | 2,364 | 7,477 | 1,775 | 3,824 | 8,238 |
| 5,60 | 31,36 | 175,6 | 2,366 | 7,483 | 1,776 | 3,826 | 8,243 |
| 5,61 | 31,47 | 176,6 | 2,369 | 7,490 | 1,777 | 3,828 | 8,247 |
| 5,62 | 31.58 | 177,5 | 2,371 | 7,497 | 1,778 | 3,830 | 8,252 |
| 5,63 | 31,70 | 178,5 | 2,373 | 7,503 | 1,779 | 3,833 | 8,257 |
| 5,64 | 31,81 | 179,4 | 2,375 | 7,510 | 1,780 | 3,835 | 8,262 |
| 5,65 | 31,92 | 180,4 | 2,377 | 7,517 | 1,781 | 3,837 | 8,267 |
| 5,66 | 32,04 | 181,3 | 2,379 | 7,523 | 1,782 | 3,839 | 8,272 |
| 5,67 | 32,15 | 182,3 | 2,381 | 7,530 | 1,783 | 3,842 | 8,277 |
| 5,68 | 32,26 | 183,3 | 2,383 | 7,537 | 1,784 | 3,844 | 8,282 |
| 5,69 | 32,38 | 184,2 | 2,385 | 7,543 | 1,785 | 3,846 | 8,286 |
| 5,70 | 32,49 | 185,2 | 2,387 | 7,550 | 1,786 | 3,849 | 8,291 |
| 5,71 | 32,60 | 186,2 | 2,390 | 7,556 | 1,787 | 3,851 | 8,296 |
| 5,72 | 32,72 | 187,1 | 2,392 | 7,563 | 1,788 | 3,853 | 8,301 |
| 5,73 | 32,83 | 188,1 | 2,394 | 7,570 | 1,789 | 3,855 | 8,306 |
| 5,74 | 32,95 | 189,1 | 2,396 | 7,576 | 1,790 | 3,857 | 8,311 |
| 5,75 | 33,06 | 190,1 | 2,398 | 7,583 | 1,792 | 3,860 | 8,316 |
| 5,76 | 33,18 | 191,1 | 2,400 | 7,589 | 1,793 | 3,862 | 8,320 |
| 5,77 | 33,29 | 192,1 | 2,402 | 7,596 | 1,794 | 3,864 | 8,325 |
| 5,78 | 33,41 | 193,1 | 2,404 | 7,603 | 1,795 | 3,866 | 8,330 |
| 5,79 | 33,52 | 194,1 | 2,406 | 7,609 | 1,796 | 3,869 | 8,335 |
| 5,80 | 33,64 | 195,1 | 2,408 | 7,616 | 1,797 | 3,871 | 8,340 |
| 5,81 | 33,76 | 196,1 | 2,410 | 7,622 | 1,798 | 3,873 | 8,344 |
| 5,82 | 33,87 | 197,1 | 2,412 | 7,629 | 1,799 | 3,875 | 8,349 |
| 5,83 | 33,99 | 198,2 | 2,415 | 7,635 | 1,800 | 4,878 | 8,354 |
| 5,84 | 34,11 | 199,2 | 2,417 | 7,642 | 1,801 | 3,880 | 8,359 |
| 5,85 | 34,22 | 200,2 | 2,419 | 7,649 | 1,802 | 3,882 | 8,363 |
| 5,86 | 34,34 | 201,2 | 2,421 | 7,655 | 1,803 | 3,884 | 8,368 |
| 5,87 | 34,46 | 202,3 | 2,423 | 7,662 | 1,804 | 3,886 | 8,373 |
| 5,88 | 34,57 | 203,3 | 2,425 | 7,668 | 1,805 | 3,889 | 8,378 |
| 5,89 | 34,69 | 204,3 | 2,427 | 7,675 | 1,806 | 3,891 | 8,382 |
| 5,90 | 34,81 | 205,4 | 2,429 | 7,681 | 1,807 | 3,893 | 8,387 |
| 5,91 | 34,93 | 206,4 | 2,431 | 7,688 | 1,808 | 3,895 | 8,392 |
| 5,92 | 35,05 | 207,5 | 2,433 | 7,694 | 1,809 | 3,897 | 8,397 |
| 5,93 | 35,16 | 208,5 | 2,435 | 7,701 | 1,810 | 3,900 | 8,401 |
| 5,94 | 35,28 | 209,6 | 2,437 | 7,707 | 1,811 | 3,902 | 8,406 |
| 5,95 | 35,40 | 210,6 | 2,439 | 7,714 | 1,812 | 3,904 | 8,411 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5,95** | 35,40 | 210,6 | 2,439 | 7,714 | 1,812 | 3,904 | 8,411 |
| **5,96** | 35,52 | 211,7 | 2,441 | 7,720 | 1,813 | 3,906 | 8,416 |
| **5,97** | 35,64 | 212,8 | 2,443 | 7,727 | 1,814 | 3,908 | 8,420 |
| **5,98** | 35,76 | 213,8 | 2,445 | 7,733 | 1,815 | 3,911 | 8,425 |
| **5,99** | 35,88 | 214,9 | 2,447 | 7,740 | 1,816 | 3,913 | 8,430 |
| **6,00** | 36,00 | 216,0 | 2,449 | 7,746 | 1,817 | 3,915 | 8,434 |
| **6,01** | 36,12 | 217,1 | 2,452 | 7,752 | 1,818 | 3,917 | 8,439 |
| **6,02** | 36,24 | 218,2 | 2,454 | 7,759 | 1,819 | 3,919 | 8,444 |
| **6,03** | 36,36 | 219,3 | 2,456 | 7,765 | 1,820 | 3,921 | 8,448 |
| **6,04** | 36,48 | 220,3 | 2,458 | 7,772 | 1,821 | 3,924 | 8,453 |
| **6,05** | 36,60 | 221,4 | 2,460 | 7,778 | 1,822 | 3,926 | 8,458 |
| **6,06** | 36,72 | 222,5 | 2,462 | 7,785 | 1,823 | 3,928 | 8,462 |
| **6,07** | 36,84 | 223,6 | 2,464 | 7,791 | 1,824 | 3,930 | 8,467 |
| **6,08** | 36,97 | 224,8 | 2,466 | 7,797 | 1,825 | 3,932 | 8,472 |
| **6,09** | 37,09 | 225,9 | 2,468 | 7,804 | 1,826 | 3,934 | 8,476 |
| **6,10** | 37,21 | 227,0 | 2,470 | 7,810 | 1,827 | 3,936 | 8,481 |
| **6,11** | 37,33 | 228,1 | 2,472 | 7,817 | 1,828 | 3,939 | 8,486 |
| **6,12** | 37,45 | 229,2 | 2,474 | 7,823 | 1,829 | 3,941 | 8,490 |
| **6,13** | 37,58 | 230,3 | 2,476 | 7,829 | 1,830 | 3,943 | 8,495 |
| **6,14** | 37,70 | 231,5 | 2,478 | 7,836 | 1,831 | 3,945 | 8,499 |
| **6,15** | 37,82 | 232,6 | 2,480 | 7,842 | 1,832 | 3,947 | 8,504 |
| **6,16** | 37,95 | 233,7 | 2,482 | 7,849 | 1,833 | 3,949 | 8,509 |
| **6,17** | 38,07 | 234,9 | 2,484 | 7,855 | 1,834 | 3,951 | 8,513 |
| **6,18** | 38,19 | 236,0 | 2,486 | 7,861 | 1,835 | 3,954 | 8,518 |
| **6,19** | 38,32 | 237,2 | 2,488 | 7,868 | 1,836 | 3,956 | 8,522 |
| **6,20** | 38,44 | 238,3 | 2,490 | 7,874 | 1,837 | 3,958 | 8,527 |
| **6,21** | 38,56 | 239,5 | 2,492 | 7,880 | 1,838 | 3,960 | 8,532 |
| **6,22** | 38,69 | 240,6 | 2,494 | 7,887 | 1,839 | 3,962 | 8,536 |
| **6,23** | 38,81 | 241,8 | 2,496 | 7,893 | 1,840 | 3,964 | 8,541 |
| **6,24** | 38,94 | 243,0 | 2,498 | 7,899 | 1,841 | 3,966 | 8,545 |
| **6,25** | 39,06 | 244,1 | 2,500 | 7,906 | 1,842 | 3,969 | 8,550 |
| **6,26** | 39,19 | 245,3 | 2,502 | 7,912 | 1,843 | 3,971 | 8,554 |
| **6,27** | 39,31 | 246,5 | 2,504 | 7,918 | 1,844 | 3,973 | 8,559 |
| **6,28** | 39,44 | 247,7 | 2,506 | 7,925 | 1,845 | 3,975 | 8,564 |
| **6,29** | 39,56 | 248,9 | 2,508 | 7,931 | 1,846 | 3,977 | 8,568 |
| **6,30** | 39,69 | 250,0 | 2,510 | 7,937 | 1,847 | 3,979 | 8,573 |
| **6,31** | 39,82 | 251,2 | 2,512 | 7,944 | 1,848 | 3,981 | 8,577 |
| **6,32** | 39,94 | 252,4 | 2,514 | 7,950 | 1,849 | 3,983 | 8,582 |
| **6,33** | 40,07 | 253,6 | 2,516 | 7,956 | 1,850 | 3,985 | 8,586 |
| **6,34** | 40,20 | 254,8 | 2,518 | 7,962 | 1,851 | 3,987 | 8,591 |
| **6,35** | 40,32 | 256,0 | 2,520 | 7,969 | 1,852 | 3,990 | 8,595 |
| **6,36** | 40,45 | 257,3 | 2,522 | 7,975 | 1,853 | 3,992 | 8,600 |
| **6,37** | 40,58 | 258,5 | 2,524 | 7,981 | 1,854 | 3,994 | 8,604 |
| **6,38** | 40,70 | 259,7 | 2,526 | 7,987 | 1,855 | 3,996 | 8,609 |
| **6,39** | 40,83 | 260,9 | 2,528 | 7,994 | 1,856 | 3,998 | 8,613 |
| **6,40** | 40,96 | 262,1 | 2,530 | 8,000 | 1,857 | 4,000 | 8,618 |

Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **6,40** | 40,96 | 262,1 | 2,530 | 8,000 | 1,857 | 4,000 | 8,618 |
| 6,41 | 41,09 | 263,4 | 2,532 | 8,006 | 1,858 | 4,002 | 8,622 |
| 6,42 | 41,22 | 264,6 | 2,534 | 8,012 | 1,859 | 4,004 | 8,627 |
| 6,43 | 41,34 | 265,8 | 2,536 | 8,019 | 1,860 | 4,006 | 8,631 |
| 6,44 | 41,47 | 267,1 | 2,538 | 8,025 | 1,860 | 4,008 | 8,636 |
| **6,45** | 41,60 | 268,3 | 2,540 | 8,031 | 1,861 | 4,010 | 8,640 |
| 6,46 | 41,73 | 269,6 | 2,542 | 8,037 | 1,862 | 4,012 | 8,645 |
| 6,47 | 41,86 | 270,8 | 2,544 | 8,044 | 1,863 | 4,015 | 8,649 |
| 6,48 | 41,99 | 272,1 | 2,546 | 8,050 | 1,864 | 4,017 | 8,653 |
| 6,49 | 42,12 | 273,4 | 2,548 | 8,056 | 1,865 | 4,019 | 8,658 |
| **6,50** | 42,25 | 274,6 | 2,550 | 8,062 | 1,866 | 4,021 | 8,662 |
| 6,51 | 42,38 | 275,9 | 2,551 | 8,068 | 1,867 | 4,023 | 8,667 |
| 6,52 | 42,51 | 277,2 | 2,553 | 8,075 | 1,868 | 4,025 | 8,671 |
| 6,53 | 42,64 | 278,4 | 2,555 | 8,081 | 1,869 | 4,027 | 8,676 |
| 6,54 | 42,77 | 279,7 | 2,557 | 8,087 | 1,870 | 4,029 | 8,680 |
| **6,55** | 42,90 | 281,0 | 2,559 | 8,093 | 1,871 | 4,031 | 8,685 |
| 6,56 | 43,03 | 282,3 | 2,561 | 8,099 | 1,872 | 4,033 | 8,689 |
| 6 57 | 43,16 | 283,6 | 2,563 | 8,106 | 1,873 | 4,035 | 8,693 |
| 6,58 | 43,30 | 284,9 | 2,565 | 8,112 | 1,874 | 4,037 | 8,698 |
| 6,59 | 43,43 | 286,2 | 2,567 | 8,118 | 1,875 | 4,039 | 8,702 |
| **6,60** | 43,56 | 287,5 | 2,569 | 8,124 | 1,876 | 4,041 | 8,707 |
| 6,61 | 43,69 | 288,8 | 2,571 | 8,130 | 1,877 | 4,043 | 8,711 |
| 6,62 | 43,82 | 290,1 | 2,573 | 8,136 | 1,878 | 4,045 | 8,715 |
| 6,63 | 43,96 | 291,4 | 2,575 | 8,142 | 1,879 | 4,047 | 8,720 |
| 6,64 | 44,09 | 292,8 | 2,577 | 8,149 | 1,880 | 4,049 | 8,724 |
| **6,65** | 44 22 | 294,1 | 2,579 | 8,155 | 1,881 | 4,051 | 8,729 |
| 6,66 | 44,36 | 295,4 | 2,581 | 8,161 | 1,881 | 4,053 | 8,733 |
| 6,67 | 44,49 | 296,7 | 2,583 | 8,167 | 1,882 | 4,055 | 8,737 |
| 6,68 | 44,62 | 298,1 | 2,585 | 8,173 | 1,883 | 4,058 | 8,742 |
| 6,69 | 44,76 | 299,4 | 2,587 | 8,179 | 1,884 | 4,060 | 8,746 |
| **6,70** | 44,89 | 300,8 | 2,588 | 8,185 | 1,885 | 4,062 | 8,750 |
| 6,71 | 45,02 | 302,1 | 2,590 | 8,191 | 1,886 | 4,064 | 8,755 |
| 6,72 | 45,16 | 303,5 | 2,592 | 8,198 | 1,887 | 4,066 | 8,759 |
| 6,73 | 45,29 | 304,8 | 2,594 | 8,204 | 1,888 | 4,068 | 8,763 |
| 6,74 | 45,43 | 306,2 | 2,596 | 8,210 | 1,889 | 4,070 | 8,768 |
| **6,75** | 45,56 | 307,5 | 2,598 | 8,216 | 1,890 | 4,072 | 8,772 |
| 6,76 | 45,70 | 308,9 | 2,600 | 8,222 | 1,891 | 4,074 | 8,776 |
| 6,77 | 45,83 | 310,3 | 2,602 | 8,228 | 1,892 | 4,076 | 8,781 |
| 6,78 | 45,97 | 311,7 | 2,604 | 8,234 | 1,893 | 4,078 | 8,785 |
| 6,79 | 46,10 | 313,0 | 2,606 | 8,240 | 1,894 | 4,080 | 8,789 |
| **6,80** | 46,24 | 314,4 | 2,608 | 8,246 | 1,895 | 4,082 | 8,794 |
| 6,81 | 46,38 | 315,8 | 2,610 | 8,252 | 1,895 | 4,084 | 8,798 |
| 6,82 | 46,51 | 317,2 | 2,612 | 8,258 | 1,896 | 4,086 | 8,802 |
| 6,83 | 46,65 | 318,6 | 2,613 | 8,264 | 1,897 | 4,088 | 8,807 |
| 6,84 | 46,79 | 320,0 | 2,615 | 8,270 | 1,898 | 4,090 | 8,811 |
| **6,85** | 46,92 | 321,4 | 2,617 | 8,276 | 1,899 | 4,092 | 8,815 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **6,85** | 46,92 | 321,4 | 2,617 | 8,276 | 1,899 | 4,092 | 8,815 |
| 6,86 | 47,06 | 322,8 | 2,619 | 8,283 | 1,900 | 4,094 | 8,819 |
| 6,87 | 47,20 | 324,2 | 2,621 | 8,289 | 1,901 | 4,096 | 8,824 |
| 6,88 | 47,33 | 325,7 | 2,623 | 8,295 | 1,902 | 4,098 | 8,828 |
| 6,89 | 47,47 | 327,1 | 2,625 | 8,301 | 1,903 | 4,100 | 8,832 |
| **6,90** | 47,61 | 328 5 | 2 627 | 8,307 | 1,904 | 4,102 | 8,837 |
| 6,91 | 47,75 | 329,9 | 2,629 | 8,313 | 1,905 | 4,104 | 8,841 |
| 6,92 | 47,89 | 331,4 | 2,631 | 8,319 | 1,906 | 4,106 | 8,845 |
| 6,93 | 48,02 | 332,8 | 2,632 | 8,325 | 1,907 | 4,108 | 8,849 |
| 6,94 | 48,16 | 334,3 | 2,634 | 8,331 | 1,907 | 4,109 | 8,854 |
| **6,95** | 48,30 | 335,7 | 2,636 | 8,337 | 1,908 | 4,111 | 8,858 |
| 6,96 | 48,44 | 337,2 | 2,638 | 8,343 | 1,909 | 4,113 | 8,862 |
| 6,97 | 48,58 | 338,6 | 2,640 | 8,349 | 1,910 | 4,115 | 8,866 |
| 6,98 | 48,72 | 340,1 | 2,642 | 8,355 | 1,911 | 4,117 | 8,871 |
| 6,99 | 48,86 | 341,5 | 2,644 | 8,361 | 1,912 | 4,119 | 8,875 |
| **7,00** | 49,00 | 343,0 | 2,646 | 8,367 | 1,913 | 4,121 | 8,879 |
| 7,01 | 49,14 | 344,5 | 2,648 | 8,373 | 1,914 | 4,123 | 8,883 |
| 7,02 | 49,28 | 345,9 | 2,650 | 8,379 | 1,915 | 4,125 | 8,887 |
| 7,03 | 49,42 | 347,4 | 2,651 | 8,385 | 1,916 | 4,127 | 8,892 |
| 7,04 | 49,56 | 348,9 | 2,653 | 8,390 | 1,917 | 4,129 | 8,896 |
| **7,05** | 49,70 | 350,4 | 2,655 | 8,396 | 1,917 | 4,131 | 8,900 |
| 7,06 | 49,84 | 351,9 | 2,657 | 8,402 | 1,918 | 4,133 | 8,904 |
| 7,07 | 48,98 | 353,4 | 2,659 | 8,408 | 1,919 | 4,135 | 8,909 |
| 7,08 | 50,13 | 354,9 | 2,661 | 8,414 | 1,920 | 4,137 | 8,913 |
| 7,09 | 50,27 | 356,4 | 2,663 | 8,420 | 1,921 | 4,139 | 8,917 |
| **7,10** | 50,41 | 357,9 | 2,665 | 8,426 | 1,922 | 4,141 | 8,921 |
| 7,11 | 50,55 | 359,4 | 2,666 | 8,432 | 1,923 | 4,143 | 8,925 |
| 7,12 | 50,69 | 360,9 | 2,668 | 8,438 | 1,924 | 4,145 | 8,929 |
| 7,13 | 50,84 | 362,5 | 2,670 | 8,444 | 1,925 | 4,147 | 8,934 |
| 7,14 | 50,98 | 364,0 | 2,672 | 8,450 | 1,926 | 4,149 | 8,938 |
| **7,15** | 51,12 | 365,5 | 2,674 | 8,456 | 1,926 | 4,151 | 8,942 |
| 7,16 | 51,27 | 367,1 | 2,676 | 8,462 | 1,927 | 4,152 | 8,946 |
| 7,17 | 51,41 | 368,6 | 2,678 | 8,468 | 1,928 | 4,154 | 8,950 |
| 7,18 | 51,55 | 370,1 | 2,680 | 8,473 | 1,929 | 4,156 | 8,955 |
| 7,19 | 51,70 | 371,7 | 2,681 | 8,479 | 1,930 | 4,158 | 8,959 |
| **7,20** | 51,84 | 373,2 | 2,683 | 8,485 | 1,931 | 4,160 | 8,963 |
| 7,21 | 51,98 | 374,8 | 2,685 | 8,491 | 1,932 | 4,162 | 8,967 |
| 7,22 | 52,13 | 376,4 | 2,687 | 8,497 | 1,933 | 4,164 | 8,971 |
| 7,23 | 52,27 | 377,9 | 2,689 | 8,503 | 1,934 | 4,166 | 8,975 |
| 7,24 | 52,42 | 379,5 | 2,691 | 8,509 | 1,935 | 4,168 | 8,979 |
| **7,25** | 52,56 | 381,1 | 2,693 | 8,515 | 1,935 | 4,170 | 8,984 |
| 7,26 | 52,71 | 382,7 | 2,694 | 8,521 | 1,936 | 4,172 | 8,988 |
| 7,27 | 52,85 | 384,2 | 2,696 | 8,526 | 1,937 | 4,174 | 8,992 |
| 7,28 | 53,00 | 385,8 | 2,698 | 8,532 | 1,938 | 4,176 | 8,996 |
| 7,29 | 53,14 | 387,4 | 2,700 | 8,538 | 1,939 | 4,177 | 9,000 |
| **7,30** | 53,29 | 389,0 | 2,702 | 8,544 | 1,940 | 4,179 | 9,004 |

Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **7,30** | 53,29 | 389,0 | 2,702 | 8,544 | 1,940 | 4,179 | 9,004 |
| 7,31 | 53,44 | 390,6 | 2,704 | 8,550 | 1,941 | 4,181 | 9,008 |
| 7,32 | 53,58 | 392,2 | 2,706 | 8,556 | 1,942 | 4,183 | 9,012 |
| 7,33 | 53,73 | 393,8 | 2,707 | 8,562 | 1,943 | 4,185 | 9,016 |
| 7,34 | 53,88 | 395,4 | 2,709 | 8,567 | 1,943 | 4,187 | 9,021 |
| 7,35 | 54,02 | 397,1 | 2,711 | 8,573 | 1,944 | 4,189 | 9,025 |
| 7,36 | 54,17 | 398,7 | 2,713 | 8,579 | 1,945 | 4,191 | 9,029 |
| 7,37 | 54,32 | 400,3 | 2,715 | 8,585 | 1,946 | 4,193 | 9,033 |
| 7,38 | 54,46 | 401,9 | 2,717 | 8,591 | 1,947 | 4,195 | 9,037 |
| 7,39 | 54,61 | 403,6 | 2,718 | 8,597 | 1,948 | 4,196 | 9,041 |
| **7,40** | 54,76 | 405,2 | 2,720 | 8,602 | 1,949 | 4,198 | 9,045 |
| 7,41 | 54,91 | 406,9 | 2,722 | 8,608 | 1,950 | 4,200 | 9,049 |
| 7,42 | 55,06 | 408,5 | 2,724 | 8,614 | 1,950 | 4,202 | 9,053 |
| 7,43 | 55,20 | 410,2 | 2,726 | 8,620 | 1,951 | 4,204 | 9,057 |
| 7,44 | 55,35 | 411,8 | 2,728 | 8,626 | 1,952 | 4,206 | 9,061 |
| 7,45 | 55,50 | 413,5 | 2,729 | 8,631 | 1,953 | 4,208 | 9,065 |
| 7,46 | 55,65 | 415,2 | 2,731 | 8,637 | 1,954 | 4,210 | 9,069 |
| 7,47 | 55,80 | 416,8 | 2,733 | 8,643 | 1,955 | 4,212 | 9,073 |
| 7,48 | 55,95 | 418,5 | 2,735 | 8,649 | 1,956 | 4,213 | 9,078 |
| 7,49 | 56,10 | 420,2 | 2,737 | 8,654 | 1,957 | 4,215 | 9,082 |
| **7,50** | 56,25 | 421,9 | 2,739 | 8,660 | 1,957 | 4,217 | 9,086 |
| 7,51 | 56,40 | 423,6 | 2,740 | 8,666 | 1,958 | 4,219 | 9,090 |
| 7,52 | 56,55 | 425,3 | 2,742 | 8,672 | 1,959 | 4,221 | 9,094 |
| 7,53 | 56,70 | 427,0 | 2,744 | 8,678 | 1,960 | 4,223 | 9,098 |
| 7,54 | 56,85 | 428,7 | 2,746 | 8,683 | 1,961 | 4,225 | 9,102 |
| 7,55 | 57,00 | 430,4 | 2,748 | 8,689 | 1,962 | 4,227 | 9,106 |
| 7,56 | 57,15 | 432,1 | 2,750 | 8,695 | 1,963 | 4,228 | 9,110 |
| 7,57 | 57,30 | 433,8 | 2,751 | 8,701 | 1,964 | 4,230 | 9,114 |
| 7,58 | 57,46 | 435,5 | 2,753 | 8,706 | 1,964 | 4,232 | 9,118 |
| 7,59 | 57,61 | 437,2 | 2,755 | 8,712 | 1,965 | 4,234 | 9,122 |
| **7,60** | 57,76 | 439,0 | 2,757 | 8,718 | 1,966 | 4,236 | 9,126 |
| 7,61 | 57,91 | 440,7 | 2,759 | 8,724 | 1,967 | 4,238 | 9,130 |
| 7,62 | 58,06 | 442,5 | 2,760 | 8,729 | 1,968 | 4,240 | 9,134 |
| 7,63 | 58,22 | 444,2 | 2,762 | 8,735 | 1,969 | 4,241 | 9,138 |
| 7,64 | 58,37 | 445,9 | 2,764 | 8,741 | 1,970 | 4,243 | 9,142 |
| 7,65 | 58,52 | 447,7 | 2,766 | 8,746 | 1,970 | 4,245 | 9,146 |
| 7,66 | 58,68 | 449,5 | 2,768 | 8,752 | 1,971 | 4,247 | 9,150 |
| 7,67 | 58,83 | 451,2 | 2,769 | 8,758 | 1,972 | 4,249 | 9,154 |
| 7,68 | 58,98 | 453,0 | 2,771 | 8,764 | 1,973 | 4,251 | 9,158 |
| 7,69 | 59,14 | 454,8 | 2,773 | 8,769 | 1,974 | 4,252 | 9,162 |
| **7,70** | 59,29 | 456,5 | 2,775 | 8,775 | 1,975 | 4,254 | 9,166 |
| 7,71 | 59,44 | 458,3 | 2,777 | 8,781 | 1,976 | 4,256 | 9,170 |
| 7,72 | 59,60 | 460,1 | 2,778 | 8,786 | 1,976 | 4,258 | 9,174 |
| 7,73 | 59,75 | 461,9 | 2,780 | 8,792 | 1,977 | 4,260 | 9,178 |
| 7,74 | 59,91 | 463,7 | 2,782 | 8,798 | 1,978 | 4,262 | 9,182 |
| 7,75 | 60,06 | 465,5 | 2,784 | 8,803 | 1,979 | 4,264 | 9,185 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{110n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **7,75** | 60,06 | 465,5 | 2,784 | 8,803 | 1,979 | 4,264 | 9,185 |
| 7,76 | 60,22 | 467,3 | 2,786 | 8,809 | 1,980 | 4,265 | 9,189 |
| 7,77 | 60,37 | 469,1 | 2,787 | 8,815 | 1,981 | 4,267 | 9,193 |
| 7,78 | 60,53 | 470,9 | 2,789 | 8,820 | 1,981 | 4,269 | 9,197 |
| 7,79 | 60,68 | 472,7 | 2,791 | 8,826 | 1,982 | 4,271 | 9,201 |
| **7,80** | 60,84 | 474,6 | 2,793 | 8,832 | 1,983 | 4,273 | 9,205 |
| 7,81 | 61,00 | 476,4 | 2,795 | 8,837 | 1,984 | 4,274 | 9,209 |
| 7,82 | 61,15 | 478,2 | 2,796 | 8,843 | 1,985 | 4,276 | 9,213 |
| 7,83 | 61,31 | 480,0 | 2,798 | 8,849 | 1,986 | 4,278 | 9,217 |
| 7,84 | 61,47 | 481,9 | 2,800 | 8,854 | 1,987 | 4,280 | 9,221 |
| **7,85** | 61,62 | 483,7 | 2,802 | 8,860 | 1,987 | 4,282 | 9,225 |
| 7,86 | 61,78 | 485,6 | 2,804 | 8,866 | 1,988 | 4,284 | 9,229 |
| 7,87 | 61,94 | 487,4 | 2,805 | 8,871 | 1,989 | 4,285 | 9,233 |
| 7,88 | 62,09 | 489,3 | 2,807 | 8,877 | 1,990 | 4,287 | 9,237 |
| 7,89 | 62,25 | 491,2 | 2,809 | 8,883 | 1,991 | 4,289 | 9,240 |
| **7,90** | 62,41 | 493,0 | 2,811 | 8,888 | 1,992 | 4,291 | 9,244 |
| 7,91 | 62,57 | 494,9 | 2,812 | 8,894 | 1,992 | 4,293 | 9,248 |
| 7,92 | 62,73 | 496,8 | 2,814 | 8,899 | 1,993 | 4,294 | 9,252 |
| 7,93 | 62,88 | 498,7 | 2,816 | 8,905 | 1,994 | 4,296 | 9,256 |
| 7,94 | 63,04 | 500,6 | 2,818 | 8,911 | 1,995 | 4,298 | 9,260 |
| **7,95** | 63,20 | 502,5 | 2,820 | 8,916 | 1,996 | 4,300 | 8,264 |
| 7,96 | 63,36 | 504,4 | 2,821 | 8,922 | 1,997 | 4,302 | 9,268 |
| 7,97 | 63,52 | 506,3 | 2,823 | 8,927 | 1,997 | 4,303 | 9,272 |
| 7,98 | 63,68 | 508,2 | 2,825 | 8,933 | 1,998 | 4,305 | 9,275 |
| 7,99 | 63,84 | 510.1 | 2,827 | 8,939 | 1,999 | 4,307 | 9,279 |
| **8,00** | 64,00 | 512,0 | 2,828 | 8,944 | 2,000 | 4,309 | 9,283 |
| 8,01 | 64,16 | 513,9 | 2,830 | 8,950 | 2,001 | 4,311 | 9,287 |
| 8,02 | 64,32 | 515,8 | 2,832 | 8,955 | 2,002 | 4,312 | 9,291 |
| 8,03 | 64,48 | 517,8 | 2,834 | 8,961 | 2,002 | 4,314 | 9,295 |
| 8,04 | 64,64 | 519,7 | 2,835 | 8,967 | 2,003 | 4,316 | 9,299 |
| **8,05** | 64,80 | 521,7 | 2,837 | 8,972 | 2,004 | 4,318 | 9,302 |
| 8,06 | 64,96 | 523,6 | 2,839 | 8,978 | 2,005 | 4,320 | 9,306 |
| 8,07 | 65,12 | 525,6 | 2,841 | 8,983 | 2,006 | 4,321 | 9,310 |
| 8,08 | 65,29 | 527,5 | 2,843 | 8,989 | 2,007 | 4,323 | 9,314 |
| 8,09 | 65,45 | 529,5 | 2,844 | 8,994 | 2,007 | 4,325 | 9,318 |
| **8,10** | 65,61 | 531,4 | 2,846 | 9,000 | 2,008 | 4,327 | 9,322 |
| 8,11 | 65,77 | 533,4 | 2,848 | 9,006 | 2,009 | 4,329 | 9,326 |
| 8,12 | 65,93 | 535,4 | 2,850 | 9,011 | 2,010 | 4,330 | 9,329 |
| 8,13 | 66,10 | 537,4 | 2,851 | 9,017 | 2,011 | 4,332 | 9,333 |
| 8,14 | 66,26 | 539,4 | 2,853 | 9,022 | 2,012 | 4,334 | 9,337 |
| **8,15** | 66,42 | 541,3 | 2,855 | 9,028 | 2,012 | 4,336 | 9,341 |
| 8,16 | 66,59 | 543.3 | 2,857 | 9,033 | 2,013 | 4,337 | 9,345 |
| 8,17 | 66,75 | 545,3 | 2,858 | 9,039 | 2,014 | 4,339 | 9,348 |
| 8,18 | 66,91 | 547,3 | 2,860 | 9,044 | 2,015 | 4,341 | 9,352 |
| 8,19 | 67,08 | 549,4 | 2,862 | 9,050 | 2,016 | 4,343 | 9,356 |
| **8,20** | 67,24 | 551,4 | 2,864 | 9,055 | 2,017 | 4,344 | 9,360 |

Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **8,20** | 67,24 | 551,4 | 2,864 | 9,055 | 2,017 | 4,344 | 9,360 |
| 8,21 | 67,40 | 553,4 | 2,865 | 9,061 | 2,017 | 4,346 | 9,364 |
| 8,22 | 67,57 | 555,4 | 2,867 | 9,066 | 2,018 | 4,348 | 9,368 |
| 8,23 | 67,73 | 557,4 | 2,869 | 9,072 | 2,019 | 4,350 | 9,371 |
| 8,24 | 67,90 | 559,5 | 2,871 | 9,077 | 2,020 | 4,352 | 9,375 |
| **8,25** | 68,06 | 561,5 | 2,872 | 9,083 | 2,021 | 4,353 | 9,379 |
| 8,26 | 68,23 | 563,6 | 2,874 | 9,088 | 2,021 | 4,355 | 9,383 |
| 8,27 | 68,39 | 565,6 | 2,876 | 9,094 | 2,022 | 4,357 | 9,386 |
| 8,28 | 68,56 | 567,7 | 2,877 | 9,099 | 2,023 | 4,359 | 9,390 |
| 8,29 | 68,72 | 569,7 | 2,879 | 9,105 | 2,024 | 4,360 | 9,394 |
| **8,30** | 68,89 | 571,8 | 2,881 | 9,110 | 2,025 | 4,362 | 9,398 |
| 8,31 | 69,06 | 573,9 | 2,883 | 9,116 | 2,026 | 4,364 | 9,402 |
| 8,32 | 69,22 | 575,9 | 2,884 | 9,121 | 2,026 | 5,366 | 9,405 |
| 8,33 | 69,39 | 578,0 | 2,886 | 9,127 | 2,027 | 4,367 | 9,409 |
| 8,34 | 69,56 | 580,1 | 2,888 | 9,132 | 2,028 | 4,369 | 9,413 |
| **8,35** | 69,72 | 582,2 | 2,890 | 9,138 | 2,029 | 4,371 | 9,417 |
| 8,36 | 69,89 | 584,3 | 2,891 | 9,143 | 2,030 | 4,373 | 9,420 |
| 8,37 | 70,06 | 586,4 | 2,893 | 9,149 | 2,030 | 4,374 | 9,424 |
| 8,38 | 70,22 | 588,5 | 2,895 | 9,154 | 2,031 | 4,376 | 9,428 |
| 8,39 | 70,39 | 590,6 | 2,897 | 9,160 | 2,032 | 4,378 | 9,432 |
| **8,40** | 70,56 | 592,7 | 2,898 | 9,165 | 2,033 | 4,380 | 9,435 |
| 8,41 | 70,73 | 594,8 | 2,900 | 9,171 | 2,034 | 4,381 | 9,439 |
| 8,42 | 70,90 | 596,9 | 2,902 | 9,176 | 2,034 | 4,383 | 9,443 |
| 8,43 | 71,06 | 599,1 | 2,903 | 9,182 | 2,035 | 4,385 | 9,447 |
| 8,44 | 71,23 | 601,2 | 2,905 | 9,187 | 2,036 | 5,386 | 9,450 |
| **8,45** | 71,40 | 603,4 | 2,907 | 9,192 | 2,037 | 4,388 | 9,454 |
| 8,46 | 71,57 | 605,5 | 2,909 | 9,198 | 2,038 | 4,390 | 9,458 |
| 8,47 | 71,74 | 607,6 | 2,910 | 9,203 | 2,038 | 4,392 | 9,462 |
| 8,48 | 71,91 | 609,8 | 2,912 | 9,209 | 2,039 | 4,393 | 9,465 |
| 8,49 | 72,08 | 612,0 | 2,914 | 9,214 | 2,040 | 4,395 | 9,469 |
| **8,50** | 72,25 | 614,1 | 2,915 | 9,220 | 2,041 | 4,397 | 9,473 |
| 8,51 | 72,42 | 616,3 | 2,917 | 9,225 | 2,042 | 4,399 | 9,476 |
| 8,52 | 72,59 | 618,5 | 2,919 | 9,230 | 2,042 | 4,400 | 9,480 |
| 9,53 | 72,76 | 620,7 | 2,921 | 9,236 | 2,043 | 4,402 | 9,484 |
| 8,54 | 72,93 | 622,8 | 2,922 | 9,241 | 2,044 | 4,404 | 9,488 |
| **8,55** | 73,10 | 625,0 | 2,924 | 9,247 | 2,045 | 4,405 | 9,491 |
| 8,56 | 73,27 | 627,2 | 2,926 | 9,252 | 2,046 | 4,407 | 9,495 |
| 8,57 | 73,44 | 629,4 | 2,927 | 9,257 | 2,046 | 4,409 | 9,499 |
| 8,58 | 73,62 | 631,6 | 2,929 | 9,263 | 2,047 | 4,411 | 9,502 |
| 8,59 | 73,79 | 633,8 | 2,931 | 9,268 | 2,048 | 4,412 | 9,506 |
| **8,60** | 73,96 | 636,1 | 2,933 | 9,274 | 2,049 | 4,414 | 9,510 |
| 8,61 | 74,13 | 638,3 | 2,934 | 9,279 | 2,050 | 4,416 | 9,513 |
| 8,62 | 74,30 | 640,5 | 2,936 | 9,284 | 2,050 | 4,417 | 9,517 |
| 8,63 | 74,48 | 642,7 | 2,938 | 9,290 | 2,051 | 4,419 | 9,521 |
| 8,64 | 74,65 | 645,0 | 2,939 | 9,295 | 2,052 | 4,421 | 9,524 |
| **8,65** | 74,82 | 647,2 | 2,941 | 9,301 | 2,053 | 4,423 | 9,528 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **8,65** | 74,82 | 647,2 | 2,941 | 9,301 | 2,053 | 4,423 | 9,528 |
| 8,66 | 75,00 | 649,5 | 2,943 | 9,306 | 2,054 | 4,424 | 9,532 |
| 8,67 | 75,17 | 651,7 | 2,944 | 9,311 | 2,054 | 4,426 | 9,535 |
| 8,68 | 75,34 | 654,0 | 2,946 | 9,317 | 2,055 | 4,428 | 9,539 |
| 8,69 | 75,52 | 656,2 | 2,948 | 9,322 | 2,056 | 4,429 | 9,543 |
| **8,70** | 75,69 | 658,5 | 2,950 | 9,327 | 2,057 | 4,431 | 9,546 |
| 8,71 | 75,86 | 660,8 | 2,951 | 9,333 | 2,057 | 4,433 | 9,550 |
| 8,72 | 76,04 | 663,1 | 2,953 | 9,338 | 2,058 | 4,434 | 9,554 |
| 8,73 | 76,21 | 665,3 | 2,955 | 9,343 | 2,059 | 4,436 | 9,557 |
| 8,74 | 76,39 | 667,6 | 2,956 | 9,349 | 2,060 | 4,438 | 9,561 |
| **8,75** | 76,56 | 669,9 | 2,958 | 9,354 | 2,061 | 4,440 | 9,565 |
| 8,76 | 76,74 | 672,2 | 2,960 | 9,359 | 2,061 | 4,441 | 9,568 |
| 8,77 | 76,91 | 674,5 | 2,961 | 9,365 | 2,062 | 4,443 | 9,572 |
| 8,78 | 77,09 | 676,8 | 2,963 | 9,370 | 2,063 | 4,445 | 9,576 |
| 8,79 | 77,26 | 679,2 | 2,965 | 9,375 | 2,064 | 4,446 | 9,579 |
| **8,80** | 77,44 | 681,5 | 2,966 | 9,381 | 2,065 | 4,448 | 9,583 |
| 8,81 | 77,62 | 683,8 | 2,968 | 9,386 | 2,065 | 4,450 | 9,586 |
| 8,82 | 77,79 | 686,1 | 2,970 | 9,391 | 2,066 | 4,451 | 9,590 |
| 8,83 | 77,97 | 688,5 | 2,972 | 9,397 | 2,067 | 4,453 | 9,594 |
| 8,84 | 78,15 | 690,8 | 2,973 | 9,402 | 2,068 | 4,455 | 9,597 |
| **8,85** | 78,32 | 693,2 | 2,975 | 9,407 | 2,068 | 4,456 | 9,601 |
| 8,86 | 78,50 | 695,5 | 2,977 | 9,413 | 2,069 | 4,458 | 9,605 |
| 8,87 | 78,68 | 697,9 | 2,978 | 9,418 | 2,070 | 4,460 | 9,608 |
| 8,88 | 78,85 | 700,2 | 2,980 | 9,423 | 2,071 | 4,461 | 9,612 |
| 8,89 | 79,03 | 702,6 | 2,982 | 9,429 | 2,072 | 4,463 | 9,615 |
| **8,90** | 79,21 | 705,0 | 2,983 | 9,434 | 2,072 | 4,465 | 9,619 |
| 8,91 | 79,39 | 707,3 | 2,985 | 9,439 | 2,073 | 4,466 | 9,623 |
| 8,92 | 79,57 | 709,7 | 2,987 | 9,445 | 2,074 | 4,468 | 9,626 |
| 8,93 | 79,74 | 712,1 | 2,988 | 9,450 | 2,075 | 4,470 | 9,630 |
| 8,94 | 79,92 | 714,5 | 2,990 | 9,455 | 2,075 | 4,471 | 9,633 |
| **8,95** | 80,10 | 716,9 | 2,992 | 9,460 | 2,076 | 4,473 | 9,637 |
| 8,96 | 80,28 | 719,3 | 2,993 | 9,466 | 2,077 | 4,475 | 9,641 |
| 8,97 | 80,46 | 721,7 | 2,995 | 9,471 | 2,078 | 4,476 | 9,644 |
| 8,98 | 80,64 | 724,2 | 2,997 | 9,476 | 2,079 | 4,478 | 9,648 |
| 8,99 | 80,82 | 726,6 | 2,998 | 9,482 | 2,079 | 4,480 | 9,651 |
| **9,00** | 81,00 | 729,0 | 3,000 | 9,487 | 2,080 | 4,481 | 9,655 |
| 9,01 | 81,18 | 731,4 | 3,002 | 9,492 | 2,081 | 4,483 | 9,658 |
| 9,02 | 81,36 | 733,9 | 3,003 | 9,497 | 2,082 | 4,485 | 9,662 |
| 9,03 | 81,54 | 736,3 | 3,005 | 9,503 | 2,082 | 4,486 | 9,666 |
| 9,04 | 81,72 | 738,8 | 3,007 | 9,508 | 2,083 | 4,488 | 9,669 |
| **9,05** | 81,90 | 741,2 | 3,008 | 9,513 | 2,084 | 4,490 | 9,673 |
| 9,06 | 82,08 | 743,7 | 3,010 | 9,518 | 2,085 | 4,491 | 9,676 |
| 9,07 | 82,26 | 746,1 | 3,012 | 9,524 | 2,085 | 4,493 | 9,680 |
| 9,08 | 82,45 | 748,6 | 3,013 | 9,529 | 2,086 | 4,495 | 9,683 |
| 9,09 | 82,63 | 751,1 | 3,015 | 9,534 | 2,087 | 4,496 | 9,687 |
| **9,10** | 82,81 | 753,6 | 3,017 | 9,539 | 2,088 | 4,498 | 9,691 |

Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **9,10** | 82,81 | 753,6 | 3,017 | 9,539 | 2,088 | 4,498 | 9,691 |
| 9,11 | 82,99 | 756,1 | 3,018 | 9,545 | 2,089 | 4,500 | 9,694 |
| 9,12 | 83,17 | 758,6 | 3,020 | 9,550 | 2,089 | 4,501 | 9,698 |
| 9,13 | 83,36 | 761,0 | 3,022 | 9,555 | 2,090 | 4,503 | 9,701 |
| 9,14 | 83,54 | 763,6 | 3,023 | 9,560 | 2,091 | 4,505 | 9,705 |
| **9,15** | 83,72 | 766,1 | 3,025 | 9,566 | 2,092 | 4,506 | 9,708 |
| 9,16 | 83,91 | 768,6 | 3,027 | 0,571 | 2,092 | 4,508 | 9 712 |
| 9,17 | 84,09 | 771,1 | 3,028 | 9,576 | 2,093 | 4,509 | 9,715 |
| 9,18 | 84,27 | 773,6 | 3,030 | 9,581 | 2,094 | 4,511 | 9,719 |
| 9,19 | 84,46 | 776,2 | 3,032 | 9,586 | 2,095 | 4,513 | 9,722 |
| **9,20** | 84,64 | 778,7 | 3,033 | 9,592 | 2,095 | 4,514 | 9,726 |
| 9,21 | 84,82 | 781,2 | 3,035 | 9,597 | 2,096 | 4,516 | 9,729 |
| 9,22 | 85,01 | 783,8 | 3,036 | 9,602 | 2,097 | 4,518 | 9,733 |
| 9,23 | 85,19 | 786,3 | 3,038 | 9,607 | 2,098 | 4,519 | 9,736 |
| 9,24 | 85,38 | 788,9 | 3,040 | 9,612 | 2,098 | 4,521 | 9,740 |
| **9,25** | 85,56 | 791,5 | 3,041 | 9,618 | 2,099 | 4,523 | 9,743 |
| 9,26 | 85,75 | 794,0 | 3,043 | 9,623 | 2,100 | 4,524 | 9,747 |
| 9,27 | 85,93 | 796,6 | 3,045 | 9,628 | 2,101 | 4,526 | 9,750 |
| 9,28 | 86,12 | 799,2 | 3,046 | 9,633 | 2,101 | 4,527 | 9,754 |
| 9,29 | 86,30 | 801,8 | 3,048 | 9,638 | 2,102 | 4,529 | 9,758 |
| **9,30** | 86,49 | 804,4 | 3,050 | 9,644 | 2,103 | 4,531 | 9,761 |
| 9,31 | 86,68 | 807,0 | 3,051 | 9,649 | 2,104 | 4,532 | 9,764 |
| 9,32 | 86,86 | 809,6 | 3,053 | 9,654 | 2,104 | 4,534 | 9,768 |
| 9,33 | 87,05 | 812,2 | 3,055 | 9,659 | 2,105 | 4,536 | 9,771 |
| 9,34 | 87,24 | 814,8 | 3,056 | 9,664 | 2,106 | 4,537 | 9,775 |
| **9,35** | 87,42 | 817,4 | 3,058 | 9,670 | 2,107 | 4,539 | 9,778 |
| 9,36 | 87,61 | 820,0 | 3,059 | 9,675 | 2,107 | 4,540 | 9,782 |
| 9,37 | 87,80 | 822,7 | 3,061 | 9,680 | 2,108 | 4,542 | 9,785 |
| 9,38 | 87,98 | 825,3 | 3,063 | 9,685 | 2,109 | 4,544 | 9,789 |
| 9,39 | 88,17 | 827,9 | 3,064 | 9,690 | 2,110 | 4,545 | 9,792 |
| **9,40** | 88,36 | 830,6 | 3,066 | 9,695 | 2,110 | 4,547 | 9,796 |
| 9,41 | 88,55 | 833,2 | 3,068 | 9,701 | 2,111 | 4,548 | 9,799 |
| 9,42 | 88,74 | 835,9 | 3,069 | 9,706 | 2,112 | 4,550 | 9,803 |
| 9,43 | 88,92 | 838,6 | 3,071 | 9,711 | 2,113 | 4,552 | 9,806 |
| 9,44 | 89,11 | 841,2 | 3,072 | 9,716 | 2,113 | 4,553 | 9,810 |
| **9,45** | 89,30 | 843,9 | 3,074 | 9,721 | 2,114 | 4,555 | 9,813 |
| 9,46 | 89,49 | 846,6 | 3,076 | 9,726 | 2,115 | 4,556 | 9,817 |
| 9,47 | 89,68 | 849,3 | 3,077 | 9,731 | 2,116 | 4,558 | 9,820 |
| 9,48 | 89,87 | 852,0 | 3,079 | 9,737 | 2,116 | 4,560 | 9,824 |
| 9,49 | 90,06 | 854,7 | 3,081 | 9,742 | 2,117 | 4,561 | 9,827 |
| **9,50** | 90,25 | 857,4 | 3,082 | 9,747 | 2,118 | 4,563 | 9,830 |
| 9,51 | 90,44 | 860,1 | 3,084 | 9,752 | 2,119 | 4,565 | 9,834 |
| 9,52 | 90,63 | 862,8 | 3,085 | 9,757 | 2,119 | 4,566 | 9,837 |
| 9,53 | 90,82 | 865,5 | 3,087 | 9,762 | 2,120 | 4,568 | 9,841 |
| 9,54 | 91,01 | 868,3 | 3,089 | 9,767 | 2,121 | 4,569 | 9,844 |
| **9,55** | 91,20 | 871,0 | 3,090 | 9,772 | 2,122 | 4,571 | 9,848 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{10n}$ | $\sqrt[3]{n}$ | $\sqrt[3]{10n}$ | $\sqrt[3]{100n}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **9,55** | 91,20 | 871,0 | 3,090 | 9,772 | 2,122 | 4,571 | 9,848 |
| **9,56** | 91,39 | 873,7 | 3,092 | 9,778 | 2,122 | 4,572 | 9,851 |
| **9,57** | 91,58 | 876,5 | 3,094 | 9,783 | 2,123 | 4,574 | 9,855 |
| **9,58** | 91,78 | 879,2 | 3,095 | 9,788 | 2,124 | 4,576 | 9,858 |
| **9,59** | 91,97 | 882,0 | 3,097 | 9,793 | 2,125 | 4,577 | 9,861 |
| **9,60** | 92,16 | 884,7 | 3,098 | 9,798 | 2,125 | 4,579 | 9,865 |
| **9,61** | 92,35 | 887,5 | 3,100 | 9,803 | 2,126 | 4,580 | 9,868 |
| **9,62** | 92,54 | 890,3 | 3,102 | 9,808 | 2,127 | 4,582 | 9,872 |
| **9,63** | 92,74 | 893,1 | 3,103 | 9,813 | 2,128 | 4,584 | 9,975 |
| **9,64** | 92,93 | 895,8 | 3,105 | 9,818 | 2,128 | 4,585 | 9,879 |
| **9,65** | 93,12 | 898,6 | 3,106 | 9,823 | 2,129 | 4,587 | 9,882 |
| **9,66** | 93,32 | 901,4 | 3,108 | 9,829 | 2,130 | 4,588 | 9,885 |
| **9,67** | 93,51 | 904,2 | 3,110 | 9,834 | 2,130 | 4,590 | 9,889 |
| **9,68** | 93,70 | 907,0 | 3,111 | 9,839 | 2,131 | 4,592 | 9,892 |
| **9,69** | 93,90 | 909,9 | 3,113 | 9,844 | 2,132 | 4,593 | 9,896 |
| **9,70** | 94,09 | 912,7 | 3,114 | 9,849 | 2,133 | 4,595 | 9,899 |
| **9,71** | 94,28 | 915,5 | 3,116 | 9,854 | 2,133 | 4,596 | 9,902 |
| **9,72** | 94,48 | 918,3 | 3,118 | 9,859 | 2,134 | 4,598 | 9,906 |
| **9,73** | 94,67 | 921,2 | 3,119 | 9,864 | 2,135 | 4,599 | 9,909 |
| **9,74** | 94,87 | 924,0 | 3,121 | 9,869 | 2,136 | 4,601 | 9,913 |
| **9,75** | 95,06 | 926,9 | 3,122 | 9,874 | 2,136 | 4,603 | 9,916 |
| **9,76** | 95,26 | 929,7 | 3,124 | 9,879 | 2,137 | 4,604 | 9,919 |
| **9,77** | 95,45 | 932,6 | 3,126 | 9,884 | 2,138 | 4,606 | 9,923 |
| **9,78** | 95,65 | 935,4 | 3,127 | 9,889 | 2,139 | 4,607 | 9,926 |
| **9,79** | 95,84 | 938,3 | 3,129 | 9,894 | 2,139 | 4,609 | 9,930 |
| **9,80** | 96,04 | 941,2 | 3,130 | 9,899 | 2,140 | 4,610 | 9,933 |
| **9,81** | 96,24 | 944,1 | 3,132 | 9,905 | 2,141 | 4,612 | 9,936 |
| **9,82** | 96,43 | 947,0 | 3,134 | 9,910 | 2,141 | 4,614 | 9,940 |
| **9,83** | 96,63 | 949,9 | 3,135 | 9,915 | 2,142 | 4,615 | 9,943 |
| **9,84** | 96,83 | 952,8 | 3,137 | 9,920 | 2,143 | 4,617 | 9,946 |
| **9,85** | 97,02 | 955,7 | 3,138 | 9,925 | 2,144 | 4,618 | 9,950 |
| **9,86** | 97,22 | 958,6 | 3,140 | 9,930 | 2,144 | 4,620 | 9,953 |
| **9,87** | 97,42 | 961,5 | 3,142 | 9,935 | 2,145 | 4,621 | 9,956 |
| **9,88** | 97,61 | 964,4 | 3,143 | 9,940 | 2,146 | 4,623 | 9,960 |
| **9,89** | 97,81 | 967,4 | 3,145 | 9,945 | 2,147 | 4,625 | 9,963 |
| **9,90** | 98,01 | 970,3 | 3,146 | 9,950 | 2,147 | 4,626 | 9,967 |
| **9,91** | 98,21 | 973,2 | 3,148 | 9,955 | 2,148 | 4,628 | 9,970 |
| **9,92** | 98,41 | 976,2 | 3,150 | 9,960 | 2,149 | 4,629 | 9,973 |
| **9,93** | 98,60 | 979,1 | 3,151 | 9,965 | 2,149 | 4,631 | 9,977 |
| **9,94** | 98,80 | 982,1 | 3,153 | 9,970 | 2,150 | 4,632 | 9,980 |
| **9,95** | 99,00 | 985,1 | 3,154 | 9,975 | 2,151 | 4,634 | 9,983 |
| **9,96** | 99,20 | 988,0 | 3,156 | 9,980 | 2,152 | 4,635 | 9,987 |
| **9,97** | 99,40 | 991,0 | 3,158 | 9,985 | 2,152 | 4,637 | 9,990 |
| **9,98** | 99,60 | 994,0 | 3,159 | 9,990 | 2,153 | 4,638 | 9,993 |
| **9,99** | 99,80 | 997,0 | 3,161 | 9,995 | 2,154 | 4,640 | 9,997 |
| **10,00** | 100,00 | 1000,0 | 3,162 | 10,000 | 2,154 | 4,642 | 10,000 |

Véase en la pág. 20 las explicaciones de la tabla.

## 3. *Potencias de los números enteros desde n=1 hasta n=100*

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $n^4$ | $n^5$ |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| 3 | 9 | 27 | 81 | 243 |
| 4 | 16 | 64 | 256 | 1 024 |
| **5** | 25 | 125 | 625 | 3 125 |
| 6 | 36 | 216 | 1 296 | 7 776 |
| 7 | 49 | 343 | 2 401 | 16 807 |
| 8 | 64 | 512 | 4 096 | 32 768 |
| 9 | 81 | 729 | 6 561 | 59 049 |
| **10** | 100 | 1 000 | 10 000 | 100 000 |
| 11 | 121 | 1 331 | 14 641 | 161 051 |
| 12 | 144 | 1 728 | 20 736 | 248 832 |
| 13 | 169 | 2 197 | 28 561 | 371 293 |
| 14 | 196 | 2 744 | 38 416 | 537 824 |
| **15** | 225 | 3 375 | 50 625 | 759 375 |
| 16 | 256 | 4 096 | 65 536 | 1 048 576 |
| 17 | 289 | 4 913 | 83 521 | 1 419 857 |
| 18 | 324 | 5 832 | 104 976 | 1 889 568 |
| 19 | 361 | 6 859 | 130 321 | 2 476 099 |
| **20** | 400 | 8 000 | 160 000 | 3 200 000 |
| 21 | 441 | 9 261 | 194 481 | 4 084 101 |
| 22 | 484 | 10 648 | 234 256 | 5 153 632 |
| 23 | 529 | 12 167 | 279 841 | 6 436 343 |
| 24 | 576 | 13 824 | 331 776 | 7 962 624 |
| **25** | 625 | 15 625 | 390 625 | 9 765 625 |
| 26 | 676 | 17 576 | 456 976 | 11 881 376 |
| 27 | 729 | 19 683 | 531 441 | 14 348 907 |
| 28 | 784 | 21 952 | 614 656 | 17 210 368 |
| 29 | 841 | 24 389 | 707 281 | 20 511 149 |
| **30** | 900 | 27 000 | 810 000 | 24 300 000 |
| 31 | 961 | 29 791 | 923 521 | 28 629 151 |
| 32 | 1 024 | 32 768 | 1 048 576 | 33 554 432 |
| 33 | 1 089 | 35 937 | 1 185 921 | 39 135 393 |
| 34 | 1 156 | 39 304 | 1 336 336 | 45 435 424 |
| **35** | 1 225 | 42 875 | 1 500 625 | 52 521 875 |
| 36 | 1 296 | 46 656 | 1 679 616 | 60 466 176 |
| 37 | 1 369 | 50 653 | 1 874 161 | 69 343 957 |
| 38 | 1 444 | 54 872 | 2 085 136 | 79 235 168 |
| 39 | 1 521 | 59 319 | 2 313 441 | 90 224 199 |
| **40** | 1 600 | 64 000 | 2 560 000 | 102 400 000 |
| 41 | 1 681 | 68 921 | 2 825 761 | 115 856 201 |
| 42 | 1 764 | 74 088 | 3 111 696 | 130 691 232 |
| 43 | 1 849 | 79 507 | 3 418 801 | 147 008 443 |
| 44 | 1 936 | 85 184 | 3 748 096 | 164 916 224 |
| **45** | 2 025 | 91 125 | 4 100 625 | 184 528 125 |
| 46 | 2 116 | 97 336 | 4 477 456 | 205 962 976 |
| 47 | 2 209 | 103 823 | 4 879 681 | 229 345 007 |
| 48 | 2 304 | 110 592 | 5 308 416 | 254 803 968 |
| 49 | 2 401 | 117 649 | 5 764 801 | 282 475 249 |

| $n$ | $n^2$ | $n^3$ | $n^4$ | $n^5$ |
|---|---|---|---|---|
| **50** | 2 500 | 125 000 | 6 250 000 | 312 500 000 |
| **51** | 2 601 | 132 651 | 6 765 201 | 345 025 251 |
| **52** | 2 704 | 140 608 | 7 311 616 | 380 204 032 |
| **53** | 2 809 | 148 877 | 7 890 481 | 418 195 493 |
| **54** | 2 916 | 157 464 | 8 503 056 | 459 165 024 |
| **55** | 3 025 | 166 375 | 9 150 625 | 503 284 375 |
| **56** | 3 136 | 175 616 | 9 834 496 | 550 731 776 |
| **57** | 3 249 | 185 193 | 10 556 001 | 601 692 057 |
| **58** | 3 364 | 195 112 | 11 316 496 | 656 356 768 |
| **59** | 3 481 | 205 379 | 12 117 361 | 714 924 299 |
| **60** | 3 600 | 216 000 | 12 960 000 | 777 600 000 |
| **61** | 3 721 | 226 981 | 13 845 841 | 844 596 301 |
| **62** | 3 844 | 238 328 | 14 776 336 | 916 132 832 |
| **63** | 3 969 | 250 047 | 15 752 961 | 992 436 543 |
| **64** | 4 096 | 262 144 | 16 777 216 | 1 073 741 824 |
| **65** | 4 225 | 274 625 | 17 850 625 | 1 160 290 625 |
| **66** | 4 356 | 287 496 | 18 974 736 | 1 252 332 576 |
| **67** | 4 489 | 300 763 | 20 151 121 | 1 350 125 107 |
| **68** | 4 624 | 314 432 | 21 381 376 | 1 453 933 568 |
| **69** | 4 761 | 328 509 | 22 667 12. | 1 564 031 349 |
| **70** | 4 900 | 343 000 | 24 010 000 | 1 680 700 000 |
| **71** | 5 041 | 357 911 | 25 411 681 | 1 804 229 351 |
| **72** | 5 184 | 373 248 | 26 873 856 | 1 934 917 632 |
| **73** | 5 329 | 389 017 | 28 398 241 | 2 073 071 593 |
| **74** | 5 476 | 405 224 | 29 986 576 | 2 219 006 624 |
| **75** | 5 625 | 421 875 | 31 640 625 | 2 373 046 875 |
| **76** | 5 776 | 438 976 | 33 362 176 | 2 535 525 376 |
| **77** | 5 929 | 456 533 | 35 153 041 | 2 706 784 157 |
| **78** | 6 084 | 474 552 | 37 015 056 | 2 887 174 368 |
| **79** | 6 241 | 493 039 | 38 950 081 | 3 077 056 399 |
| **80** | 6 400 | 512 000 | 40 960 000 | 3 276 800 000 |
| **81** | 6 561 | 531 441 | 43 046 721 | 3 486 784 401 |
| **82** | 6 724 | 551 368 | 45 212 176 | 3 707 398 432 |
| **83** | 6 889 | 571 787 | 47 458 321 | 3.939 040 643 |
| **84** | 7 056 | 592 704 | 49 787 136 | 4 182 119 424 |
| **85** | 7 225 | 614 125 | 52 200 625 | 4 437 053 125 |
| **86** | 7 396 | 636 056 | 54 700 816 | 4 704 270 176 |
| **87** | 7 569 | 658 503 | 57 289 761 | 4 984 209 207 |
| **88** | 7 744 | 681 472 | 59 969 536 | 5 277 319 168 |
| **89** | 7 921 | 704 969 | 62 742 241 | 5 584 059 449 |
| **90** | 8 100 | 729 000 | 65 610 000 | 5 904 900 000 |
| **91** | 8 281 | 753 571 | 68 574 961 | 6 240 321 451 |
| **92** | 8 464 | 778 688 | 71 639 296 | 6 590 815 232 |
| **93** | 8 649 | 804 357 | 74 805 201 | 6 956 883 693 |
| **94** | 8 836 | 830 584 | 78 074 896 | 7 339 040 224 |
| **95** | 9 025 | 857 375 | 81 450 625 | 7 737 809 375 |
| **96** | 9 216 | 884 736 | 84 934 656 | 8 153 726 976 |
| **97** | 9 409 | 912 673 | 88 529 281 | 8 587 340 257 |
| **98** | 9 604 | 941 192 | 92 236 816 | 9 039 207 968 |
| **99** | 9 801 | 970 299 | 96 059 601 | 9 509 900 499 |
| **100** | 10 000 | 1 000 000 | 100 000 000 | 10 000 000 000 |

## 4. *Valores recíprocos*

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 10000 | 9901 | 9804 | 9709 | 9615 | 9524 | 9434 | 9346 | 9259 | 9174 |
| 1,1 | 9091 | 9009 | 8929 | 8850 | 8772 | 8696 | 8621 | 8547 | 8475 | 8403 |
| 1,2 | 8333 | 8264 | 8197 | 8130 | 8065 | 8000 | 7937 | 7874 | 7812 | 7752 |
| 1,3 | 7692 | 7634 | 7576 | 7519 | 7463 | 7407 | 7353 | 7299 | 7246 | 7194 |
| 1,4 | 7143 | 7092 | 7042 | 6993 | 6944 | 6897 | 6849 | 6803 | 6757 | 6711 |
| 1,5 | 6667 | 6623 | 6579 | 6536 | 6494 | 6452 | 6410 | 6369 | 6329 | 6289 |
| 1,6 | 6250 | 6211 | 6173 | 6135 | 6098 | 6061 | 6024 | 5988 | 5952 | 5917 |
| 1,7 | 5882 | 5848 | 5814 | 5780 | 5747 | 5714 | 5682 | 5650 | 5618 | 5587 |
| 1,8 | 5556 | 5525 | 5495 | 5464 | 5435 | 5405 | 5376 | 5348 | 5319 | 5291 |
| 1,9 | 5263 | 5236 | 5208 | 5181 | 5155 | 5128 | 5102 | 5076 | 5051 | 5025 |
| 2,0 | 5000 | 4975 | 4950 | 4926 | 4902 | 4878 | 4854 | 4831 | 4808 | 4785 |
| 2,1 | 4762 | 4739 | 4717 | 4695 | 4673 | 4651 | 4630 | 4608 | 4587 | 4566 |
| 2,2 | 4545 | 4525 | 4505 | 4484 | 4464 | 4444 | 4425 | 4405 | 4386 | 4367 |
| 2,3 | 4348 | 4329 | 4310 | 4292 | 4274 | 4255 | 4237 | 4219 | 4202 | 4184 |
| 2,4 | 4167 | 4149 | 4132 | 4115 | 4098 | 4082 | 4065 | 4049 | 4032 | 4016 |
| 2,5 | 4000 | 3984 | 3968 | 3953 | 3937 | 3922 | 3906 | 3891 | 3876 | 3861 |
| 2,6 | 3846 | 3831 | 3817 | 3802 | 3788 | 3774 | 3759 | 3745 | 3731 | 3717 |
| 2,7 | 3704 | 3690 | 3676 | 3663 | 3650 | 3636 | 3623 | 3610 | 3597 | 3584 |
| 2,8 | 3571 | 3559 | 3546 | 3534 | 3521 | 3509 | 3497 | 3484 | 3472 | 3460 |
| 2,9 | 3448 | 3436 | 3425 | 3413 | 3401 | 3390 | 3378 | 3367 | 3356 | 3344 |
| 3,0 | 3333 | 3322 | 3311 | 3300 | 3289 | 3279 | 3268 | 3257 | 3247 | 3236 |
| 3,1 | 3226 | 3215 | 3205 | 3195 | 3185 | 3175 | 3165 | 3155 | 3145 | 3135 |
| 3,2 | 3125 | 3115 | 3106 | 3096 | 3086 | 3077 | 3067 | 3058 | 3049 | 3040 |
| 3,3 | 3030 | 3021 | 3012 | 3003 | 2994 | 2985 | 2976 | 2967 | 2959 | 2950 |
| 3,4 | 2941 | 2933 | 2924 | 2915 | 2907 | 2899 | 2890 | 2882 | 2874 | 2865 |
| 3,5 | 2857 | 2849 | 2841 | 2833 | 2825 | 2817 | 2809 | 2801 | 2793 | 2786 |
| 3,6 | 2778 | 2770 | 2762 | 2755 | 2747 | 2740 | 2732 | 2725 | 2717 | 2710 |
| 3,7 | 2703 | 2695 | 2688 | 2581 | 2674 | 2667 | 2660 | 2653 | 2646 | 2639 |
| 3,8 | 2632 | 2625 | 2618 | 2611 | 2604 | 2597 | 2591 | 2584 | 2577 | 2571 |
| 3,9 | 2564 | 2558 | 2551 | 2545 | 2538 | 2532 | 2525 | 2519 | 2513 | 2506 |
| 4,0 | 2500 | 2494 | 2488 | 2481 | 2475 | 2469 | 2463 | 2457 | 2451 | 2445 |
| 4,1 | 2439 | 2433 | 2427 | 2421 | 2415 | 2410 | 2404 | 2398 | 2392 | 2387 |
| 4,2 | 2381 | 2375 | 2370 | 2364 | 2358 | 2353 | 2347 | 2342 | 2336 | 2331 |
| 4,3 | 2326 | 2320 | 2315 | 2309 | 2304 | 2299 | 2294 | 2288 | 2283 | 2278 |
| 4,4 | 2273 | 2268 | 2262 | 2257 | 2252 | 2247 | 2242 | 2237 | 2232 | 2227 |
| 4,5 | 2222 | 2217 | 2212 | 2208 | 2203 | 2198 | 2193 | 2188 | 2183 | 2179 |
| 4,6 | 2174 | 2169 | 2165 | 2160 | 2155 | 2151 | 2146 | 2141 | 2137 | 2132 |
| 4,7 | 2128 | 2123 | 2119 | 2114 | 2110 | 2105 | 2101 | 2096 | 2092 | 2088 |
| 4,8 | 2083 | 2079 | 2075 | 2070 | 2066 | 2062 | 2058 | 2053 | 2049 | 2045 |
| 4,9 | 2041 | 2037 | 2033 | 2028 | 2024 | 2020 | 2016 | 2012 | 2008 | 2004 |
| 5,0 | 2000 | 1996 | 1992 | 1988 | 1984 | 1980 | 1976 | 1972 | 1969 | 1965 |
| 5,1 | 1961 | 1957 | 1953 | 1949 | 1946 | 1942 | 1938 | 1934 | 1931 | 1927 |
| 5,2 | 1923 | 1919 | 1916 | 1912 | 1908 | 1905 | 1901 | 1898 | 1894 | 1890 |
| 5,3 | 1887 | 1883 | 1880 | 1876 | 1873 | 1869 | 1866 | 1862 | 1859 | 1855 |
| 5,4 | 1852 | 1848 | 1845 | 1842 | 1838 | 1835 | 1832 | 1828 | 1825 | 1821 |

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,5 | 1818 | 1815 | 1812 | 1808 | 1805 | 1802 | 1799 | 1795 | 1792 | 1789 |
| 5,6 | 1786 | 1783 | 1779 | 1776 | 1773 | 1770 | 1767 | 1764 | 1761 | 1757 |
| 5,7 | 1754 | 1751 | 1748 | 1745 | 1742 | 1739 | 1736 | 1733 | 1730 | 1727 |
| 5,8 | 1724 | 1721 | 1718 | 1715 | 1712 | 1709 | 1706 | 1704 | 1701 | 1698 |
| 5.9 | 1695 | 1692 | 1689 | 1686 | 1684 | 1681 | 1678 | 1675 | 1672 | 1669 |
| 6,0 | 1667 | 1664 | 1661 | 1658 | 1656 | 1653 | 1650 | 1647 | 1645 | 1642 |
| 6,1 | 1639 | 1637 | 1634 | 1631 | 1629 | 1626 | 1623 | 1621 | 1618 | 1616 |
| 6,2 | 1613 | 1610 | 1608 | 1605 | 1603 | 1600 | 1597 | 1595 | 1592 | 1590 |
| 6,3 | 1587 | 1585 | 1582 | 1580 | 1577 | 1575 | 1572 | 1570 | 1567 | 1565 |
| 6,4 | 1562 | 1560 | 1558 | 1555 | 1553 | 1550 | 1548 | 1546 | 1543 | 1541 |
| 6,5 | 1538 | 1536 | 1534 | 1531 | 1529 | 1527 | 1524 | 1522 | 1520 | 1517 |
| 6,6 | 1515 | 1513 | 1511 | 1508 | 1506 | 1504 | 1502 | 1499 | 1497 | 1495 |
| 6,7 | 1493 | 1490 | 1488 | 1486 | 1484 | 1481 | 1479 | 1477 | 1475 | 1473 |
| 6,8 | 1471 | 1468 | 1466 | 1464 | 1462 | 1460 | 1458 | 1456 | 1453 | 1451 |
| 6,9 | 1449 | 1447 | 1445 | 1443 | 1441 | 1439 | 1437 | 1435 | 1433 | 1431 |
| 7,0 | 1429 | 1427 | 1425 | 1422 | 1420 | 1418 | 1416 | 1414 | 1412 | 1410 |
| 7,1 | 1408 | 1406 | 1404 | 1403 | 1401 | 1399 | 1397 | 1395 | 1393 | 1391 |
| 7,2 | 1389 | 1387 | 1385 | 1383 | 1381 | 1379 | 1377 | 1376 | 1374 | 1372 |
| 7,3 | 1370 | 1368 | 1366 | 1364 | 1362 | 1361 | 1359 | 1357 | 1355 | 1353 |
| 7,4 | 1351 | 1350 | 1348 | 1346 | 1344 | 1342 | 1340 | 1339 | 1337 | 1335 |
| 7,5 | 1333 | 1332 | 1330 | 1328 | 1326 | 1325 | 1323 | 1321 | 1319 | 1318 |
| 7,6 | 1316 | 1314 | 1312 | 1311 | 1309 | 1307 | 1305 | 1304 | 1302 | 1300 |
| 7,7 | 1299 | 1297 | 1295 | 1294 | 1292 | 1290 | 1289 | 1287 | 1285 | 1284 |
| 7,8 | 1282 | 1280 | 1279 | 1277 | 1276 | 1274 | 1272 | 1271 | 1269 | 1267 |
| 7,9 | 1266 | 1264 | 1263 | 1261 | 1259 | 1258 | 1256 | 1255 | 1253 | 1252 |
| 8,0 | 1250 | 1248 | 1247 | 1245 | 1244 | 1242 | 1241 | 1239 | 1238 | 1236 |
| 8,1 | 1235 | 1233 | 1232 | 1230 | 1229 | 1227 | 1225 | 1224 | 1222 | 1221 |
| 8,2 | 1220 | 1218 | 1217 | 1215 | 1214 | 1212 | 1211 | 1209 | 1208 | 1206 |
| 8,3 | 1205 | 1203 | 1202 | 1200 | 1199 | 1198 | 1196 | 1195 | 1193 | 1192 |
| 8,4 | 1190 | 1189 | 1188 | 1186 | 1185 | 1183 | 1182 | 1181 | 1179 | 1178 |
| 8,5 | 1176 | 1175 | 1174 | 1172 | 1171 | 1170 | 1168 | 1167 | 1166 | 1164 |
| 8,6 | 1163 | 1161 | 1160 | 1159 | 1157 | 1156 | 1155 | 1153 | 1152 | 1151 |
| 8,7 | 1149 | 1148 | 1147 | 1145 | 1144 | 1143 | 1142 | 1140 | 1139 | 1138 |
| 8,8 | 1136 | 1135 | 1134 | 1133 | 1131 | 1130 | 1129 | 1127 | 1126 | 1125 |
| 8,9 | 1124 | 1122 | 1121 | 1120 | 1119 | 1117 | 1116 | 1115 | 1114 | 1112 |
| 9,0 | 1111 | 1110 | 1109 | 1107 | 1106 | 1105 | 1104 | 1103 | 1101 | 1100 |
| 9,1 | 1099 | 1098 | 1096 | 1095 | 1094 | 1093 | 1092 | 1091 | 1089 | 1088 |
| 9,2 | 1087 | 1086 | 1085 | 1083 | 1082 | 1081 | 1080 | 1079 | 1078 | 1076 |
| 9,3 | 1075 | 1074 | 1073 | 1072 | 1071 | 1070 | 1068 | 1067 | 1066 | 1065 |
| 9,4 | 1064 | 1063 | 1062 | 1060 | 1059 | 1058 | 1057 | 1056 | 1055 | 1054 |
| 9,5 | 1053 | 1052 | 1050 | 1049 | 1048 | 1047 | 1046 | 1045 | 1044 | 1043 |
| 9,6 | 1042 | 1041 | 1040 | 1038 | 1037 | 1036 | 1035 | 1034 | 1033 | 1032 |
| 9,7 | 1031 | 1030 | 1029 | 1028 | 1027 | 1026 | 1025 | 1024 | 1022 | 1021 |
| 9,8 | 1020 | 1019 | 1018 | 1017 | 1016 | 1015 | 1014 | 1013 | 1012 | 1011 |
| 9,9 | 1010 | 1009 | 1008 | 1007 | 1006 | 1005 | 1004 | 1003 | 1002 | 1001 |

**Véase en la página siguiente las explicaciones de la tabla.**

### Explicaciones de la tabla de valores recíprocos

En la tabla 4 en las págs. 44,45 están dados los valores del número 10 000 : $n$ con cuatro cifras significativas para los valores de tres cifras significativas del argumento comprendidos entre 1 y 10. En la tabla, cada número está colocado en la fila correspondiente a las dos primeras cifras significativas del argumento (indicadas en la columna $n$) y en la columna correspondiente a la tercera cifra del argumento. Por ejemplo: 10 000 : : 2,26 = 4425. Si el argumento está dado con cuatro cifras significativas, es necesario recurrir a la interpolación lineal (véase pág. 15). Aquí se debe tener en cuenta que las correcciones de interpolación no se suman, sino **se restan.**

Los números includos en la tabla se pueden considerar como las cifras decimales de la fracción 1: $n$ que siguen la coma decimal; por ejemplo: 1 : 2,26 = 0,4425. Para encontrar el valor 1 : $n$ para $n > 10$ y $n < 1$ se debe tener en cuenta que cuando se multiplica $n$ por $10^k$ el valor 1 : $n$ se multiplica por $10^{-k}$, es decir, al correr la coma de $n$ en $k$ lugares a la derecha se debe correr la coma decimal de 1 : $n$ en $k$ lugares a la izquierda y viceversa. Por ejemplo: 1 : 22,6 = 0,04425; 1 : 0,0226 = 44,25.

## 5. *Los factoriales y sus valores recíprocos*

| $n$ | $n!$ | $n$ | $n!$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 11 | 39 916 800 |
| 2 | 2 | 12 | 479 001 600 |
| 3 | 6 | 13 | 6 227 020 800 |
| 4 | 24 | 14 | 87 178 291 200 |
| 5 | 120 | 15 | 1 307 674 368 000 |
| 6 | 720 | 16 | 20 922 789 888 000 |
| 7 | 5 040 | 17 | 355 687 428 096 000 |
| 8 | 40 320 | 18 | 6 402 373 705 728 000 |
| 9 | 362 880 | 19 | 121 645 100 408 832 000 |
| 10 | 3 628 800 | 20 | 2 432 902 008 176 640 000 |

### *Valores recíprocos de los factoriales**

| $n$ | $1:n!$ | $n$ | $1:n!$ | $n$ | $1:n!$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,000000 | 11 | $0{,}0^{7}25052$ | 21 | $0{,}0^{19}19573$ |
| 2 | 0,500000 | 12 | $0{,}0^{8}20877$ | 22 | $0{,}0^{21}88968$ |
| 3 | 0,166667 | 13 | $0{,}0^{9}16059$ | 23 | $0{,}0^{22}38682$ |
| 4 | 0,041667 | 14 | $0{,}0^{10}11471$ | 24 | $0{,}0^{23}16117$ |
| 5 | $0{,}0^{2}83333$ | 15 | $0{,}0^{12}76472$ | 25 | $0{,}0^{25}64470$ |
| 6 | $0{,}0^{2}13889$ | 16 | $0{,}0^{13}47795$ | 26 | $0{,}0^{26}24796$ |
| 7 | $0{,}0^{3}19841$ | 17 | $0{,}0^{14}28115$ | 27 | $0{,}0^{28}91837$ |
| 8 | $0{,}0^{4}24802$ | 18 | $0{,}0^{15}15619$ | 28 | $0{,}0^{29}32799$ |
| 9 | $0{,}0^{5}27557$ | 19 | $0{,}0^{17}82206$ | 29 | $0{,}0^{30}11310$ |
| 10 | $0{,}0^{6}27557$ | 20 | $0{,}0^{18}41103$ | 30 | $0{,}0^{32}37700$ |

* Para 1: $n!$ se usa la forma abreviada de escribir los ceros después de la coma. Así: 1:8! = 0,000024802.

## 6. *Algunas potencias de los números 2, 3 y 5*

| $n$ | $2^n$ | $3^n$ | $5^n$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 5 |
| 2 | 4 | 9 | 25 |
| 3 | 8 | 27 | 125 |
| 4 | 16 | 81 | 625 |
| 5 | 32 | 243 | 3 125 |
| 6 | 64 | 729 | 15 625 |
| 7 | 128 | 2 187 | 78 125 |
| 8 | 256 | 6 561 | 390 625 |
| 9 | 512 | 19 683 | 1 953 125 |
| 10 | 1 024 | 59 049 | 9 765 625 |
| 11 | 2 048 | 177 147 | 48 828 125 |
| 12 | 4 096 | 531 441 | 244 140 625 |
| 13 | 8 192 | 1 594 323 | 1 220 703 125 |
| 14 | 16 384 | 4 782 969 | 6 103 515 625 |
| 15 | 32 768 | 14 348 907 | 30 517 578 125 |
| 16 | 65 536 | 43 046 721 | 152 587 890 625 |
| 17 | 131 072 | 129 140 163 | 762 939 453 125 |
| 18 | 262 144 | 387 420 489 | 3 814 697 265 625 |
| 19 | 524 288 | 1 162 261 467 | 19 073 486 328 125 |
| 20 | 1 048 576 | 3 486 784 401 | 95 367 431 640 625 |

### EXPLICACIONES DE LAS TABLAS DE LOGARITMOS Y ANTILOGARITMOS

La tabla 7 (págs. 49,50) sirve para hallar los logaritmos decimales de los números. Primeramente, de acuerdo con las reglas dadas en la pág. 151 para el número dado se halla la *característica* de su logaritmo y después, por la tabla, la *mantisa*. Para los números de tres cifras significativas, la mantisa se encuentra en la intersección de la fila en cuyo comienzo (en la columna *N*) están situadas las dos primeras cifras del número dado, y la columna encabezada por la tercera cifra. Si el número dado tiene más de tres cifras significativas, es necesario aplicar la interpolación lineal (véase pág. 15). En este caso se halla la corrección de interpolación sólo para la cuarta cifra significativa; tiene sentido efectuar la corrección para la quinta cifra tan sólo cuando la primera cifra significativa del número dado es igual a 1 ó 2.

*Ejemplo:* $\lg 254{,}3 = 2{,}4053$ (a 4048 se le agrega $0{,}3 \cdot 17 = 5{,}1$).

La tabla 8 (págs. 51,52)(de antilogaritmos*) sirve para hallar un número por su logaritmo decimal. En esta tabla, el argumento es la mantisa del logaritmo dado. En la tabla de antilogaritmos, en la intersección de la

* El número $y$ cuyo logaritmo decimal es igual a $x$, se llama *antilogaritmo* de $x$. En virtud de la definición de logaritmo (véase pág. 149) esta función coincide con la función exponencial $y = 10^x$.

fila determinada por las dos primeras cifras de la mantisa (la columna $m$) y la columna encabezada por su tercera cifra, se encuentra la estructura de cifras del número buscado. Para la cuarta cifra se debe introducir la corección de interpolación. La característica del logaritmo permite poner la coma en el resultado obtenido, según las reglas dadas en la pág. 150.

*Ejemplos:* $\lg x + 1{,}2763$; $x = 18{,}89$ (a 1888, encontrado en la tabla, se le suma $0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2$; como la característica es igual a la unidad, en el resultado se separan dos cifras con la coma. Si $\lg x = \bar{2}{,}2763$, entonces $x = 0{,}01889$. Estos resultados pueden anotarse también de la siguiente manera: $10^{1{,}2763} = 18{,}89$; $10^{-1{,}7237} = 0{,}01889$ (ya que $\bar{2}{,}2763 = -1{,}7237$).

# 7. Logaritmos decimales

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| **11** | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| **12** | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| **13** | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| **14** | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| **15** | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| **16** | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| **17** | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| **18** | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| **19** | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| **20** | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| **21** | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| **22** | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| **23** | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| **24** | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| **25** | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| **26** | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| **27** | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| **28** | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| **29** | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| **30** | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| **31** | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| **32** | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| **33** | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| **34** | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| **35** | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| **36** | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| **37** | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| **38** | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| **39** | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| **40** | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| **41** | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| **42** | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| **43** | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| **44** | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| **45** | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| **46** | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| **47** | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| **48** | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| **49** | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| **50** | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| **51** | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| **52** | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| **53** | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| **54** | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |

Véase en la pág. 47 las explicaciones de la tabla.

# 8. *Antilogaritmos*

| *m* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **00** | 1000 | 1002 | 1005 | 1007 | 1009 | 1012 | 1014 | 1016 | 1019 | 1021 |
| 01 | 1023 | 1026 | 1028 | 1030 | 1033 | 1035 | 1038 | 1040 | 1042 | 1045 |
| 02 | 1047 | 1050 | 1052 | 1054 | 1057 | 1059 | 1062 | 1064 | 1067 | 1069 |
| 03 | 1072 | 1074 | 1076 | 1079 | 1081 | 1084 | 1086 | 1089 | 1091 | 1094 |
| 04 | 1096 | 1099 | 1102 | 1104 | 1107 | 1109 | 1112 | 1114 | 1117 | 1119 |
| **05** | 1122 | 1125 | 1127 | 1130 | 1132 | 1135 | 1138 | 1140 | 1143 | 1146 |
| 06 | 1148 | 1151 | 1153 | 1156 | 1159 | 1161 | 1164 | 1167 | 1169 | 1172 |
| 07 | 1175 | 1178 | 1180 | 1183 | 1186 | 1189 | 1191 | 1194 | 1197 | 1199 |
| 08 | 1202 | 1205 | 1208 | 1211 | 1213 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1227 |
| 09 | 1230 | 1233 | 1236 | 1239 | 1242 | 1245 | 1247 | 1250 | 1253 | 1256 |
| **10** | 1259 | 1262 | 1265 | 1268 | 1271 | 1274 | 1276 | 1279 | 1282 | 1285 |
| 11 | 1288 | 1291 | 1294 | 1297 | 1300 | 1303 | 1306 | 1309 | 1312 | 1315 |
| 12 | 1318 | 1321 | 1324 | 1327 | 1330 | 1334 | 1337 | 1340 | 1343 | 1346 |
| 13 | 1349 | 1352 | 1355 | 1358 | 1361 | 1365 | 1368 | 1371 | 1374 | 1377 |
| 14 | 1380 | 1384 | 1387 | 1390 | 1393 | 1396 | 1400 | 1403 | 1406 | 1409 |
| **15** | 1413 | 1416 | 1419 | 1422 | 1426 | 1429 | 1432 | 1435 | 1439 | 1442 |
| 16 | 1445 | 1449 | 1452 | 1455 | 1459 | 1462 | 1466 | 1469 | 1472 | 1476 |
| 17 | 1479 | 1483 | 1486 | 1489 | 1493 | 1496 | 1500 | 1503 | 1507 | 1510 |
| 18 | 1514 | 1517 | 1521 | 1524 | 1528 | 1531 | 1535 | 1538 | 1542 | 1545 |
| 19 | 1549 | 1552 | 1556 | 1560 | 1563 | 1567 | 1570 | 1574 | 1578 | 1581 |
| **20** | 1585 | 1589 | 1592 | 1596 | 1600 | 1603 | 1607 | 1611 | 1614 | 1618 |
| 21 | 1622 | 1626 | 1629 | 1633 | 1637 | 1641 | 1644 | 1648 | 1652 | 1656 |
| 22 | 1660 | 1663 | 1667 | 1671 | 1675 | 1679 | 1683 | 1687 | 1690 | 1694 |
| 23 | 1698 | 1702 | 1706 | 1710 | 1714 | 1718 | 1722 | 1726 | 1730 | 1734 |
| 24 | 1738 | 1742 | 1746 | 1750 | 1754 | 1758 | 1762 | 1766 | 1770 | 1774 |
| **25** | 1778 | 1782 | 1786 | 1791 | 1795 | 1799 | 1803 | 1807 | 1811 | 1816 |
| 26 | 1820 | 1824 | 1828 | 1832 | 1837 | 1841 | 1845 | 1849 | 1854 | 1858 |
| 27 | 1862 | 1866 | 1871 | 1875 | 1879 | 1884 | 1888 | 1892 | 1897 | 1901 |
| 28 | 1905 | 1910 | 1914 | 1919 | 1923 | 1928 | 1932 | 1936 | 1941 | 1945 |
| 29 | 1950 | 1954 | 1959 | 1963 | 1968 | 1972 | 1977 | 1982 | 1986 | 1991 |
| **30** | 1995 | 2000 | 2004 | 2009 | 2014 | 2018 | 2023 | 2028 | 2032 | 2037 |
| 31 | 2042 | 2046 | 2051 | 2056 | 2061 | 2065 | 2070 | 2075 | 2080 | 2084 |
| 32 | 2089 | 2094 | 2099 | 2104 | 2109 | 2113 | 2118 | 2123 | 2128 | 2133 |
| 33 | 2138 | 2143 | 2148 | 2153 | 2158 | 2163 | 2168 | 2173 | 2178 | 2183 |
| 34 | 2188 | 2193 | 2198 | 2203 | 2208 | 2213 | 2218 | 2223 | 2228 | 2234 |
| **35** | 2239 | 2244 | 2249 | 2254 | 2259 | 2265 | 2270 | 2275 | 2280 | 2286 |
| 36 | 2291 | 2296 | 2301 | 2307 | 2312 | 2317 | 2323 | 2328 | 2333 | 2339 |
| 37 | 2344 | 2350 | 2355 | 2360 | 2366 | 2371 | 2377 | 2382 | 2388 | 2393 |
| 38 | 2399 | 2404 | 2410 | 2415 | 2421 | 2427 | 2432 | 2438 | 2443 | 2449 |
| 39 | 2455 | 2460 | 2466 | 2472 | 2477 | 2483 | 2489 | 2495 | 2500 | 2506 |
| **40** | 2512 | 2518 | 2523 | 2529 | 2535 | 2541 | 2547 | 2553 | 2559 | 2564 |
| 41 | 2570 | 2576 | 2582 | 2588 | 2594 | 2600 | 2606 | 2612 | 2618 | 2624 |
| 42 | 2630 | 2636 | 2642 | 2649 | 2655 | 2661 | 2667 | 2673 | 2679 | 2685 |
| 43 | 2692 | 2698 | 2704 | 2710 | 2716 | 2723 | 2729 | 2735 | 2742 | 2748 |
| 44 | 2754 | 2761 | 2767 | 2773 | 2780 | 2786 | 2793 | 2799 | 2805 | 2812 |
| **45** | 2818 | 2825 | 2831 | 2838 | 2844 | 2851 | 2858 | 2864 | 2871 | 2877 |
| 46 | 2884 | 2891 | 2897 | 2904 | 2911 | 2917 | 2924 | 2931 | 2938 | 2944 |
| 47 | 2951 | 2958 | 2965 | 2972 | 2979 | 2985 | 2992 | 2999 | 3006 | 3013 |
| 48 | 3020 | 3027 | 3034 | 3041 | 3048 | 3055 | 3062 | 3069 | 3076 | 3083 |
| 49 | 3090 | 3097 | 3105 | 3112 | 3119 | 3126 | 3133 | 3141 | 3148 | 3155 |

| *m* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **50** | 3162 | 3170 | 3177 | 3184 | 3192 | 3199 | 3206 | 3214 | 3221 | 3228 |
| **51** | 3236 | 3243 | 3251 | 3258 | 3266 | 3273 | 3281 | 3289 | 3296 | 3304 |
| **52** | 3311 | 3319 | 3327 | 3334 | 3342 | 3350 | 3357 | 3365 | 3373 | 3381 |
| **53** | 3388 | 3396 | 3404 | 3412 | 3420 | 3428 | 3436 | 3443 | 3451 | 3459 |
| **54** | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499 | 3508 | 3516 | 3524 | 3532 | 3540 |
| **55** | 3548 | 3556 | 3565 | 3573 | 3581 | 3589 | 3597 | 3606 | 3614 | 3622 |
| **56** | 3631 | 3639 | 3648 | 3656 | 3664 | 3673 | 3681 | 3690 | 3698 | 3707 |
| **57** | 3715 | 3724 | 3733 | 3741 | 3750 | 3758 | 3767 | 3776 | 3784 | 3793 |
| **58** | 3802 | 3811 | 3819 | 3828 | 3837 | 3846 | 3855 | 3864 | 3873 | 3882 |
| **59** | 3890 | 3899 | 3908 | 3917 | 3926 | 3936 | 3945 | 3954 | 3963 | 3972 |
| **60** | 3981 | 3990 | 3999 | 4009 | 4018 | 4027 | 4036 | 4046 | 4055 | 4064 |
| **61** | 4074 | 4083 | 4093 | 4102 | 4111 | 4121 | 4130 | 4140 | 4150 | 4159 |
| **62** | 4169 | 4178 | 4188 | 4198 | 4207 | 4217 | 4227 | 4236 | 4246 | 4256 |
| **63** | 4266 | 4276 | 4285 | 4295 | 4305 | 4315 | 4325 | 4335 | 4345 | 4355 |
| **64** | 4365 | 4375 | 4385 | 4395 | 4406 | 4416 | 4426 | 4436 | 4446 | 4457 |
| **65** | 4467 | 4477 | 4487 | 4498 | 4508 | 4519 | 4529 | 4539 | 4550 | 4560 |
| **66** | 4571 | 4581 | 4592 | 4603 | 4613 | 4624 | 4634 | 4645 | 4656 | 4667 |
| **67** | 4677 | 4688 | 4699 | 4710 | 4721 | 4732 | 4742 | 4753 | 4764 | 4775 |
| **68** | 4786 | 4797 | 4808 | 4819 | 4831 | 4842 | 4853 | 4864 | 4875 | 4887 |
| **69** | 4898 | 4909 | 4920 | 4932 | 4943 | 4955 | 4966 | 4977 | 4989 | 5000 |
| **70** | 5012 | 5023 | 5035 | 5047 | 5058 | 5070 | 5082 | 5093 | 5105 | 5117 |
| **71** | 5129 | 5140 | 5152 | 5164 | 5176 | 5188 | 5200 | 5212 | 5224 | 5236 |
| **72** | 5248 | 5260 | 5272 | 5284 | 5297 | 5309 | 5321 | 5333 | 5346 | 5358 |
| **73** | 5370 | 5383 | 5395 | 5408 | 5420 | 5433 | 5445 | 5458 | 5470 | 5483 |
| **74** | 5495 | 5508 | 5521 | 5534 | 5546 | 5559 | 5572 | 5585 | 5598 | 5610 |
| **75** | 5623 | 5636 | 5649 | 5662 | 5675 | 5689 | 5702 | 5715 | 5728 | 5741 |
| **76** | 5754 | 5768 | 5781 | 5794 | 5808 | 5821 | 5834 | 5848 | 5861 | 5875 |
| **77** | 5888 | 5902 | 5916 | 5929 | 5943 | 5957 | 5970 | 5984 | 5998 | 6012 |
| **78** | 6026 | 6039 | 6053 | 6067 | 6081 | 6095 | 6109 | 6124 | 6138 | 6152 |
| **79** | 6166 | 6180 | 6194 | 6209 | 6223 | 6237 | 6252 | 6266 | 6281 | 6295 |
| **80** | 6310 | 6324 | 6339 | 6353 | 6368 | 6383 | 6397 | 6412 | 6427 | 6442 |
| **81** | 6457 | 6471 | 6486 | 6501 | 6516 | 6531 | 6546 | 6561 | 6577 | 6592 |
| **82** | 6607 | 6622 | 6637 | 6653 | 6668 | 6683 | 6699 | 6714 | 6730 | 6745 |
| **83** | 6761 | 6776 | 6792 | 6808 | 6823 | 6839 | 6855 | 6871 | 6887 | 6902 |
| **84** | 6918 | 6934 | 6950 | 6966 | 6982 | 6998 | 7015 | 7031 | 7047 | 7063 |
| **85** | 7079 | 7096 | 7112 | 7129 | 7145 | 7161 | 7178 | 7194 | 7211 | 7228 |
| **86** | 7244 | 7261 | 7278 | 7295 | 7311 | 7328 | 7345 | 7362 | 7379 | 7396 |
| **87** | 7413 | 7430 | 7447 | 7464 | 7482 | 7499 | 7516 | 7534 | 7551 | 7568 |
| **88** | 7586 | 7603 | 7621 | 7638 | 7656 | 7674 | 7691 | 7709 | 7727 | 7745 |
| **89** | 7762 | 7780 | 7798 | 7816 | 7834 | 7852 | 7870 | 7889 | 7907 | 7925 |
| **90** | 7943 | 7962 | 7980 | 7998 | 8017 | 8035 | 8054 | 8072 | 8091 | 8110 |
| **91** | 8128 | 8147 | 8166 | 8185 | 8204 | 8222 | 8241 | 8260 | 8279 | 8299 |
| **92** | 8318 | 8337 | 8356 | 8375 | 8395 | 8414 | 8433 | 8453 | 8472 | 8492 |
| **93** | 8511 | 8531 | 8551 | 8570 | 8590 | 8610 | 8630 | 8650 | 8670 | 8690 |
| **94** | 8710 | 8730 | 8750 | 8770 | 8790 | 8810 | 8831 | 8851 | 8872 | 8892 |
| **95** | 8913 | 8933 | 8954 | 8974 | 8995 | 9016 | 9036 | 9057 | 9078 | 9099 |
| **96** | 9120 | 9141 | 9162 | 9183 | 9204 | 9226 | 9247 | 9268 | 9290 | 9311 |
| **97** | 9333 | 9354 | 9376 | 9397 | 9419 | 9441 | 9462 | 9484 | 9506 | 9528 |
| **98** | 9550 | 9572 | 9594 | 9616 | 9638 | 9661 | 9683 | 9705 | 9727 | 9750 |
| **99** | 9772 | 9795 | 9817 | 9840 | 9863 | 9886 | 9908 | 9931 | 9954 | 9977 |

Véase en la pág. 47 las explicaciones de la tabla.

## 9. *Valores naturales de las funciones trigonométricas*

*Senos*

| Grados | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 0,0029 | 0,0058 | 0,0087 | 0,0116 | 0,0145 | 0,0175 | 89 |
| 1 | 0,0175 | 0,0204 | 0,0233 | 0,0262 | 0,0291 | 0,0320 | 0,0349 | 88 |
| 2 | 0,0349 | 0,0378 | 0,0407 | 0,0436 | 0,0465 | 0,0494 | 0,0523 | 87 |
| 3 | 0,0523 | 0,0552 | 0,0581 | 0,0610 | 0,0640 | 0,0669 | 0,0698 | 86 |
| 4 | 0,0698 | 0,0727 | 0,0756 | 0,0785 | 0,0814 | 0,0843 | 0,0872 | 85 |
| 5 | 0,0872 | 0,0901 | 0,0929 | 0,0958 | 0,0987 | 0,1016 | 0,1045 | 84 |
| 6 | 0,1045 | 0,1074 | 0,1103 | 0,1132 | 0,1161 | 0,1190 | 0,1219 | 83 |
| 7 | 0,1219 | 0,1248 | 0,1276 | 0,1305 | 0,1334 | 0,1363 | 0,1392 | 82 |
| 8 | 0,1392 | 0,1421 | 0,1449 | 0,1478 | 0,1507 | 0,1536 | 0,1564 | 81 |
| 9 | 0,1564 | 0,1593 | 0,1622 | 0,1650 | 0,1679 | 0,1708 | 0,1736 | 80 |
| 10 | 0,1736 | 0,1765 | 0,1794 | 0,1822 | 0,1851 | 0,1880 | 0,1908 | 79 |
| 11 | 0,1908 | 0,1937 | 0,1965 | 0,1994 | 0,2022 | 0,2051 | 0,2079 | 78 |
| 12 | 0,2079 | 0,2108 | 0,2136 | 0,2164 | 0,2193 | 0,2221 | 0,2250 | 77 |
| 13 | 0,2250 | 0,2278 | 0,2306 | 0,2334 | 0,2363 | 0,2391 | 0,2419 | 76 |
| 14 | 0,2419 | 0,2447 | 0,2476 | 0,2504 | 0,2532 | 0,2560 | 0,2588 | 75 |
| 15 | 0,2588 | 0,2616 | 0,2644 | 0,2672 | 0,2700 | 0,2728 | 0,2756 | 74 |
| 16 | 0,2756 | 0,2784 | 0,2812 | 0,2840 | 0,2868 | 0,2896 | 0,2924 | 73 |
| 17 | 0,2924 | 0,2952 | 0,2979 | 0,3007 | 0,3035 | 0,3062 | 0,3090 | 72 |
| 18 | 0,3090 | 0,3118 | 0,3145 | 0,3173 | 0,3201 | 0,3228 | 0,3256 | 71 |
| 19 | 0,3256 | 0,3283 | 0,3311 | 0,3338 | 0,3365 | 0,3393 | 0,3420 | 70 |
| 20 | 0,3420 | 0,3448 | 0,3475 | 0,3502 | 0,3529 | 0,3557 | 0,3584 | 69 |
| 21 | 0,3584 | 0,3611 | 0,3638 | 0,3665 | 0,3692 | 0,3719 | 0,3746 | 68 |
| 22 | 0,3746 | 0,3773 | 0,3800 | 0,3827 | 0,3854 | 0,3881 | 0,3907 | 67 |
| 23 | 0,3907 | 0,3934 | 0,3961 | 0,3987 | 0,4014 | 0,4041 | 0,4067 | 66 |
| 24 | 0,4067 | 0,4094 | 0,4120 | 0,4147 | 0,4173 | 0,4200 | 0,4226 | 65 |
| 25 | 0,4226 | 0,4253 | 0,4279 | 0,4305 | 0,4331 | 0,4358 | 0,4384 | 64 |
| 26 | 0,4384 | 0,4410 | 0,4436 | 0,4462 | 0,4488 | 0,4514 | 0,4540 | 63 |
| 27 | 0,4540 | 0,4566 | 0,4592 | 0,4617 | 0,4643 | 0,4669 | 0,4695 | 62 |
| 28 | 0,4695 | 0,4720 | 0,4746 | 0,4772 | 0,4797 | 0,4823 | 0,4848 | 61 |
| 29 | 0,4848 | 0,4874 | 0,4899 | 0,4924 | 0,4950 | 0,4975 | 0,5000 | 60 |
| 30 | 0,5000 | 0,5025 | 0,5050 | 0,5075 | 0,5100 | 0,5125 | 0,5150 | 59 |
| 31 | 0,5150 | 0,5175 | 0,5200 | 0,5225 | 0,5250 | 0,5275 | 0,5299 | 58 |
| 32 | 0,5299 | 0,5324 | 0,5348 | 0,5373 | 0,5398 | 0,5422 | 0,5446 | 57 |
| 33 | 0,5446 | 0,5471 | 0,5495 | 0,5519 | 0,5544 | 0,5568 | 0,5592 | 56 |
| 34 | 0,5592 | 0,5616 | 0,5640 | 0,5664 | 0,5688 | 0,5712 | 0,5736 | 55 |
| 35 | 0,5736 | 0,5760 | 0,5783 | 0,5807 | 0,5831 | 0,5854 | 0,5878 | 54 |
| 36 | 0,5878 | 0,5901 | 0,5925 | 0,5948 | 0,5972 | 0,5995 | 0,6018 | 53 |
| 37 | 0,6018 | 0,6041 | 0,6065 | 0,6088 | 0,6111 | 0,6134 | 0,6157 | 52 |
| 38 | 0,6157 | 0,6180 | 0,6202 | 0,6225 | 0,6248 | 0,6271 | 0,6293 | 51 |
| 39 | 0,6293 | 0,6316 | 0,6338 | 0,6361 | 0,6383 | 0,6406 | 0,6428 | 50 |
| 40 | 0,6428 | 0,6450 | 0,6472 | 0,6494 | 0,6517 | 0,6539 | 0,6561 | 49 |
| 41 | 0,6561 | 0,6583 | 0,6604 | 0,6626 | 0,6648 | 0,6670 | 0,6691 | 48 |
| 42 | 0,6691 | 0,6713 | 0,6734 | 0,6756 | 0,6777 | 0,6799 | 0,6820 | 47 |
| 43 | 0,6820 | 0,6841 | 0,6862 | 0,6884 | 0,6905 | 0,6926 | 0,6947 | 46 |
| 44 | 0,6947 | 0,6967 | 0,6988 | 0,7009 | 0,7030 | 0,7050 | 0,7071 | 45 |
| 45 | 0,7071 | 0,7092 | 0,7112 | 0,7133 | 0,7153 | 0,7173 | 0,7193 | 44 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | Grados |

*Cosenos*

*Senos*

| Grados | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0,7071 | 0,7092 | 0,7112 | 0,7133 | 0,7153 | 0,7173 | 0,7193 | 44 |
| 46 | 0,7193 | 0,7214 | 0,7234 | 0,7254 | 0,7274 | 0,7294 | 0,7314 | 43 |
| 47 | 0,7314 | 0,7333 | 0,7353 | 0,7373 | 0,7392 | 0,7412 | 0,7431 | 42 |
| 48 | 0,7431 | 0,7451 | 0,7470 | 0,7490 | 0,7509 | 0,7528 | 0,7547 | 41 |
| 49 | 0,7547 | 0,7566 | 0,7585 | 0,7604 | 0,7623 | 0,7642 | 0,7660 | 40 |
| 50 | 0,7660 | 0,7679 | 0,7698 | 0,7716 | 0,7735 | 0,7753 | 0,7771 | 39 |
| 51 | 0,7771 | 0,7790 | 0,7808 | 0,7826 | 0,7844 | 0,7862 | 0,7880 | 38 |
| 52 | 0,7880 | 0,7898 | 0,7916 | 0,7934 | 0,7951 | 0,7969 | 0,7986 | 37 |
| 53 | 0,7986 | 0,8004 | 0,8021 | 0,8039 | 0,8056 | 0,8073 | 0,8090 | 36 |
| 54 | 0,8090 | 0,8107 | 0,8124 | 0,8141 | 0,8158 | 0,8175 | 0,8192 | 35 |
| 55 | 0,8192 | 0,8208 | 0,8225 | 0,8241 | 0,8258 | 0,8274 | 0,8290 | 34 |
| 56 | 0,8290 | 0,8307 | 0,8323 | 0,8339 | 0,8355 | 0,8371 | 0,8387 | 33 |
| 57 | 0,8387 | 0,8403 | 0,8418 | 0,8434 | 0,8450 | 0,8465 | 0,8480 | 32 |
| 58 | 0,8480 | 0,8496 | 0,8511 | 0,8526 | 0,8542 | 0,8557 | 0,8572 | 31 |
| 59 | 0,8572 | 0,8587 | 0,8601 | 0,8616 | 0,8631 | 0,8646 | 0,8660 | 30 |
| 60 | 0,8660 | 0,8675 | 0,8689 | 0,8704 | 0,8718 | 0,8732 | 0,8746 | 29 |
| 61 | 0,8746 | 0,8760 | 0,8774 | 0,8788 | 0,8802 | 0,8816 | 0,8829 | 28 |
| 62 | 0,8829 | 0,8843 | 0,8857 | 0,8870 | 0,8884 | 0,8897 | 0,8910 | 27 |
| 63 | 0,8910 | 0,8923 | 0,8936 | 0,8949 | 0,8962 | 0,8975 | 0,8988 | 26 |
| 64 | 0,8988 | 0,9001 | 0,9013 | 0,9026 | 0,9038 | 0,9051 | 0,9063 | 25 |
| 65 | 0,9063 | 0,9075 | 0,9088 | 0,9100 | 0,9112 | 0,9124 | 0,9135 | 24 |
| 66 | 0,9135 | 0,9147 | 0,9159 | 0,9171 | 0,9182 | 0,9194 | 0,9205 | 23 |
| 67 | 0,9205 | 0,9216 | 0,9228 | 0,9239 | 0,9250 | 0,9261 | 0,9272 | 22 |
| 68 | 0,9272 | 0,9283 | 0,9293 | 0,9304 | 0,9315 | 0,9325 | 0,9336 | 21 |
| 69 | 0,9336 | 0,9346 | 0,9356 | 0,9367 | 0,9377 | 0,9387 | 0,9397 | 20 |
| 70 | 0,9397 | 0,9407 | 0,9417 | 0,9426 | 0,9436 | 0,9446 | 0,9455 | 19 |
| 71 | 0,9455 | 0,9465 | 0,9474 | 0,9483 | 0,9492 | 0,9502 | 0,9511 | 18 |
| 72 | 0,9511 | 0,9520 | 0,9528 | 0,9537 | 0,9546 | 0,9555 | 0,9563 | 17 |
| 73 | 0,9563 | 0,9572 | 0,9580 | 0,9588 | 0,9596 | 0,9605 | 0,9613 | 16 |
| 74 | 0,9613 | 0,9621 | 0,9628 | 0,9636 | 0,9644 | 0,9652 | 0,9659 | 15 |
| 75 | 0,9659 | 0,9667 | 0,9674 | 0,9681 | 0,9689 | 0,9696 | 0,9703 | 14 |
| 76 | 0,9703 | 0,9710 | 0,9717 | 0,9724 | 0,9730 | 0,9737 | 0,9744 | 13 |
| 77 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9757 | 0,9763 | 0,9769 | 0,9775 | 0,9781 | 12 |
| 78 | 0,9781 | 0,9787 | 0,9793 | 0,9799 | 0,9805 | 0,9811 | 0,9816 | 11 |
| 79 | 0,9816 | 0,9822 | 0,9827 | 0,9833 | 0,9838 | 0,9843 | 0,9848 | 10 |
| 80 | 0,9848 | 0,9853 | 0,9858 | 0,9863 | 0,9868 | 0,9872 | 0,9877 | 9 |
| 81 | 0,9877 | 0,9881 | 0,9886 | 0,9890 | 0,9894 | 0,9899 | 0,9903 | 8 |
| 82 | 0,9903 | 0,9907 | 0,9911 | 0,9914 | 0,9918 | 0,9922 | 0,9925 | 7 |
| 83 | 0,9925 | 0,9929 | 0,9932 | 0,9936 | 0,9939 | 0,9942 | 0,9945 | 6 |
| 84 | 0,9945 | 0,9948 | 0,9951 | 0,9954 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9962 | 5 |
| 85 | 0,9962 | 0,9964 | 0,9967 | 0,9969 | 0,9971 | 0,9974 | 0,9976 | 4 |
| 86 | 0,9976 | 0,9978 | 0,9980 | 0,9981 | 0,9983 | 0,9985 | 0,9986 | 3 |
| 87 | 0,9986 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9994 | 2 |
| 88 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 | 0,9998 | 1 |
| 89 | 0,9998 | 0,9999 | 0,9999 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 0 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | Grados |

***Cosenos***

*Tangentes*

| Grados | 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 0,0029 | 0,0058 | 0,0087 | 0,0116 | 0,0145 | 0,0175 | 89 |
| 1 | 0,0175 | 0,0204 | 0,0233 | 0,0262 | 0,0291 | 0,0320 | 0,0349 | 88 |
| 2 | 0,0349 | 0,0378 | 0,0407 | 0,0437 | 0,0466 | 0,0495 | 0,0524 | 87 |
| 3 | 0,0524 | 0,0553 | 0,0582 | 0,0612 | 0,0641 | 0,0670 | 0,0699 | 86 |
| 4 | 0,0699 | 0,0729 | 0,0758 | 0,0787 | 0,0816 | 0,0846 | 0,0875 | 85 |
| 5 | 0,0875 | 0,0904 | 0,0934 | 0,0963 | 0,0992 | 0,1022 | 0,1051 | 84 |
| 6 | 0,1051 | 0,1080 | 0,1110 | 0,1139 | 0,1169 | 0,1198 | 0,1228 | 83 |
| 7 | 0,1228 | 0,1257 | 0,1287 | 0,1317 | 0,1346 | 0,1376 | 0,1405 | 82 |
| 8 | 0,1405 | 0,1435 | 0,1465 | 0,1495 | 0,1524 | 0,1554 | 0,1584 | 81 |
| 9 | 0,1584 | 0,1614 | 0,1644 | 0,1673 | 0,1703 | 0,1733 | 0,1763 | 80 |
| 10 | 0,1763 | 0,1793 | 0,1823 | 0,1853 | 0,1883 | 0,1914 | 0,1944 | 79 |
| 11 | 0,1944 | 0,1974 | 0,2004 | 0,2035 | 0,2065 | 0,2095 | 0,2126 | 78 |
| 12 | 0,2126 | 0,2156 | 0,2186 | 0,2217 | 0,2247 | 0,2278 | 0,2309 | 77 |
| 13 | 0,2309 | 0,2339 | 0,2370 | 0,2401 | 0,2432 | 0,2462 | 0,2493 | 76 |
| 14 | 0,2493 | 0,2524 | 0,2555 | 0,2586 | 0,2617 | 0,2648 | 0,2679 | 75 |
| 15 | 0,2679 | 0,2711 | 0,2742 | 0,2773 | 0,2805 | 0,2836 | 0,2867 | 74 |
| 16 | 0,2867 | 0,2899 | 0,2931 | 0,2962 | 0,2994 | 0,3026 | 0,3057 | 73 |
| 17 | 0,3057 | 0,3089 | 0,3121 | 0,3153 | 0,3185 | 0,3217 | 0,3249 | 72 |
| 18 | 0,3249 | 0,3281 | 0,3314 | 0,3346 | 0,3378 | 0,3411 | 0,3443 | 71 |
| 19 | 0,3443 | 0,3476 | 0,3508 | 0,3541 | 0,3574 | 0,3607 | 0,3640 | 70 |
| 20 | 0,3640 | 0,3673 | 0,3706 | 0,3739 | 0,3772 | 0,3805 | 0,3839 | 69 |
| 21 | 0,3839 | 0,3872 | 0,3906 | 0,3939 | 0,3973 | 0,4006 | 0,4040 | 68 |
| 22 | 0,4040 | 0,4074 | 0,4108 | 0,4142 | 0,4176 | 0,4210 | 0,4245 | 67 |
| 23 | 0,4245 | 0,4279 | 0,4314 | 0,4348 | 0,4383 | 0,4417 | 0,4452 | 66 |
| 24 | 0,4452 | 0,4487 | 0,4522 | 0,4557 | 0,4592 | 0,4628 | 0,4663 | 65 |
| 25 | 0,4663 | 0,4699 | 0,4734 | 0,4770 | 0,4806 | 0,4841 | 0,4877 | 64 |
| 26 | 0,4877 | 0,4913 | 0,4950 | 0,4986 | 0,5022 | 0,5059 | 0,5095 | 63 |
| 27 | 0,5095 | 0,5132 | 0,5169 | 0,5206 | 0,5243 | 0,5280 | 0,5317 | 62 |
| 28 | 0,5317 | 0,5354 | 0,5392 | 0,5430 | 0,5467 | 0,5505 | 0,5543 | 61 |
| 29 | 0,5543 | 0,5581 | 0,5619 | 0,5658 | 0,5696 | 0,5735 | 0,5774 | 60 |
| 30 | 0,5774 | 0,5812 | 0,5851 | 0,5890 | 0,5930 | 0,5969 | 0,6009 | 59 |
| 31 | 0,6009 | 0,6048 | 0,6088 | 0,6128 | 0,6168 | 0,6208 | 0,6249 | 58 |
| 32 | 0,6249 | 0,6289 | 0,6330 | 0,6371 | 0,6412 | 0,6453 | 0,6494 | 57 |
| 33 | 0,6494 | 0,6536 | 0,6577 | 0,6619 | 0,6661 | 0,6703 | 0,6745 | 56 |
| 34 | 0,6745 | 0,6787 | 0,6830 | 0,6873 | 0,6916 | 0,6959 | 0,7002 | 55 |
| 35 | 0,7002 | 0,7046 | 0,7089 | 0,7133 | 0,7177 | 0,7221 | 0,7265 | 54 |
| 36 | 0,7265 | 0,7310 | 0,7355 | 0,7400 | 0,7445 | 0,7490 | 0,7536 | 53 |
| 37 | 0,7536 | 0,7581 | 0,7627 | 0,7673 | 0,7720 | 0,7766 | 0,7813 | 52 |
| 38 | 0,7813 | 0,7860 | 0,7907 | 0,7954 | 0,8002 | 0,8050 | 0,8098 | 51 |
| 39 | 0,8098 | 0,8146 | 0,8195 | 0,8243 | 0,8292 | 0,8342 | 0,8391 | 50 |
| 40 | 0,8391 | 0,8441 | 0,8491 | 0,8541 | 0,8591 | 0,8642 | 0,8693 | 49 |
| 41 | 0,8693 | 0,8744 | 0,8796 | 0,8847 | 0,8899 | 0,8952 | 0,9004 | 48 |
| 42 | 0,9004 | 0,9057 | 0,9110 | 0,9163 | 0,9217 | 0,9271 | 0,9325 | 47 |
| 43 | 0,9325 | 0,9380 | 0,9435 | 0,9490 | 0,9545 | 0,9601 | 0,9657 | 46 |
| 44 | 0,9657 | 0,9713 | 0,9770 | 0,9827 | 0,9884 | 0,9942 | 1,0000 | 45 |
| 45 | 1,0000 | 1,0058 | 1,0117 | 1,0176 | 1,0235 | 1,0295 | 1,0355 | 44 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | Grados |

*Cotangentes*

*Tangentes*

| Grados | 0′ → | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 ↓ | 1,000 | 1,006 | 1,012 | 1,018 | 1,024 | 1,030 | 1,036 | 44 |
| 46 ↓ | 1,036 | 1,042 | 1,048 | 1,054 | 1,060 | 1,066 | 1,072 | 43 |
| 47 | 1,072 | 1,079 | 1,085 | 1,091 | 1,098 | 1,104 | 1,111 | 42 |
| 48 | 1,111 | 1,117 | 1,124 | 1,130 | 1,137 | 1,144 | 1,150 | 41 |
| 49 | 1,150 | 1,157 | 1,164 | 1,171 | 1,178 | 1,185 | 1,192 | **40** |
| **50** | 1,192 | 1,199 | 1,206 | 1,213 | 1,220 | 1,228 | 1,235 | 39 |
| 51 | 1,235 | 1,242 | 1,250 | 1,257 | 1,265 | 1,272 | 1,280 | 38 |
| 52 | 1,280 | 1,288 | 1,295 | 1,303 | 1,311 | 1,319 | 1,327 | 37 |
| 53 | 1,327 | 1,335 | 1,343 | 1,351 | 1,360 | 1,368 | 1,376 | 36 |
| 54 | 1,376 | 1,385 | 1,393 | 1,402 | 1,411 | 1,419 | 1,428 | **35** |
| **55** | 1,428 | 1,437 | 1,446 | 1,455 | 1,464 | 1,473 | 1,483 | 34 |
| 56 | 1,483 | 1,492 | 1,501 | 1,511 | 1,520 | 1,530 | 1,540 | 33 |
| 57 | 1,540 | 1,550 | 1,560 | 1,570 | 1,580 | 1,590 | 1,600 | 32 |
| 58 | 1,600 | 1,611 | 1,621 | 1,632 | 1,643 | 1,653 | 1,664 | 31 |
| 59 | 1,664 | 1,675 | 1,686 | 1,698 | 1,709 | 1,720 | 1,732 | **30** |
| **60** | 1,732 | 1,744 | 1,756 | 1,767 | 1,780 | 1,792 | 1,804 | 29 |
| 61 | 1,804 | 1,816 | 1,829 | 1,842 | 1,855 | 1,868 | 1,881 | 28 |
| 62 | 1,881 | 1,894 | 1,907 | 1,921 | 1,935 | 1,949 | 1,963 | 27 |
| 63 | 1,963 | 1,977 | 1,991 | 2,006 | 2,020 | 2,035 | 2,050 | 26 |
| 64 | 2,050 | 2,066 | 2,081 | 2,097 | 2,112 | 2,128 | 2,145 | **25** |
| **65** | 2,145 | 2,161 | 2,177 | 2,194 | 2,211 | 2,229 | 2,246 | 24 |
| 66 | 2,246 | 2,264 | 2,282 | 2,300 | 2,318 | 2,337 | 2,356 | 23 |
| 67 | 2,356 | 2,375 | 2,394 | 2,414 | 2,434 | 2,455 | 2,475 | 22 |
| 68 | 2,475 | 2,496 | 2,517 | 2,539 | 2,560 | 2,583 | 2,605 | 21 |
| 69 | 2,605 | 2,628 | 2,651 | 2,675 | 2,699 | 2,723 | 2,747 | **20** |
| **70** | 2,747 | 2,773 | 2,798 | 2,824 | 2,850 | 2,877 | 2,904 | 19 |
| 71 | 2,904 | 2,932 | 2,960 | 2,989 | 3,018 | 3,047 | 3,078 | 18 |
| 72 | 3,078 | 3,108 | 3,140 | 3,172 | 3,204 | 3,237 | 3,271 | 17 |
| 73 | 3,271 | 3,305 | 3,340 | 3,376 | 3,412 | 3,450 | 3,487 | 16 |
| 74 | 3,487 | 3,526 | 3,566 | 3,606 | 3,647 | 3,689 | 3,732 | **15** |
| **75** | 3,732 | 3,776 | 3,821 | 3,867 | 3,914 | 3,962 | 4,011 | 14 |
| 76 | 4,011 | 4,061 | 4,113 | 4,165 | 4,219 | 4,275 | 4,331 | 13 |
| 77 | 4,331 | 4,390 | 4,449 | 4,511 | 4,574 | 4,638 | 4,705 | 12 |
| 78 | 4,705 | 4,773 | 4,843 | 4,915 | 4,989 | 5,066 | 5,145 | 11 |
| 79 | 5,145 | 5,226 | 5,309 | 5,396 | 5,485 | 5,576 | 5,671 | **10** |
| **80** | 5,671 | 5,769 | 5,871 | 5,976 | 6,084 | 6,197 | 6,314 | 9 |
| 81 | 6,314 | 6,435 | 6,561 | 6,691 | 6,827 | 6,968 | 7,115 | 8 |
| 82 | 7,115 | 7,269 | 7,429 | 7,596 | 7,770 | 7,953 | 8,144 | 7 |
| 83 | 8,144 | 8,345 | 8,556 | 8,777 | 9,010 | 9,255 | 9,514 | 6 |
| 84 | 9,514 | 9,788 | 10,078 | 10,385 | 10,712 | 11,059 | 11,430 | **5** |
| **85** | 11,430 | 11,826 | 12,251 | 12,706 | 13,197 | 13,727 | 14,301 | 4 |
| 86 | 14,301 | 14,924 | 15,605 | 16,350 | 17,169 | 18,075 | 19,081 | 3 |
| 87 | 19,081 | 20,206 | 21,470 | 22,904 | 24,542 | 26,432 | 28,636 | 2 |
| 88 | 28,636 | 31,242 | 34,368 | 38,188 | 42,964 | 49,104 | 57,290 | ↑ 1 |
| 89 | 57,290 | 68,750 | 85,940 | 114,59 | 171,89 | 343,77 | $\infty$ | **0** |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ ← | Grados |

*Cotangentes*

## *10. Funciones exponenciales, hiperbólicas y trigonométricas*

Para $x$ desde 0 hasta 1,6 (el argumento está dado en radianes)

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ | sen $x$ | cos $x$ | tg $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,00** | 1,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 |
| 01 | 1,0101 | 0,9900 | 0,0100 | 1,0001 | 0,0100 | 0,0100 | 1,0000 | 0,0100 |
| 02 | 1,0202 | 0,9802 | 0,0200 | 1,0002 | 0,0200 | 0,0200 | 0,9998 | 0,0200 |
| 03 | 1,0305 | 0,9704 | 0,0300 | 1,0005 | 0,0300 | 0,0300 | 0,9996 | 0,0300 |
| 04 | 1,0408 | 0,9608 | 0,0400 | 1,0008 | 0,0400 | 0.0400 | 0,9992 | 0,0400 |
| **0,05** | 1,0513 | 0,9512 | 0,0500 | 1,0013 | 0,0500 | 0,0500 | 0,9988 | 0,0500 |
| 06 | 1,0618 | 0,9418 | 0,0600 | 1,0018 | 0,0599 | 0,0600 | 0,9982 | 0,0601 |
| 07 | 1,0725 | 0,9324 | 0,0701 | 1,0025 | 0,0699 | 0,0699 | 0,9976 | 0,0701 |
| 08 | 1,0833 | 0,9231 | 0,0801 | 1,0032 | 0,0798 | 0,0799 | 0,9968 | 0,0802 |
| 09 | 1,0942 | 0,9139 | 0,0901 | 1,0041 | 0,0898 | 0,0899 | 0,9960 | 0,0902 |
| **0,10** | 1,1052 | 0,9048 | 0,1002 | 1,0050 | 0,0997 | 0,0998 | 0,9950 | 0,1003 |
| 11 | 1,1163 | 0,8958 | 0,1102 | 1,0061 | 0,1096 | 0,1098 | 0,9940 | 0,1104 |
| 12 | 1,1275 | 0,8869 | 0,1203 | 1,0072 | 0,1194 | 0,1197 | 0,9928 | 0,1206 |
| 13 | 1,1388 | 0,8781 | 0,1304 | 1,0085 | 0,1293 | 0,1296 | 0,9916 | 0,1307 |
| 14 | 1,1503 | 0,8694 | 0,1405 | 1,0098 | 0,1391 | 0,1395 | 0,9902 | 0,1409 |
| **0,15** | 1,1618 | 0.8607 | 0,1506 | 1,0113 | 0,1489 | 0,1494 | 0,9888 | 0,1511 |
| 16 | 1,1735 | 0,8521 | 0,1607 | 1,0128 | 0,1586 | 0,1593 | 0,9872 | 0,1614 |
| 17 | 1,1853 | 0,8437 | 0,1708 | 1,0145 | 0,1684 | 0,1692 | 0,9856 | 0,1717 |
| 18 | 1,1972 | 0,8353 | 0,1810 | 1,0162 | 0,1781 | 0,1790 | 0,9838 | 0,1820 |
| 19 | 1,2092 | 0,8270 | 0,1911 | 1,0181 | 0,1877 | 0,1889 | 0,9820 | 0,1923 |
| **0,20** | 1,2214 | 0,8187 | 0,2013 | 1,0201 | 0,1974 | 0,1987 | 0,9801 | 0,2027 |
| 21 | 1,2337 | 0,8106 | 0,2115 | 1,0221 | 0,2070 | 0,2085 | 0,9780 | 0,2131 |
| 22 | 1,2461 | 0,8025 | 0,2218 | 1,0243 | 0,2165 | 0,2182 | 0,9759 | 0,2236 |
| 23 | 1,2586 | 0,7945 | 0,2320 | 1,0266 | 0,2260 | 0,2280 | 0,9737 | 0,2341 |
| 24 | 1,2712 | 0,7866 | 0,2423 | 1,0289 | 0,2355 | 0,2377 | 0,9713 | 0,2447 |
| **0,25** | 1,2840 | 0,7788 | 0,2526 | 1,0314 | 0,2449 | 0,2474 | 0,9689 | 0,2553 |
| 26 | 1,2969 | 0,7711 | 0,2629 | 1,0340 | 0,2543 | 0,2571 | 0,9664 | 0,2660 |
| 27 | 1,3100 | 0,7634 | 0,2733 | 1,0367 | 0,2636 | 0,2667 | 0,9638 | 0,2768 |
| 28 | 1,3231 | 0,7558 | 0,2837 | 1,0395 | 0,2729 | 0,2764 | 0,9611 | 0,2876 |
| 29 | 1,3364 | 0,7483 | 0,2941 | 1,0423 | 0,2821 | 0,2860 | 0,9582 | 0,2984 |
| **0,30** | 1,3499 | 0,7408 | 0,3045 | 1,0453 | 0,2913 | 0,2955 | 0,9553 | 0,3093 |
| 31 | 1,3634 | 0,7334 | 0,3150 | 1,0484 | 0,3004 | 0,3051 | 0,9523 | 0,3203 |
| 32 | 1,3771 | 0,7261 | 0,3255 | 1,0516 | 0,3095 | 0,3146 | 0,9492 | 0,3314 |
| 33 | 1,3910 | 0,7189 | 0,3360 | 1,0549 | 0,3185 | 0,3240 | 0,9460 | 0,3425 |
| 34 | 1,4049 | 0,7118 | 0,3466 | 1,0584 | 0,3275 | 0,3335 | 0,9428 | 0,3537 |
| **0,35** | 1,4191 | 0,7047 | 0,3572 | 1,0619 | 0,3364 | 0,3429 | 0,9394 | 0,3650 |
| 36 | 1,4333 | 0,6977 | 0,3678 | 1,0655 | 0,3452 | 0,3523 | 0,9359 | 0,3764 |
| 37 | 1,4477 | 0,6907 | 0,3785 | 1,0692 | 0,3540 | 0,3616 | 0,9323 | 0,3879 |
| 38 | 1,4623 | 0,6839 | 0,3892 | 1,0731 | 0,3627 | 0,3709 | 0,9287 | 0,3994 |
| 39 | 1,4770 | 0,6771 | 0,4000 | 1,0770 | 0,3714 | 0,3802 | 0,9249 | 0,4111 |
| **0,40** | 1,4918 | 0,6703 | 0,4108 | 1,0811 | 0,3799 | 0,3894 | 0,9211 | 0,4228 |
| 41 | 1,5068 | 0,6637 | 0,4216 | 1,0852 | 0,3885 | 0,3986 | 0,9171 | 0,4346 |
| 42 | 1,5220 | 0,6570 | 0,4325 | 1,0895 | 0,3969 | 0,4078 | 0,9131 | 0,4466 |
| 43 | 1,5373 | 0,6505 | 0,4434 | 1,0939 | 0,4053 | 0,4169 | 0,9090 | 0,4586 |
| 44 | 1,5527 | 0,6440 | 0,4543 | 1,0984 | 0,4136 | 0,4259 | 0,9048 | 0,4708 |
| **0,45** | 1,5683 | 0,6376 | 0,4653 | 1,1030 | 0,4219 | 0,4350 | 0,9004 | 0,4831 |

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ | sen $x$ | cos $x$ | tg $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,45** | 1,5683 | 0,6376 | 0,4653 | 1,1030 | 0,4219 | 0,4350 | 0,9004 | 0,4831 |
| 46 | 1,5841 | 0,6313 | 0,4764 | 1,1077 | 0,4301 | 0,4439 | 0,8961 | 0,4954 |
| 47 | 1,6000 | 0,6250 | 0,4875 | 1,1125 | 0,4382 | 0,4529 | 0,8916 | 0,5080 |
| 48 | 1,6161 | 0,6188 | 0,4986 | 1,1174 | 0,4462 | 0,4618 | 0,8870 | 0,5206 |
| 49 | 1,6323 | 0,6126 | 0,5098 | 1,1225 | 0,4542 | 0,4706 | 0,8823 | 0,5334 |
| **0,50** | 1,6487 | 0,6065 | 0,5211 | 1,1276 | 0,4621 | 0,4794 | 0,8776 | 0,5463 |
| 51 | 1,6653 | 0,6005 | 0,5324 | 1,1329 | 0,4699 | 0,4882 | 0,8727 | 0,5594 |
| 52 | 1,6820 | 0,5945 | 0,5438 | 1,1383 | 0,4777 | 0,4969 | 0,8678 | 0,5726 |
| 53 | 1,6989 | 0,5886 | 0,5552 | 1,1438 | 0,4854 | 0,5055 | 0,8628 | 0,5859 |
| 54 | 1,7160 | 0,5827 | 0,5666 | 1,1494 | 0,4930 | 0,5141 | 0,8577 | 0,5994 |
| **0,55** | 1,7333 | 0,5769 | 0,5782 | 1,1551 | 0,5005 | 0,5227 | 0,8525 | 0,6131 |
| 56 | 1,7507 | 0,5712 | 0,5897 | 1,1609 | 0,5080 | 0,5312 | 0,8473 | 0,6269 |
| 57 | 1,7683 | 0,5655 | 0,6014 | 1,1669 | 0,5154 | 0,5396 | 0,8419 | 0,6410 |
| 58 | 1,7860 | 0,5599 | 0,6131 | 1,1730 | 0,5227 | 0,5480 | 0,8365 | 0,6552 |
| 59 | 1,8040 | 0,5543 | 0,6248 | 1,1792 | 0,5299 | 0,5564 | 0,8309 | 0,6696 |
| **0,60** | 1,8221 | 0,5488 | 0,6367 | 1,1855 | 0,5370 | 0,5646 | 0,8253 | 0,6841 |
| 61 | 1,8404 | 0,5434 | 0,6485 | 1,1919 | 0,5441 | 0,5729 | 0,8196 | 0,6989 |
| 62 | 1,8589 | 0,5379 | 0,6605 | 1,1984 | 0,5511 | 0,5810 | 0,8139 | 0,7139 |
| 63 | 1,8776 | 0,5326 | 0,6725 | 1,2051 | 0,5581 | 0,5891 | 0,8080 | 0,7291 |
| 64 | 1,8965 | 0,5273 | 0,6846 | 1,2119 | 0,5649 | 0,5972 | 0,8021 | 0,7445 |
| **0,65** | 1,9155 | 0,5220 | 0,6967 | 1,2188 | 0,5717 | 0,6052 | 0,7961 | 0,7602 |
| 66 | 1,9348 | 0,5169 | 0,7090 | 1,2258 | 0,5784 | 0,6131 | 0,7900 | 0,7761 |
| 67 | 1,9542 | 0,5117 | 0,7213 | 1,2330 | 0,5850 | 0,6210 | 0,7838 | 0,7923 |
| 68 | 1,9739 | 0,5066 | 0,7336 | 1,2402 | 0,5915 | 0,6288 | 0,7776 | 0,8087 |
| 69 | 1,9937 | 0,5016 | 0,7461 | 1,2476 | 0,5980 | 0,6365 | 0,7712 | 0,8253 |
| **0,70** | 2,0138 | 0,4966 | 0,7586 | 1,2552 | 0,6044 | 0,6442 | 0,7648 | 0,8423 |
| 71 | 2,0340 | 0,4916 | 0,7712 | 1,2628 | 0,6107 | 0,6518 | 0,7584 | 0,8595 |
| 72 | 2,0544 | 0,4868 | 0,7838 | 1,2706 | 0,6169 | 0,6594 | 0,7518 | 0,8771 |
| 73 | 2,0751 | 0,4819 | 0,7966 | 1,2785 | 0,6231 | 0,6669 | 0,7452 | 0,8949 |
| 74 | 2,0959 | 0,4771 | 0,8094 | 1,2865 | 0,6291 | 0,6743 | 0,7385 | 0,9131 |
| **0,75** | 2,1170 | 0,4724 | 0,8223 | 1,2947 | 0,6351 | 0,6816 | 0,7317 | 0,9316 |
| 76 | 2,1383 | 0,4677 | 0,8353 | 1,3030 | 0,6411 | 0,6889 | 0,7248 | 0,9505 |
| 77 | 2,1598 | 0,4630 | 0,8484 | 1,3114 | 0,6459 | 0,6961 | 0,7179 | 0,9697 |
| 78 | 2,1815 | 0,4584 | 0,8615 | 1,3199 | 0,6527 | 0,7033 | 0,7109 | 0,9893 |
| 79 | 2,2034 | 0,4538 | 0,8748 | 1,3286 | 0,6584 | 0,7104 | 0,7038 | 1,0092 |
| **0,80** | 2,2255 | 0,4493 | 0,8881 | 1,3374 | 0,6640 | 0,7174 | 0,6967 | 1,0296 |

Valores múltiples de $\pi$ y $\frac{\pi}{2}$
para calcular las funciones trigonométricas, para $x > 1{,}6$:

| $n$ | $n\cdot\frac{\pi}{2}$ | $n\cdot\pi$ | $n$ | $n\cdot\frac{\pi}{2}$ | $n\cdot\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,57080 | 3,14159 | 6 | 9,42478 | 18,84956 |
| 2 | 3,14159 | 6,28319 | 7 | 10,99557 | 21,99115 |
| 3 | 4,71239 | 9,42478 | 8 | 12,56637 | 25,13274 |
| 4 | 6,28319 | 12,56637 | 9 | 14,13717 | 28,27433 |
| 5 | 7,85398 | 15,70796 | 10 | 15,70796 | 31,41593 |

*Ejemplos:*

1) $\text{sen } 7{,}5 =$
$= \text{sen}\left(5\cdot\frac{\pi}{2} - 0{,}35398\right) =$
$= \cos 0{,}35398 = 0{,}9380$
(¡interpolación lineal!)

2) $\text{sen } 29 = \text{sen}(9\pi + 0{,}72567) =$
$= -\text{sen } 0{,}72567 = -0{,}6637$
(¡interpolación lineal!)

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ | sen $x$ | cos $x$ | tg $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,80** | 2,2255 | 0,4493 | 0,8881 | 1,3374 | 0,6640 | 0,7174 | 0,6967 | 1,0296 |
| 81 | 2,2479 | 0,4449 | 0,9015 | 1,3464 | 0,6696 | 0,7243 | 0,6895 | 1,0505 |
| 82 | 2,2705 | 0,4404 | 0,9150 | 1,3555 | 0,6751 | 0,7311 | 0,6822 | 1,0717 |
| 83 | 2,2933 | 0,4360 | 0,9286 | 1,3647 | 0,6805 | 0,7379 | 0,6749 | 1,0934 |
| 84 | 2,3164 | 0,4317 | 0,9423 | 1,3740 | 0,6858 | 0,7446 | 0,6675 | 1,1156 |
| **0,85** | 2,3396 | 0,4274 | 0,9561 | 1,3835 | 0,6911 | 0,7513 | 0,6600 | 1,1383 |
| 86 | 2,3632 | 0,4232 | 0,9700 | 1,3932 | 0,6963 | 0,7578 | 0,6524 | 1,1616 |
| 87 | 2,3869 | 0,4190 | 0,9840 | 1,4029 | 0,7014 | 0,7643 | 0,6448 | 1,1853 |
| 88 | 2,4109 | 0,4148 | 0,9981 | 1,4128 | 0,7064 | 0,7707 | 0,6372 | 1,2097 |
| 89 | 2,4351 | 0,4107 | 1,0122 | 1,4229 | 0,7114 | 0,7771 | 0,6294 | 1,2346 |
| **0,90** | 2,4596 | 0,4066 | 1,0265 | 1,4331 | 0,7163 | 0.7833 | 0,6216 | 1,2602 |
| 91 | 2,4843 | 0,4025 | 1,0409 | 1,4434 | 0,7211 | 0,7895 | 0,6137 | 1,2864 |
| 92 | 2,5093 | 0,3985 | 1,0554 | 1,4539 | 0,7259 | 0,7956 | 0,6058 | 1,3133 |
| 93 | 2,5345 | 0,3946 | 1,0700 | 1,4645 | 0,7306 | 0,8016 | 0,5978 | 1,3409 |
| 94 | 2,5600 | 0,3906 | 1,0847 | 1,4753 | 0,7352 | 0,8076 | 0,5898 | 1,3692 |
| **0,95** | 2,5857 | 0,3867 | 1,0995 | 1,4862 | 0,7398 | 0,8134 | 0,5817 | 1,3984 |
| 96 | 2,6117 | 0,3829 | 1,1144 | 1,4973 | 0,7443 | 0,8192 | 0,5735 | 1,4284 |
| 97 | 2,6379 | 0,3791 | 1,1294 | 1,5085 | 0,7487 | 0,8249 | 0,5653 | 1,4592 |
| 98 | 2,6645 | 0,3753 | 1,1446 | 1,5199 | 0,7531 | 0,8305 | 0,5570 | 1,4910 |
| 99 | 2,6912 | 0,3716 | 1,1598 | 1,5314 | 0,7574 | 0,8360 | 0,5487 | 1,5237 |
| **1,00** | 2,7183 | 0,3679 | 1,1752 | 1,5431 | 0,7616 | 0,8415 | 0,5403 | 1,5574 |
| 01 | 2,7456 | 0,3642 | 1,1907 | 1,5549 | 0,7658 | 0,8468 | 0,5319 | 1,5922 |
| 02 | 2,7732 | 0,3606 | 1,2063 | 1,5669 | 0,7699 | 0,8521 | 0,5234 | 1,6281 |
| 03 | 2,8011 | 0,3570 | 1,2220 | 1,5790 | 0,7739 | 0,8573 | 0,5148 | 1,6652 |
| 04 | 2,8292 | 0,3535 | 1,2379 | 1,5913 | 0,7779 | 0,8624 | 0,5062 | 1,7036 |
| **1,05** | 2,8577 | 0,3499 | 1,2539 | 1,6038 | 0,7818 | 0,8674 | 0,4976 | 1,7433 |
| 06 | 2,8864 | 0,3465 | 1,2700 | 1,6164 | 0,7857 | 0,8724 | 0,4889 | 1,7844 |
| 07 | 2,9154 | 0,3430 | 1,2862 | 1,6292 | 0,7895 | 0,8772 | 0,4801 | 1,8270 |
| 08 | 2,9447 | 0,3396 | 1,3025 | 1,6421 | 0,7932 | 0,8820 | 0,4713 | 1,8712 |
| 09 | 2,9743 | 0,3362 | 1,3190 | 1,6552 | 0,7969 | 0,8866 | 0,4625 | 1,9171 |
| **1,10** | 3,0042 | 0,3329 | 1,3356 | 1,6685 | 0,8005 | 0,8912 | 0,4536 | 1,9648 |
| 11 | 3,0344 | 0,3296 | 1,3524 | 1,6820 | 0,8041 | 0,8957 | 0,4447 | 2,0143 |
| 12 | 3,0649 | 0,3263 | 1,3693 | 1,6956 | 0,8076 | 0,9001 | 0,4357 | 2,0660 |
| 13 | 3,0957 | 0,3230 | 1,3863 | 1,7093 | 0,8110 | 0,9044 | 0,4267 | 2,1198 |
| 14 | 3,1268 | 0,3198 | 1,4035 | 1,7233 | 0,8144 | 0,9086 | 0,4176 | 2,1759 |
| **1,15** | 3,1582 | 0,3166 | 1,4208 | 1,7374 | 0,8178 | 0,9128 | 0,4085 | 2,2345 |
| 16 | 3,1899 | 0,3135 | 1,4382 | 1,7517 | 0,8210 | 0,9168 | 0,3993 | 2,2958 |
| 17 | 3,2220 | 0,3104 | 1,4558 | 1,7662 | 0,8243 | 0,9208 | 0,3902 | 2,3600 |
| 18 | 3,2544 | 0,3073 | 1,4735 | 1,7808 | 0,8275 | 0,9246 | 0,3809 | 2,4273 |
| 19 | 3,2871 | 0,3042 | 1,4914 | 1,7957 | 0,8306 | 0,9284 | 0,3717 | 2,4979 |
| **1,20** | 3,3201 | 0,3012 | 1,5095 | 1,8107 | 0,8337 | 0,9320 | 0,3624 | 2,5722 |
| 21 | 3,3535 | 0,2982 | 1,5276 | 1,8258 | 0,8367 | 0,9356 | 0,3530 | 2,6503 |
| 22 | 3,3872 | 0,2952 | 1,5460 | 1,8412 | 0,8397 | 0,9391 | 0,3436 | 2,7328 |
| 23 | 3,4212 | 0,2923 | 1,5645 | 1,8568 | 0,8426 | 0,9425 | 0,3342 | 2,8198 |
| 24 | 3,4556 | 0,2894 | 1,5831 | 1,8725 | 0,8455 | 0,9458 | 0,3248 | 2,9119 |
| **1,25** | 3,4903 | 0,2865 | 1,6019 | 1,8884 | 0,8483 | 0,9490 | 0,3153 | 3,0096 |

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | sh $x$ | ch $x$ | th $x$ | sen $x$ | cos $x$ | tg $x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,25** | 3,4903 | 0,2865 | 1,6019 | 1,8884 | 0,8483 | 0,9490 | 0,3153 | 3,0096 |
| 26 | 3,5254 | 0,2837 | 1,6209 | 1,9045 | 0,8511 | 0,9521 | 0,3058 | 3,1133 |
| 27 | 3,5609 | 0,2808 | 1,6400 | 1,9208 | 0,8538 | 0,9551 | 0,2963 | 3,2236 |
| 28 | 3,5966 | 0,2780 | 1,6593 | 1,9373 | 0,8565 | 0,9580 | 0,2867 | 3,3413 |
| 29 | 3,6328 | 0,2753 | 1,6788 | 1,9540 | 0,8591 | 0,9608 | 0,2771 | 3,4672 |
| **1,30** | 3,6693 | 0,2725 | 1,6984 | 1,9709 | 0,8617 | 0,9636 | 0,2675 | 3,6021 |
| 31 | 3,7062 | 0,2698 | 1,7182 | 1,9880 | 0,8643 | 0,9662 | 0,2579 | 3,7471 |
| 32 | 3,7434 | 0,2671 | 1,7381 | 2,0053 | 0,8668 | 0,9687 | 0,2482 | 3,9033 |
| 33 | 3,7810 | 0,2645 | 1,7583 | 2,0228 | 0,8692 | 0,9711 | 0,2385 | 4,0723 |
| 34 | 3,8190 | 0,2618 | 1,7786 | 2,0404 | 0,8717 | 0,9735 | 0,2288 | 4,2556 |
| **1,35** | 3,8574 | 0,2592 | 1,7991 | 2,0583 | 0,8741 | 0,9757 | 0,2190 | 4,4552 |
| 36 | 3,8962 | 0,2567 | 1,8198 | 2,0764 | 0,8764 | 0,9779 | 0,2092 | 4,6734 |
| 37 | 3,9354 | 0,2541 | 1,8406 | 2,0947 | 0,8787 | 0,9799 | 0,1994 | 4,9131 |
| 38 | 3,9749 | 0,2516 | 1,8617 | 2,1132 | 0,8810 | 0,9819 | 0,1896 | 5,1774 |
| 39 | 4,0149 | 0,2491 | 1,8829 | 2,1320 | 0,8832 | 0,9837 | 0,1798 | 5,4707 |
| **1,40** | 4,0552 | 0,2466 | 1,9043 | 2,1509 | 0,8854 | 0,9854 | 0,1700 | 5,7979 |
| 41 | 4,0960 | 0,2441 | 1,9259 | 2,1700 | 0,8875 | 0,9871 | 0,1601 | 6,1654 |
| 42 | 4,1371 | 0,2417 | 1,9477 | 2,1894 | 0,8896 | 0,9887 | 0,1502 | 6,5811 |
| 43 | 4,1787 | 0,2393 | 1,9697 | 2,2090 | 0,8917 | 0,9901 | 0,1403 | 7,0555 |
| 44 | 4,2207 | 0,2369 | 1,9919 | 2,2288 | 0,8937 | 0,9915 | 0,1304 | 7,6018 |
| **1,45** | 4,2631 | 0,2346 | 2,0143 | 2,2488 | 0,8957 | 0,9927 | 0,1205 | 8,2381 |
| 46 | 4,3060 | 0,2322 | 2,0369 | 2,2691 | 0,8977 | 0,9939 | 0,1106 | 8,9886 |
| 47 | 4,3492 | 0,2299 | 2,0597 | 2,2896 | 0,8996 | 0,9949 | 0,1006 | 9,8874 |
| 48 | 4,3929 | 0,2276 | 2,0827 | 2,3103 | 0,9015 | 0,9959 | 0,0907 | 10,983 |
| 49 | 4,4371 | 0,2254 | 2,1059 | 2,3312 | 0,9033 | 0,9967 | 0,0807 | 12,350 |
| **1,50** | 4,4817 | 0,2231 | 2,1293 | 2,3524 | 0,9051 | 0,9975 | 0,0707 | 14,101 |
| 51 | 4,5267 | 0,2209 | 2,1529 | 2,3738 | 0,9069 | 0,9982 | 0,0608 | 16,428 |
| 52 | 4,5722 | 0,2187 | 2,1768 | 2,3955 | 0,9087 | 0,9987 | 0,0508 | 19,670 |
| 53 | 4,6182 | 0,2165 | 2,2008 | 2,4174 | 0,9104 | 0,9992 | 0,0408 | 24,498 |
| 54 | 4,6646 | 0,2144 | 2,2251 | 2,4395 | 0,9121 | 0,9995 | 0,0308 | 32,461 |
| **1,55** | 4,7115 | 0,2122 | 2,2496 | 2,4619 | 0,9138 | 0,9998 | 0,0208 | 48,078 |
| 56 | 4,7588 | 0,2101 | 2,2743 | 2,4845 | 0,9154 | 0,9999 | 0,0108 | 92,620 |
| 57 | 4,8066 | 0,2080 | 2,2993 | 2,5073 | 0,9170 | 1,0000 | +0,0008 | 1255,8 |
| 58 | 4,8550 | 0,2060 | 2,3245 | 2,5305 | 0,9186 | 1,0000 | −0,0092 | −108,65 |
| 59 | 4,9037 | 0,2039 | 2,3499 | 2,5538 | 0,9201 | 0,9998 | −0,0192 | −52,067 |
| **1,60** | 4,9530 | 0,2019 | 2,3756 | 2,5775 | 0,9217 | 0,9996 | −0,0292 | −34,233 |

Valores múltiples de $\pi$ y $\frac{\pi}{2}$ para calcular las funciones trigonométricas, para $x > 1{,}6$:

| $n$ | $n\cdot\frac{\pi}{2}$ | $n\cdot\pi$ | $n$ | $n\cdot\frac{\pi}{2}$ | $n\cdot\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,57080 | 3,14159 | 6 | 9,42478 | 18,84956 |
| 2 | 3,14159 | 6,28319 | 7 | 10,99557 | 21,99115 |
| 3 | 4,71239 | 9,42478 | 8 | 12,56637 | 25,13274 |
| 4 | 6,28319 | 12,56637 | 9 | 14,13717 | 28,27433 |
| 5 | 7,85398 | 15,70796 | 10 | 15,70796 | 31,41593 |

Para $x > 1{,}6$ los valores de $e^x$, $e^{-x}$, sh $x$, ch $x$ y th $x$ se encuentran en la tabla 11; los valores de las funciones trigonométricas se hallan por las fórmulas de reducción (véase pág. 208). Véanse los ejemplos en la pág. 58.

## *11. Funciones exponenciales (desde $x=1{,}6$ hasta $x=10{,}0$)**

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,60** | 4,9530 | 0,2019 | **2,00** | 7,3891 | 0,1353 | **2,40** | 11,023 | 0,09072 |
| 1,61 | 5,0028 | 0,1999 | 2,01 | 7,4633 | 0,1340 | 2,41 | 11,134 | 0,08982 |
| 1,62 | 5,0531 | 0,1979 | 2,02 | 7,5383 | 0,1327 | 2,42 | 11,246 | 0,08892 |
| 1,63 | 5,1039 | 0,1959 | 2,03 | 7,6141 | 0,1313 | 2,43 | 11,359 | 0,08804 |
| 1,64 | 5,1552 | 0,1940 | 2,04 | 7,6906 | 0,1300 | 2,44 | 11,473 | 0,08716 |
| **1,65** | 5,2070 | 0,1920 | **2,05** | 7,7679 | 0,1287 | **2,45** | 11,588 | 0,08629 |
| 1,66 | 5,2593 | 0,1901 | 2,06 | 7,8460 | 0,1275 | 2,46 | 11,705 | 0,08543 |
| 1,67 | 5,3122 | 0,1882 | 2,07 | 7,9248 | 0,1262 | 2,47 | 11,822 | 0,08458 |
| 1,68 | 5,3656 | 0,1864 | 2,08 | 8,0045 | 0,1249 | 2,48 | 11,941 | 0,08374 |
| 1,69 | 5,4195 | 0,1845 | 2,09 | 8,0849 | 0,1237 | 2,49 | 12,061 | 0,08291 |
| **1,70** | 5,4739 | 0,1827 | **2,10** | 8,1662 | 0,1225 | **2,50** | 12,182 | 0,08208 |
| 1,71 | 5,5290 | 0,1809 | 2,11 | 8,2482 | 0,1212 | 2,51 | 12,305 | 0,08127 |
| 1,72 | 5,5845 | 0,1791 | 2,12 | 8,3311 | 0,1200 | 2,52 | 12,429 | 0,08046 |
| 1,73 | 5,6407 | 0,1773 | 2,13 | 8,4149 | 0,1188 | 2,53 | 12,554 | 0,07966 |
| 1,74 | 5,6973 | 0,1755 | 2,14 | 8,4994 | 0,1177 | 2,54 | 12,680 | 0,07887 |
| **1,75** | 5,7546 | 0,1738 | **2,15** | 8,5849 | 0,1165 | **2,55** | 12,807 | 0,07808 |
| 1,76 | 5,8124 | 0,1720 | 2,16 | 8,6711 | 0,1153 | 2,56 | 12,936 | 0,07730 |
| 1,77 | 5,8709 | 0,1703 | 2,17 | 8,7583 | 0,1142 | 2,57 | 13,066 | 0,07654 |
| 1,78 | 5,9299 | 0,1686 | 2,18 | 8,8463 | 0,1130 | 2,58 | 13,197 | 0,07577 |
| 1,79 | 5,9895 | 0,1670 | 2,19 | 8,9352 | 0,1119 | 2,59 | 13,330 | 0,07502 |
| **1,80** | 6,0496 | 0,1653 | **2,20** | 9,0250 | 0,1108 | **2,60** | 13,464 | 0,07427 |
| 1,81 | 6,1104 | 0,1637 | 2,21 | 9,1157 | 0,1097 | 2,61 | 13,599 | 0,07353 |
| 1,82 | 6,1719 | 0,1620 | 2,22 | 9,2073 | 0,1086 | 2,62 | 13,736 | 0,07280 |
| 1,83 | 6,2339 | 0,1604 | 2,23 | 9,2999 | 0,1075 | 2,63 | 13,874 | 0,07208 |
| 1,84 | 6,2965 | 0,1588 | 2,24 | 9,3933 | 0,1065 | 2,64 | 14,013 | 0,07136 |
| **1,85** | 6,3598 | 0,1572 | **2,25** | 9,4877 | 0,1054 | **2,65** | 14,154 | 0,07065 |
| 1,86 | 6,4237 | 0,1557 | 2,26 | 9,5831 | 0,1044 | 2,66 | 14,296 | 0,06995 |
| 1,87 | 6,4883 | 0,1541 | 2,27 | 9,6794 | 0,1033 | 2,67 | 14,440 | 0,06925 |
| 1,88 | 6,5535 | 0,1526 | 2,28 | 9,7767 | 0,1023 | 2,68 | 14,585 | 0,06856 |
| 1,89 | 6,6194 | 0,1511 | 2,29 | 9,8749 | 0,1013 | 2,69 | 14,732 | 0,06788 |
| **1,90** | 6,6859 | 0,1496 | **2,30** | 9,9742 | 0,10026 | **2,70** | 14,880 | 0,06721 |
| 1,91 | 6,7531 | 0,1481 | 2,31 | 10,074 | 0,09926 | 2,71 | 15,029 | 0,06654 |
| 1,92 | 6,8210 | 0,1466 | 2,32 | 10,176 | 0,09827 | 2,72 | 15,180 | 0,06587 |
| 1,93 | 6,8895 | 0,1451 | 2,33 | 10,278 | 0,09730 | 2,73 | 15,333 | 0,06522 |
| 1,94 | 6,9588 | 0,1437 | 2,34 | 10,381 | 0,09633 | 2,74 | 15,487 | 0,06457 |
| **1,95** | 7,0287 | 0,1423 | **2,35** | 10,486 | 0,09537 | **2,75** | 15,643 | 0,06393 |
| 1,96 | 7,0993 | 0,1409 | 2,36 | 10,591 | 0,09442 | 2,76 | 15,800 | 0,06329 |
| 1,97 | 7,1707 | 0,1395 | 2,37 | 10,697 | 0,09348 | 2,77 | 15,959 | 0,06266 |
| 1,98 | 7,2427 | 0,1381 | 2,38 | 10,805 | 0,09255 | 2,78 | 16,119 | 0,06204 |
| 1,99 | 7,3155 | 0,1367 | 2,39 | 10,913 | 0,09163 | 2,79 | 16,281 | 0,06142 |
| **2,00** | 7,3891 | 0,1353 | **2,40** | 11,023 | 0,09072 | **2,80** | 16,445 | 0,06081 |

* Para calcular las funciones hiperbólicas para $x > 1{,}6$ se pueden emplear las fórmulas:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2,80** | 16,445 | 0,06081 | **3,25** | 25,790 | 0,03877 | **3,70** | 40,447 | 0,02472 |
| 2,81 | 16,610 | 0,06020 | 3,26 | 26,050 | 0,03839 | 3,71 | 40,854 | 0,02448 |
| 2,82 | 16,777 | 0,05961 | 3,27 | 26,311 | 0,03801 | 3,72 | 41,264 | 0,02423 |
| 2,83 | 16,945 | 0,05901 | 3,28 | 26,576 | 0,03763 | 3,73 | 41,679 | 0,02399 |
| 2,84 | 17,116 | 0,05843 | 3,29 | 26,843 | 0,03725 | 3,74 | 42,098 | 0,02375 |
| **2,85** | 17,288 | 0,05784 | **3,30** | 27,113 | 0,03688 | **3,75** | 42,521 | 0,02352 |
| 2,86 | 17,462 | 0,05727 | 3,31 | 27,385 | 0,03652 | 3,76 | 42,948 | 0,02328 |
| 2,87 | 17,637 | 0,05670 | 3,32 | 27,660 | 0,03615 | 3,77 | 43,380 | 0,02305 |
| 2,88 | 17,814 | 0,05613 | 3,33 | 27,938 | 0,03579 | 3,78 | 43,816 | 0,02282 |
| 2,89 | 17,993 | 0,05558 | 3,34 | 28,219 | 0,03544 | 3,79 | 44,256 | 0,02260 |
| **2,90** | 18,174 | 0,05502 | **3,35** | 28,503 | 0,03508 | **3,80** | 44,701 | 0,02237 |
| 2,91 | 18,357 | 0,05448 | 3,36 | 28,789 | 0,03474 | 3,81 | 45,150 | 0,02215 |
| 2,92 | 18,541 | 0,05393 | 3,37 | 29,079 | 0,03439 | 3,82 | 45,604 | 0,02193 |
| 2,93 | 18,728 | 0,05340 | 3,38 | 29,371 | 0,03405 | 3,83 | 46,063 | 0,02171 |
| 2,94 | 18,916 | 0,05287 | 3,39 | 29,666 | 0,03371 | 3,84 | 46,525 | 0,02149 |
| **2,95** | 19,106 | 0,05234 | **3,40** | 29,964 | 0,03337 | **3,85** | 46,993 | 0,02128 |
| 2,96 | 19,298 | 0,05182 | 3,41 | 30,265 | 0,03304 | 3,86 | 47,465 | 0,02107 |
| 2,97 | 19,492 | 0,05130 | 3,42 | 30,569 | 0,03271 | 3,87 | 47,942 | 0,02086 |
| 2,98 | 19,688 | 0,05079 | 3,43 | 30,877 | 0,03239 | 3,88 | 48,424 | 0,02065 |
| 2,99 | 19,886 | 0,05029 | 3,44 | 31,187 | 0,03206 | 3,89 | 48,911 | 0,02045 |
| **3,00** | 20,086 | 0,04979 | **3,45** | 31,500 | 0,03175 | **3,90** | 49,402 | 0,02024 |
| 3,01 | 20,287 | 0,04929 | 3,46 | 31,817 | 0,03143 | 3,91 | 49,899 | 0,02004 |
| 3,02 | 20,491 | 0,04880 | 3,47 | 32,137 | 0,03112 | 3,92 | 50,400 | 0,01984 |
| 3,03 | 20,697 | 0,04832 | 3,48 | 32,460 | 0,03081 | 3,93 | 50,907 | 0,01964 |
| 3,04 | 20,905 | 0,04783 | 3,49 | 32,786 | 0,03050 | 3,94 | 51,419 | 0,01945 |
| **3,05** | 21,115 | 0,04736 | **3,50** | 33,115 | 0,03020 | **3,95** | 51,935 | 0,01925 |
| 3,06 | 21,328 | 0,04689 | 3,51 | 33,448 | 0,02990 | 3,96 | 52,457 | 0,01906 |
| 3,07 | 21,542 | 0,04642 | 3,52 | 33,784 | 0,02960 | 3,97 | 52,985 | 0,01887 |
| 3,08 | 21,758 | 0,04596 | 3,53 | 34,124 | 0,02930 | 3,98 | 53,517 | 0,01869 |
| 3,09 | 21,977 | 0,04550 | 3,54 | 34,467 | 0,02901 | 3,99 | 54,055 | 0,01850 |
| **3,10** | 22,198 | 0,04505 | **3,55** | 34,813 | 0,02872 | **4,0** | 54,598 | 0,01832 |
| 3,11 | 22,421 | 0,04460 | 3,56 | 35,163 | 0,02844 | 4,1 | 60,340 | 0,01657 |
| 3,12 | 22,646 | 0,04416 | 3,57 | 35,517 | 0,02816 | 4,2 | 66,686 | 0,01500 |
| 3,13 | 22,874 | 0,04372 | 3,58 | 35,874 | 0,02788 | 4,3 | 73,700 | 0,01357 |
| 3,14 | 23,104 | 0,04328 | 3,59 | 36,234 | 0,02760 | 4,4 | 81,451 | 0,01228 |
| **3,15** | 23,336 | 0,04285 | **3,60** | 36,598 | 0,02732 | **4,5** | 90,017 | 0,01111 |
| 3,16 | 23,571 | 0,04243 | 3,61 | 36,966 | 0,02705 | 4,6 | 99,484 | 0,01005 |
| 3,17 | 23,807 | 0,04200 | 3,62 | 37,338 | 0,02678 | 4,7 | 109,95 | 0,00910 |
| 3,18 | 24,047 | 0,04159 | 3,63 | 37,713 | 0,02652 | 4,8 | 121,51 | 0,00823 |
| 3,19 | 24,288 | 0,04117 | 3,64 | 38,092 | 0,02625 | 4,9 | 134,29 | 0,00745 |
| **3,20** | 24,533 | 0,04076 | **3,65** | 38,475 | 0,02599 | **5,0** | 148,41 | 0,00674 |
| 3,21 | 24,779 | 0,04036 | 3,66 | 38,861 | 0,02573 | 5,1 | 164,02 | 0,00610 |
| 3,22 | 25,028 | 0,03996 | 3,67 | 39,252 | 0,02548 | 5,2 | 181,27 | 0,00552 |
| 3,23 | 25,280 | 0,03956 | 3,68 | 39,646 | 0,02522 | 5,3 | 200,34 | 0,00499 |
| 3,24 | 25,534 | 0,03916 | 3,69 | 40,045 | 0,02497 | 5,4 | 221,41 | 0,00452 |
| **3,25** | 25,790 | 0,03877 | **3,70** | 40,447 | 0,02472 | **5,5** | 244,69 | 0,00409 |

| $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ | $x$ | $e^x$ | $e^{-x}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,5 | 244,69 | 0,00409 | 7,0 | 1096,6 | 0,000912 | 8,5 | 4914,8 | 0,000203 |
| 5,6 | 270,43 | 0,00370 | 7,1 | 1212,0 | 0,000825 | 8,6 | 5431,7 | 0,000184 |
| 5,7 | 298,87 | 0,00335 | 7,2 | 1339,4 | 0,000747 | 8,7 | 6002,9 | 0,000167 |
| 5,8 | 330,30 | 0,00303 | 7,3 | 1480,3 | 0,000676 | 8,8 | 6634,2 | 0,000151 |
| 5,9 | 365,04 | 0,00274 | 7,4 | 1636,0 | 0,000611 | 8,9 | 7332,0 | 0,000136 |
| **6,0** | 403,43 | 0,002479 | **7,5** | 1808,0 | 0,000553 | **9,0** | 8103,1 | 0,000123 |
| 6,1 | 445,86 | 0,002243 | 7,6 | 1998,2 | 0,000500 | 9,1 | 8955,3 | 0,000112 |
| 6,2 | 492,75 | 0,002029 | 7,7 | 2208,3 | 0,000453 | 9,2 | 9897,1 | 0,000101 |
| 6,3 | 544,57 | 0,001836 | 7,8 | 2440,6 | 0,000410 | 9,3 | 10938 | 0,000091 |
| 6,4 | 601,85 | 0,001662 | 7,9 | 2697,3 | 0,000371 | 9,4 | 12088 | 0,000083 |
| **6,5** | 665,14 | 0,001503 | **8,0** | 2981,0 | 0,000335 | **9,5** | 13360 | 0,000075 |
| 6,6 | 735,10 | 0,001360 | 8,1 | 3294,5 | 0,000304 | 9,6 | 14765 | 0,000068 |
| 6,7 | 812,41 | 0,001231 | 8,2 | 3641,0 | 0,000275 | 9,7 | 16318 | 0,000061 |
| 6,8 | 897,85 | 0,001114 | 8,3 | 4023,9 | 0,000249 | 9,8 | 18034 | 0,000055 |
| 6,9 | 992,27 | 0,001008 | 8,4 | 4447,1 | 0,000225 | 9,9 | 19930 | 0,000050 |
| **7,0** | 1096,6 | 0,000912 | **8,5** | 4914,8 | 0,000203 | **10,0** | 22026 | 0,000045 |

# *12. Logaritmos naturales*

Véanse en la pág. 66 las explicaciones de la tabla.

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,0** | 0,0000 | 0,0100 | 0,0198 | 0,0296 | 0,0392 | 0,0488 | 0,0583 | 0,0677 | 0,0770 | 0.0862 |
| 1,1 | 0,0953 | 0,1044 | 0,1133 | 0,1222 | 0,1310 | 0,1398 | 0,1484 | 0,1570 | 0,1655 | 0,1740 |
| 1,2 | 0,1823 | 0,1906 | 0,1989 | 0,2070 | 0,2151 | 0,2231 | 0,2311 | 0 2390 | 0 2469 | 0,2546 |
| 1,3 | 0,2624 | 0,2700 | 0,2776 | 0,2852 | 0,2927 | 0,3001 | 0,3075 | 0,3148 | 0,3221 | 0,3293 |
| 1,4 | 0,3365 | 0,3436 | 0,3507 | 0,3577 | 0,3646 | 0,3716 | 0,3784 | 0,3853 | 0,3920 | 0,3988 |
| **1,5** | 0,4055 | 0,4121 | 0,4187 | 0,4253 | 0,4318 | 0,4383 | 0,4447 | 0,4511 | 0,4574 | 0,4637 |
| 1,6 | 0,4700 | 0,4762 | 0,4824 | 0,4886 | 0,4947 | 0,5008 | 0,5068 | 0,5128 | 0,5188 | 0,5247 |
| 1,7 | 0,5306 | 0,5365 | 0,5423 | 0,5481 | 0,5539 | 0,5596 | 0,5653 | 0,5710 | 0,5766 | 0,5822 |
| 1,8 | 0,5878 | 0,5933 | 0,5988 | 0,6043 | 0,6098 | 0,6152 | 0,6206 | 0,6259 | 0,6313 | 0,6366 |
| 1,9 | 0,6419 | 0,6471 | 0,6523 | 0,6575 | 0,6627 | 0,6678 | 0,6729 | 0,6780 | 0,6831 | 0,6881 |
| **2,0** | 0,6931 | 0,6981 | 0,7031 | 0 7080 | 0,7129 | 0,7178 | 0,7227 | 0,7275 | 0,7324 | 0,7372 |
| 2,1 | 0,7419 | 0,7467 | 0,7514 | 0,7561 | 0,7608 | 0,7655 | 0,7701 | 0,7747 | 0,7793 | 0,7839 |
| 2,2 | 0,7885 | 0,7930 | 0 7975 | 0,8020 | 0,8065 | 0,8109 | 0,8154 | 0,8198 | 0,8242 | 0,8286 |
| 2,3 | 0,8329 | 0,8372 | 0,8416 | 0,8459 | 0,8502 | 0,8544 | 0,8587 | 0,8629 | 0,8671 | 0,8713 |
| 2,4 | 0,8755 | 0,8796 | 0,8838 | 0,8879 | 0,8920 | 0,8961 | 0,9002 | 0,9042 | 0,9083 | 0,9123 |
| **2,5** | 0,9163 | 0,9203 | 0,9243 | 0,9282 | 0,9322 | 0,9361 | 0,9400 | 0,9439 | 0,9478 | 0,9517 |
| 2,6 | 0,9555 | 0,9594 | 0,9632 | 0,9670 | 0,9708 | 0,9746 | 0,9783 | 0,9821 | 0,9858 | 0,9895 |
| 2,7 | 0,9933 | 0,9969 | 1,0006 | 1,0043 | 1,0080 | 1,0116 | 1,0152 | 1,0188 | 1,0225 | 1,0260 |
| 2,8 | 1,0296 | 1,0332 | 1,0367 | 1,0403 | 1,0438 | 1,0473 | 1,0508 | 1,0543 | 1,0578 | 1,0613 |
| 2,9 | 1,0647 | 1,0682 | 1,0716 | 1,0750 | 1,0784 | 1,0818 | 1,0852 | 1,0886 | 1,0919 | 1,0953 |

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,0 | 1,0986 | 1,1019 | 1,1053 | 1,1086 | 1,1119 | 1,1151 | 1,1184 | 1,1217 | 1,1249 | 1,1282 |
| 3,1 | 1,1314 | 1,1346 | 1,1378 | 1,1410 | 1,1442 | 1,1474 | 1,1506 | 1,1537 | 1,1569 | 1,1600 |
| 3,2 | 1,1632 | 1,1663 | 1,1694 | 1,1725 | 1,1756 | 1,1787 | 1,1817 | 1,1848 | 1,1878 | 1,1909 |
| 3,3 | 1,1939 | 1,1969 | 1,2000 | 1,2030 | 1,2060 | 1,2090 | 1,2119 | 1,2149 | 1,2179 | 1,2208 |
| 3,4 | 1,2238 | 1,2267 | 1,2296 | 1,2326 | 1,2355 | 1,2384 | 1,2413 | 1,2442 | 1,2470 | 1,2499 |
| 3,5 | 1,2528 | 1,2556 | 1,2585 | 1,2613 | 1,2641 | 1,2669 | 1,2698 | 1,2726 | 1,2754 | 1,2782 |
| 3,6 | 1,2809 | 1,2837 | 1,2865 | 1,2892 | 1,2920 | 1,2947 | 1,2975 | 1,3002 | 1,3029 | 1,3056 |
| 3,7 | 1,3083 | 1,3110 | 1,3137 | 1,3164 | 1,3191 | 1,3218 | 1,3244 | 1,3271 | 1,3297 | 1,3324 |
| 3,8 | 1,3350 | 1,3376 | 1,3403 | 1,3429 | 1,3455 | 1,3481 | 1,3507 | 1,3533 | 1,3558 | 1,3584 |
| 3,9 | 1,3610 | 1,3635 | 1,3661 | 1,3686 | 1,3712 | 1,3737 | 1,3762 | 1,3788 | 1,3813 | 1,3838 |
| 4,0 | 1,3863 | 1,3888 | 1,3913 | 1,3938 | 1,3962 | 1,3987 | 1,4012 | 1,4036 | 1,4061 | 1,4085 |
| 4,1 | 1,4110 | 1,4134 | 1,4159 | 1,4183 | 1,4207 | 1,4231 | 1,4255 | 1,4279 | 1,4303 | 1,4327 |
| 4,2 | 1,4351 | 1,4375 | 1,4398 | 1,4422 | 1,4446 | 1,4469 | 1,4493 | 1,4516 | 1,4540 | 1,4563 |
| 4,3 | 1,4586 | 1,4609 | 1,4633 | 1,4656 | 1,4679 | 1,4702 | 1,4725 | 1,4748 | 1,4770 | 1,4793 |
| 4,4 | 1,4816 | 1,4839 | 1,4861 | 1,4884 | 1,4907 | 1,4929 | 1,4951 | 1,4974 | 1,4996 | 1,5019 |
| 4,5 | 1,5041 | 1,5063 | 1,5085 | 1,5107 | 1,5129 | 1,5151 | 1,5173 | 1,5195 | 1,5217 | 1,5239 |
| 4,6 | 1,5261 | 1,5282 | 1,5304 | 1,5326 | 1,5347 | 1,5369 | 1,5390 | 1,5412 | 1,5433 | 1,5454 |
| 4,7 | 1,5476 | 1,5497 | 1,5518 | 1,5539 | 1,5560 | 1,5581 | 1,5602 | 1,5623 | 1,5644 | 1,5665 |
| 4,8 | 1,5686 | 1,5707 | 1,5728 | 1,5748 | 1,5769 | 1,5790 | 1,5810 | 1,5831 | 1,5851 | 1,5872 |
| 4,9 | 1,5892 | 1,5913 | 1,5933 | 1,5953 | 1,5974 | 1,5994 | 1,6014 | 1,6034 | 1,6054 | 1,6074 |
| 5,0 | 1,6094 | 1,6114 | 1,6134 | 1,6154 | 1,6174 | 1,6194 | 1,6214 | 1,6233 | 1,6253 | 1,6273 |
| 5,1 | 1,6292 | 1,6312 | 1,6332 | 1,6351 | 1,6371 | 1,6390 | 1,6409 | 1,6429 | 1,6448 | 1,6467 |
| 5,2 | 1,6487 | 1,6506 | 1,6525 | 1,6544 | 1,6563 | 1,6582 | 1,6601 | 1,6620 | 1,6639 | 1,6658 |
| 5,3 | 1,6677 | 1,6696 | 1,6715 | 1,6734 | 1,6752 | 1,6771 | 1,6790 | 1,6808 | 1,6827 | 1,6845 |
| 5,4 | 1,6864 | 1,6882 | 1,6901 | 1,6919 | 1,6938 | 1,6956 | 1,6974 | 1,6993 | 1,7011 | 1,7029 |
| 5,5 | 1,7047 | 1,7066 | 1,7084 | 1,7102 | 1,7120 | 1,7138 | 1,7156 | 1,7174 | 1,7192 | 1,7210 |
| 5,6 | 1,7228 | 1,7246 | 1,7263 | 1,7281 | 1,7299 | 1,7317 | 1,7334 | 1,7352 | 1,7370 | 1,7387 |
| 5,7 | 1,7405 | 1,7422 | 1,7440 | 1,7457 | 1,7475 | 1,7492 | 1,7509 | 1,7527 | 1,7544 | 1,7561 |
| 5,8 | 1,7579 | 1,7596 | 1,7613 | 1,7630 | 1,7647 | 1,7664 | 1,7681 | 1,7699 | 1,7716 | 1,7733 |
| 5,9 | 1,7750 | 1,7766 | 1,7783 | 1,7800 | 1,7817 | 1,7834 | 1,7851 | 1,7867 | 1,7884 | 1,7901 |
| 6,0 | 1,7918 | 1,7934 | 1,7951 | 1,7967 | 1,7984 | 1,8001 | 1,8017 | 1,8034 | 1,8050 | 1,8066 |
| 6,1 | 1,8083 | 1,8099 | 1,8116 | 1,8132 | 1,8148 | 1,8165 | 1,8181 | 1,8197 | 1,8213 | 1,8229 |
| 6,2 | 1,8245 | 1,8262 | 1,8278 | 1,8294 | 1,8310 | 1,8326 | 1,8342 | 1,8358 | 1,8374 | 1,8390 |
| 6,3 | 1,8405 | 1,8421 | 1,8437 | 1,8453 | 1,8469 | 1,8485 | 1,8500 | 1,8516 | 1,8532 | 1,8547 |
| 6,4 | 1,8563 | 1,8579 | 1,8594 | 1,8610 | 1,8625 | 1,8641 | 1,8656 | 1,8672 | 1,8687 | 1,8703 |
| 6,5 | 1,8718 | 1,8733 | 1,8749 | 1,8764 | 1,8779 | 1,8795 | 1,8810 | 1,8825 | 1,8840 | 1,8856 |
| 6,6 | 1,8871 | 1,8886 | 1,8901 | 1,8916 | 1,8931 | 1,8946 | 1,8961 | 1,8976 | 1,8991 | 1,9006 |
| 6,7 | 1,9021 | 1,9036 | 1,9051 | 1,9066 | 1,9081 | 1,9095 | 1,9110 | 1,9125 | 1,9140 | 1,9155 |
| 6,8 | 1,9169 | 1,9184 | 1,9199 | 1,9213 | 1,9228 | 1,9242 | 1,9257 | 1,9272 | 1,9286 | 1,9301 |
| 6,9 | 1,9315 | 1,9330 | 1,9344 | 1,9359 | 1,9373 | 1,9387 | 1,9402 | 1,9416 | 1,9430 | 1,9445 |
| 7,0 | 1,9459 | 1,9473 | 1,9488 | 1,9502 | 1,9516 | 1,9530 | 1,9544 | 1,9559 | 1,9573 | 1,9587 |
| 7,1 | 1,9601 | 1,9615 | 1,9629 | 1,9643 | 1,9657 | 1,9671 | 1,9685 | 1,9699 | 1,9713 | 1,9727 |
| 7,2 | 1,9741 | 1,9755 | 1,9769 | 1,9782 | 1,9796 | 1,9810 | 1,9824 | 1,9838 | 1,9851 | 1,9865 |
| 7,3 | 1,9879 | 1,9892 | 1,9906 | 1,9920 | 1,9933 | 1,9947 | 1,9961 | 1,9974 | 1,9988 | 2,0001 |
| 7,4 | 2,0015 | 2,0028 | 2,0042 | 2,0055 | 2,0069 | 2,0082 | 2,0096 | 2,0109 | 2,0122 | 2,0136 |
| 7,5 | 2,0149 | 2,0162 | 2,0176 | 2,0189 | 2,0202 | 2,0215 | 2,0229 | 2,0242 | 2,0255 | 2,0268 |

| *N* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7,5 | 2,0149 | 2,0162 | 2,0176 | 2,0189 | 2,0202 | 2,0215 | 2,0229 | 2,0242 | 2,0255 | 2,0268 |
| 7,6 | 2,0281 | 2,0295 | 2,0308 | 2,0321 | 2,0334 | 2,0347 | 2,0360 | 2,0373 | 2,0386 | 2,0399 |
| 7,7 | 2,0412 | 2,0425 | 2,0438 | 2,0451 | 2,0464 | 2,0477 | 2,0490 | 2,0503 | 2,0516 | 2,0528 |
| 7,8 | 2,0541 | 2,0554 | 2,0567 | 2,0580 | 2,0592 | 2,0605 | 2,0618 | 2,0631 | 2,0643 | 2,0656 |
| 7,9 | 2,0669 | 2,0681 | 2,0694 | 2,0707 | 2,0719 | 2,0732 | 2,0744 | 2,0757 | 2,0769 | 2,0782 |
| 8,0 | 2,0794 | 2,0807 | 2,0819 | 2,0832 | 2,0844 | 2,0857 | 2,0869 | 2,0882 | 2,0894 | 2,0906 |
| 8,1 | 2,0919 | 2,0931 | 2,0943 | 2,0956 | 2,0968 | 2,0980 | 2,0992 | 2,1005 | 2,1017 | 2,1029 |
| 8,2 | 2,1041 | 2,1054 | 2,1066 | 2,1078 | 2,1090 | 2,1102 | 2,1114 | 2,1126 | 2,1138 | 2,1150 |
| 8,3 | 2,1163 | 2,1175 | 2,1187 | 2,1199 | 2,1211 | 2,1223 | 2,1235 | 2,1247 | 2,1258 | 2,1270 |
| 8,4 | 2,1282 | 2,1294 | 2,1306 | 2,1318 | 2,1330 | 2,1342 | 2,1353 | 1,1365 | 2,1377 | 2,1389 |
| 8,5 | 2,1401 | 2,1412 | 2,1424 | 2,1436 | 2,1448 | 2,1459 | 2,1471 | 2,1483 | 2,1494 | 2,1506 |
| 8,6 | 2,1518 | 2,1529 | 2,1541 | 2,1552 | 2,1564 | 2,1576 | 2,1587 | 2,1599 | 2,1610 | 2,1622 |
| 8,7 | 2,1633 | 2,1645 | 2,1656 | 2,1668 | 2,1679 | 2,1691 | 2,1702 | 2,1713 | 2,1725 | 2,1736 |
| 8,8 | 2,1748 | 2,1759 | 2,1770 | 2,1782 | 2,1793 | 2,1804 | 2,1815 | 2,1827 | 2,1838 | 2,1849 |
| 8,9 | 2,1861 | 2,1872 | 2,1883 | 2,1894 | 2,1905 | 2,1917 | 2,1928 | 2,1939 | 2,1950 | 2,1961 |
| 9,0 | 2,1972 | 2,1983 | 2,1994 | 2,2006 | 2,2017 | 2,2028 | 2,2039 | 2,2050 | 2,2061 | 2,2072 |
| 9,1 | 2,2083 | 2,2094 | 2,2105 | 2,2116 | 2,2127 | 2,2138 | 2,2148 | 2,2159 | 2,2170 | 2,2181 |
| 9,2 | 2,2192 | 2,2203 | 2,2214 | 2,2225 | 2,2235 | 2,2246 | 2,2257 | 2,2268 | 2,2279 | 2,2289 |
| 9,3 | 2,2300 | 2,2311 | 2,2322 | 2,2332 | 2,2343 | 2,2354 | 2,2364 | 2,2375 | 2,2386 | 2,2396 |
| 9,4 | 2,2407 | 2,2418 | 2,2428 | 2,2439 | 2,2450 | 2,2460 | 2,2471 | 2,2481 | 2,2492 | 2,2502 |
| 9,5 | 2,2513 | 2,2523 | 2,2534 | 2,2544 | 2,2555 | 2,2565 | 2,2576 | 2,2586 | 2,2597 | 2,2607 |
| 9,6 | 2,2618 | 2,2628 | 2,2638 | 2,2649 | 2,2659 | 2,2670 | 2,2680 | 2,2690 | 2,2701 | 2,2711 |
| 9,7 | 2,2721 | 2,2732 | 2,2742 | 2,2752 | 2,2762 | 2,2773 | 2,2783 | 2,2793 | 2,2803 | 2,2814 |
| 9,8 | 2,2824 | 2,2834 | 2,2844 | 2,2854 | 2,2865 | 2,2875 | 2,2885 | 2,2895 | 2,2905 | 2,2915 |
| 9,9 | 2,2925 | 2,2935 | 2,2946 | 2,2956 | 2,2966 | 2,2976 | 2,2986 | 2,2996 | 2,3006 | 2,3016 |

| $m$ | $\ln 10^m$ |
|---|---|
| 1 | 2,3026 |
| 2 | 4,6052 |
| 3 | 6,9078 |
| 4 | 9,2103 |
| 5 | 11,5129 |

*Ejemplos:*

$\ln 862 = \ln 8{,}62 + \ln 10^2 = 2{,}1541 + 4{,}6052 = 6{,}7593;$

$\ln 0{,}0862 = \ln 8{,}62 - \ln 10^2 = 2{,}1541 - 4{,}6052 = -2{,}4511.$

**Véanse en la página siguiente las explicaciones de la tabla.**

## Explicaciones de la tabla 12 de los logaritmos naturales

En la tabla 12 (págs. 63-65) están dados los logaritmos naturales. A diferencia de las tablas de logaritmos decimales, aquí se dan tanto las mantisas como las características. Los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10 se encuentran directamente en la tabla, además, se debe introducir la corrección de interpolación para calcular la tercera y cuarta cifras decimales (véase pág. 15). Los logaritmos naturales de los números que tienen antes de la coma más o menos de una cifra se encuentran mediante los valores contenidos al final de la tabla de los logaritmos de las potencias de 10 (véanse los ejemplos en la pág. 65).

## Explicaciones de las tablas 13, 14 y 15

Las tablas 13 y 14 (págs. 68-71) dan los valores, con cuatro cifras significativas, de las longitudes de las circunferencias y de las áreas de los círculos de diámetro $d$, desde $d = 1{,}00$ hasta $d = 9{,}99$. Si las dimensiones del diámetro sobrepasan estos límites, entonces se halla el área del círculo o la longitud de la circunferencia para un diámetro $10^k$ veces mayor o menor que el dado. Cuando el diámetro $d$ aumenta o disminuye $10^k$ veces, la longitud de la circunferencia también aumenta o disminuye $10^k$ veces y el área del círculo, respectivamente, $10^{2k}$ veces. Si el número de cifras significativas de $d$ es mayor que tres, es necesario recurrir a la interpolación (véase pág. 15).

*Ejemplos:* 1) Para $d = 69{,}3$ la longitud de la circunferencia es igual a 217,7 y el área del círculo a 3 772. 2) Para $d = 0{,}693$ la longitud de la circunferencia es igual a 2,177 y el área del círculo a 0,3772.

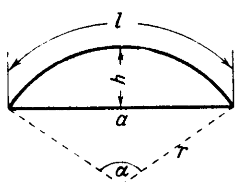



Fig. 1

En la tabla 15 (págs. 72-76) están dados los elementos del segmento de círculo (fig. 1). La tabla a) se refiere a los segmentos de círculos de diferentes radios, con una longitud de cuerda igual a la unidad. Si para una inclinación dada (razón de la flecha a la cuerda) la longitud de la cuerda es igual a $a$, el valor de la longitud del arco incluido en la tabla debe ser multiplicado por $a$ y el área del segmento por $a^2$.

La tabla b) contiene los datos que se refieren a segmentos diferentes de una misma circunferencia de radio igual a la unidad. Si la longitud del radio es igual a $r$, los valores tabulares de $l$, $h$, y $a$ deben ser multiplicados por $r$ y el área del segmento por $r^2$. Si se da la longitud del arco $l$ (o de la cuerda $a$) y la flecha $h$, entonces el radio del segmento $r$ es igual a la razón de $l$ (o $a$) al valor tabular de la longitud de arco (o de cuerda), que corresponde al valor dado $l/h$ (o $a/h$).

*Ejemplo:* Si en un segmento, la longitud de la cuerda es $a = 40$ cm, y la flecha es $h = 6$ cm, entonces para encontrar la longitud del arco $l$ calculamos $h/a = 0{,}15$ y multiplicamos por 40 el valor tabular correspondiente de $l$ tomado de la tabla a) : $l = 40 \cdot 1{,}0590 = 42{,}36$ cm. El radio del segmento $r$ y el ángulo central $\alpha$ se determinan mediante la tabla b). Para $a/h = 6{,}67$ el valor tabular de $a$ es igual a $1{,}1010$ y $\alpha = 66{,}8°$ (¡interpolación lineal!). De donde $r = 40:1{,}1010 = 36{,}33$ cm. Ahora se puede hallar la longitud del arco $l$ mediante la tabla b) : $l = 36{,}33 \times$ $\times 1{,}1661 = 42{,}36$ cm.

## *13. Longitud de la circunferencia de diámetro d*

| *d* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 3,142 | 3,173 | 3,204 | 3,236 | 3,267 | 3,299 | 3,330 | 3,362 | 3,393 | 3,424 |
| 1,1 | 3,456 | 3,487 | 3,519 | 3,550 | 3,581 | 3,613 | 3,644 | 3,676 | 3,707 | 3,738 |
| 1,2 | 3,770 | 3,801 | 3,833 | 3,864 | 3,896 | 3,927 | 3,958 | 3,990 | 4,021 | 4,053 |
| 1,3 | 4,084 | 4,115 | 4,147 | 4,178 | 4,210 | 4,241 | 4,273 | 4,304 | 4,335 | 4,367 |
| 1,4 | 4,398 | 4,430 | 4,461 | 4,492 | 4,524 | 4,555 | 4,587 | 4,618 | 4,650 | 4,681 |
| 1,5 | 4,712 | 4,744 | 4,775 | 4,807 | 4,838 | 4,869 | 4,901 | 4,932 | 4,964 | 4,995 |
| 1,6 | 5,027 | 5,058 | 5,089 | 5,121 | 5,152 | 5,184 | 5,215 | 5,246 | 5,278 | 5,309 |
| 1,7 | 5,341 | 5,372 | 5,404 | 5,435 | 5,466 | 5,498 | 5,529 | 5,561 | 5,592 | 5,623 |
| 1,8 | 5,655 | 5,686 | 5,718 | 5,749 | 5,781 | 5,812 | 5,843 | 5,875 | 5,906 | 5,938 |
| 1,9 | 5,969 | 6,000 | 6,032 | 6,063 | 6,095 | 6,126 | 6,158 | 6,189 | 6,220 | 6,252 |
| 2,0 | 6,283 | 6,315 | 6,346 | 6,377 | 6,409 | 6,440 | 6,472 | 6,503 | 6,535 | 6,566 |
| 2.1 | 6,597 | 6,629 | 6,660 | 6,692 | 6,723 | 6,754 | 6,786 | 6,817 | 6,849 | 6,880 |
| 2,2 | 6,912 | 6,943 | 6,974 | 7,006 | 7,037 | 7,069 | 7,100 | 7,131 | 7,163 | 7,194 |
| 2,3 | 7,226 | 7,257 | 7,288 | 7,320 | 7,351 | 7,383 | 7,414 | 7,446 | 7,477 | 7,508 |
| 2,4 | 7,540 | 7,571 | 7,603 | 7,634 | 7,665 | 7,697 | 7,728 | 7,760 | 7,791 | 7,823 |
| 2,5 | 7,854 | 7,885 | 7,917 | 7,948 | 7,980 | 8,011 | 8,042 | 8,074 | 8,105 | 8,137 |
| 2,6 | 8,168 | 8,200 | 8,231 | 8,262 | 8,294 | 8,325 | 8,357 | 8,388 | 8,419 | 8,451 |
| 2,7 | 8,482 | 8,514 | 8,545 | 8,577 | 8,608 | 8,639 | 8,671 | 8,702 | 8,734 | 8,765 |
| 2,8 | 8,796 | 8,828 | 8,859 | 8,891 | 8,922 | 8,954 | 8,985 | 9,016 | 9,048 | 9,079 |
| 2,9 | 9,111 | 9,142 | 9,173 | 9,205 | 9,236 | 9,268 | 9,299 | 9,331 | 9,362 | 9,393 |
| 3,0 | 9,425 | 9,456 | 9,488 | 9,519 | 9,550 | 9,582 | 9,613 | 9,645 | 9,676 | 9,708 |
| 3,1 | 9,739 | 9,770 | 9,802 | 9,833 | 9,865 | 9,896 | 9,927 | 9,959 | 9,990 | 10,02 |
| 3,2 | 10,05 | 10,08 | 10,12 | 10,15 | 10,18 | 10,21 | 10,24 | 10,27 | 10,30 | 10,34 |
| 3,3 | 10,37 | 10,40 | 10,43 | 10,46 | 10,49 | 10,52 | 10,56 | 10,59 | 10,62 | 10,65 |
| 3,4 | 10,68 | 10,71 | 10,74 | 10,78 | 10,81 | 10,84 | 10,87 | 10,90 | 10,93 | 10,96 |
| 3,5 | 11,00 | 11,03 | 11,06 | 11,09 | 11,12 | 11,15 | 11,18 | 11,22 | 11,25 | 11,28 |
| 3,6 | 11,31 | 11,34 | 11,37 | 11,40 | 11,44 | 11,47 | 11,50 | 11,53 | 11,56 | 11,59 |
| 3,7 | 11,62 | 11,66 | 11,69 | 11,72 | 11,75 | 11,78 | 11,81 | 11,84 | 11,88 | 11,91 |
| 3,8 | 11,94 | 11,97 | 12,00 | 12,03 | 12,06 | 12,10 | 12,13 | 12,16 | 12,19 | 12,22 |
| 3,9 | 12,25 | 12,28 | 12,32 | 12,35 | 12,38 | 12,41 | 12,44 | 12,47 | 12,50 | 12,53 |
| 4,0 | 12,57 | 12,60 | 12,63 | 12,66 | 12,69 | 12,72 | 12,75 | 12,79 | 12,82 | 12,85 |
| 4,1 | 12,88 | 12,91 | 12,94 | 12,97 | 13,01 | 13,04 | 13,07 | 13,10 | 13,13 | 13,16 |
| 4,2 | 13,19 | 13,23 | 13,26 | 13,29 | 13,32 | 13,35 | 13,38 | 13,41 | 13,45 | 13,48 |
| 4,3 | 13,51 | 13,54 | 13,57 | 13,60 | 13,63 | 13,67 | 13,70 | 13,73 | 13,76 | 13,79 |
| 4,4 | 13,82 | 13,85 | 13,89 | 13,92 | 13,95 | 13,98 | 14,01 | 14,04 | 14,07 | 14,11 |
| 4,5 | 14,14 | 14,17 | 14,20 | 14,23 | 14,26 | 14,29 | 14,33 | 14,36 | 14,39 | 14,42 |
| 4,6 | 14,45 | 14,48 | 14,51 | 14,55 | 14,58 | 14,61 | 14,64 | 14,67 | 14,70 | 14,73 |
| 4,7 | 14,77 | 14,80 | 14,83 | 14,86 | 14,89 | 14,92 | 14,95 | 14,99 | 15,02 | 15,05 |
| 4,8 | 15,08 | 15,11 | 15,14 | 15,17 | 15,21 | 15,24 | 15,27 | 15,30 | 15,33 | 15,36 |
| 4,9 | 15,39 | 15,43 | 15,46 | 15,49 | 15,52 | 15,55 | 15,58 | 15,61 | 15,65 | 15,68 |
| 5,0 | 15,71 | 15,74 | 15,77 | 15,80 | 15,83 | 15,87 | 15,90 | 15,93 | 15,96 | 15,99 |
| 5,1 | 16,02 | 16,05 | 16,08 | 16,12 | 16,15 | 16,18 | 16,21 | 16,24 | 16,27 | 16,30 |
| 5,2 | 16,34 | 16,37 | 16,40 | 16,43 | 16,46 | 16,49 | 16,52 | 16,56 | 16,59 | 16,62 |
| 5,3 | 16,65 | 16,68 | 16,71 | 16,74 | 16,78 | 16,81 | 16,84 | 16,87 | 16,90 | 16,93 |
| 5,4 | 16,96 | 17,00 | 17,03 | 17,06 | 17,09 | 17,12 | 17,15 | 17,18 | 17,22 | 17,25 |

| *d* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5,5** | 17,28 | 17,31 | 17,34 | 17,37 | 17,40 | 17,44 | 17,47 | 17,50 | 17,53 | 17,56 |
| **5,6** | 17,59 | 17,62 | 17,66 | 17,69 | 17,72 | 17,75 | 17,78 | 17,81 | 17,84 | 17,88 |
| **5,7** | 17,91 | 17,94 | 17,97 | 18,00 | 18,03 | 18,06 | 18,10 | 18,13 | 18,16 | 18,19 |
| **5,8** | 18,22 | 18,25 | 18,28 | 18,32 | 18,35 | 18,38 | 18,41 | 18,44 | 18,47 | 18,50 |
| **5,9** | 18,54 | 18,57 | 18,60 | 18,63 | 18,66 | 18,69 | 18,72 | 18,76 | 18,79 | 18,82 |
| **6,0** | 18,45 | 18,88 | 18,91 | 18,94 | 18,98 | 19,01 | 19,04 | 19,07 | 19,10 | 19,13 |
| **6,1** | 19,16 | 19,20 | 19,23 | 19,26 | 19,29 | 19,32 | 19,35 | 19,38 | 19,42 | 19,45 |
| **6,2** | 19,48 | 19,51 | 19,54 | 19,57 | 19,60 | 19,63 | 19,67 | 19,70 | 19,73 | 19,76 |
| **6,3** | 19,79 | 19,82 | 19,85 | 19,89 | 19,92 | 19,95 | 19,98 | 20,01 | 20,04 | 20,07 |
| **6,4** | 20,11 | 20,14 | 20,17 | 20,20 | 20,23 | 20,26 | 20,29 | 20,33 | 20,36 | 20,39 |
| **6,5** | 20,42 | 20,45 | 20,48 | 20,51 | 20,55 | 20,58 | 20,61 | 20,64 | 20,67 | 20,70 |
| **6,6** | 20,73 | 20,77 | 20,80 | 20,83 | 20,86 | 20,89 | 20,92 | 20,95 | 20,99 | 21,02 |
| **6,7** | 21,05 | 21,08 | 21,11 | 21,14 | 21,17 | 21,21 | 21,24 | 21,27 | 21,30 | 21,33 |
| **6,8** | 21,36 | 21,39 | 21,43 | 21,46 | 21,49 | 21,52 | 21,55 | 21,58 | 21,61 | 21,65 |
| **6,9** | 21,68 | 21,71 | 21,74 | 21,77 | 21,80 | 21,83 | 21,87 | 21,90 | 21,93 | 21,96 |
| **7,0** | 21,99 | 22,02 | 22,05 | 22,09 | 22,12 | 22,15 | 22,18 | 22,21 | 22,24 | 22,27 |
| **7,1** | 22,31 | 22,34 | 22,37 | 22,40 | 22,43 | 22,46 | 22,49 | 22,53 | 22,56 | 22,59 |
| **7,2** | 22,62 | 22,65 | 22,68 | 22,71 | 22,75 | 22,78 | 22,81 | 22,84 | 22,87 | 22,90 |
| **7,3** | 22,93 | 22,97 | 23,00 | 23,03 | 23,06 | 23,09 | 23,12 | 23,15 | 23,19 | 23,22 |
| **7,4** | 23,25 | 23,28 | 23,31 | 23,31 | 23,37 | 23,40 | 23,44 | 23,47 | 23,50 | 23,53 |
| **7,5** | 23,56 | 23,59 | 23,62 | 23,66 | 23,69 | 23,72 | 23,75 | 23,78 | 23,81 | 23,84 |
| **7,6** | 23,88 | 23,91 | 23,94 | 23,97 | 24,00 | 24,03 | 24,06 | 24,10 | 24,13 | 24,16 |
| **7,7** | 24,19 | 24,22 | 24,25 | 24,28 | 24,32 | 24,35 | 24,38 | 24,41 | 24,44 | 24,47 |
| **7,8** | 24,50 | 24,54 | 24,57 | 24,60 | 24,63 | 24,66 | 24,69 | 24,72 | 24,76 | 24,79 |
| **7,9** | 24,82 | 24,85 | 24,88 | 24,91 | 24,94 | 24,98 | 25,01 | 25,04 | 25,07 | 25,10 |
| **8,0** | 25,13 | 25,16 | 25,20 | 25,23 | 25,26 | 25,29 | 25,32 | 25,35 | 25,38 | 25,42 |
| **8,1** | 25,45 | 25,48 | 25,51 | 25,54 | 25,57 | 25,60 | 25,64 | 25,67 | 25,70 | 25,73 |
| **8,2** | 25,76 | 25,79 | 25,82 | 25,86 | 25,89 | 25,92 | 25,95 | 25,98 | 26,01 | 26,04 |
| **8,3** | 26,08 | 26,11 | 26,14 | 26,17 | 26,20 | 26,23 | 26,26 | 26,30 | 26,33 | 26,36 |
| **8,4** | 26,39 | 26,42 | 26,45 | 26,48 | 26,52 | 26,55 | 26,58 | 26,61 | 26,64 | 26,67 |
| **8,5** | 26,70 | 26,73 | 26,77 | 26,80 | 26,83 | 26,86 | 26,89 | 26,92 | 26,95 | 26,99 |
| **8,6** | 27,02 | 27,05 | 27,08 | 27,11 | 27,14 | 27,17 | 27,21 | 27,24 | 27,27 | 27,30 |
| **8,7** | 27,33 | 27,36 | 27,39 | 27,43 | 27,46 | 27,49 | 27,52 | 27,55 | 27,58 | 27,61 |
| **8,8** | 27,65 | 27,68 | 27,71 | 27,74 | 27,77 | 27,80 | 27,83 | 27,87 | 27,90 | 27,93 |
| **8,9** | 27,96 | 27,99 | 28,02 | 28,05 | 28,09 | 28,12 | 28,15 | 28,18 | 28,21 | 28,24 |
| **9,0** | 28,27 | 28,31 | 28,34 | 28,37 | 28,40 | 28,43 | 28,46 | 28,49 | 28,53 | 28,56 |
| **9,1** | 28,59 | 28,62 | 28,65 | 28,68 | 28,71 | 28,75 | 28,78 | 28,81 | 28,84 | 28,87 |
| **9,2** | 28,90 | 28,93 | 28,97 | 29,00 | 29,03 | 29,06 | 29,09 | 29,12 | 29,15 | 29,19 |
| **9,3** | 29,22 | 29,25 | 29,28 | 29,31 | 29,34 | 29,37 | 29,41 | 29,44 | 29,47 | 29,50 |
| **9,4** | 29,53 | 29,56 | 29,59 | 29,63 | 29,66 | 29,69 | 29,72 | 29,75 | 29,78 | 29,81 |
| **9,5** | 29,85 | 29,88 | 29,91 | 29,94 | 29,97 | 30,00 | 30,03 | 30,07 | 30,10 | 30,13 |
| **9,6** | 30,16 | 30,19 | 30,22 | 30,25 | 30,28 | 30,32 | 30,35 | 30,38 | 30,41 | 30,44 |
| **9,7** | 30,47 | 30,50 | 30,54 | 30,57 | 30,60 | 30,63 | 30,66 | 30,69 | 30,72 | 30,76 |
| **9,8** | 30,79 | 30,82 | 30,85 | 30,88 | 30,91 | 30,94 | 30,98 | 31,01 | 31,04 | 31,07 |
| **9,9** | 31,10 | 31,13 | 31,16 | 31,20 | 31,21 | 31,26 | 31,29 | 31,32 | 31,35 | 31,38 |
| **10,0** | 31,42 | | | | | | | | | |

**Véase en la pág. 55** las explicaciones **de** la tabla.

## *14. Area del círculo de diámetro d*

| *d* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,0** | 0,7854 | 0,8012 | 0,8171 | 0,8332 | 0,8495 | 0,8659 | 0,8825 | 0,8992 | 0,9161 | 0,9331 |
| 1,1 | 0,9503 | 0,9677 | 0,9852 | 1,003 | 1,021 | 1,039 | 1,057 | 1,075 | 1,094 | 1,112 |
| 1,2 | 1,131 | 1,150 | 1,169 | 1,188 | 1,208 | 1,227 | 1,247 | 1,267 | 1,287 | 1,307 |
| 1,3 | 1,327 | 1 348 | 1,368 | 1,389 | 1,410 | 1,431 | 1,453 | 1,474 | 1,496 | 1,517 |
| 1,4 | 1,539 | 1,561 | 1,584 | 1,606 | 1,629 | 1,651 | 1,674 | 1,697 | 1,720 | 1,744 |
| **1,5** | 1,767 | 1,791 | 1,815 | 1,839 | 1,863 | 1,887 | 1,911 | 1,936 | 1,961 | 1,986 |
| 1,6 | 2,011 | 2,036 | 2,061 | 2,087 | 2,112 | 2,138 | 2,164 | 2,190 | 2,217 | 2,243 |
| 1,7 | 2,270 | 2,297 | 2,324 | 2,351 | 2,378 | 2,405 | 2,433 | 2,461 | 2,488 | 2,516 |
| 1,8 | 2,545 | 2,573 | 2,602 | 2,630 | 2,659 | 2,688 | 2,717 | 2,746 | 2,776 | 2,806 |
| 1,9 | 2,835 | 2,865 | 2,895 | 2,926 | 2,956 | 2,986 | 3,017 | 3,048 | 3,079 | 3,110 |
| **2,0** | 3,142 | 3,173 | 3,205 | 3,237 | 3,269 | 3,301 | 3,333 | 3,365 | 3,398 | 3,431 |
| 2,1 | 3,464 | 3,497 | 3,530 | 3,563 | 3,597 | 3,631 | 3,664 | 3,698 | 3,733 | 3,767 |
| 2,2 | 3,801 | 3,836 | 3,871 | 3,906 | 3,941 | 3,976 | 4,011 | 4,047 | 4,083 | 4,119 |
| 2,3 | 4,155 | 4,191 | 4,227 | 4,264 | 4,301 | 4,337 | 4,374 | 4,412 | 4,449 | 4,486 |
| 2,4 | 4,524 | 4,562 | 4,600 | 4,638 | 4,676 | 4,714 | 4,753 | 4,792 | 4,831 | 4,870 |
| **2,5** | 4,909 | 4,948 | 4,988 | 5,027 | 5,067 | 5,107 | 5,147 | 5,187 | 5,228 | 5,269 |
| 2,6 | 5,309 | 5,350 | 5,391 | 5,433 | 5,474 | 5,515 | 5,557 | 5,599 | 5,641 | 5,683 |
| 2,7 | 5,726 | 5,768 | 5,811 | 5,853 | 5,896 | 5,940 | 5,983 | 6,026 | 6,070 | 6,114 |
| 2,8 | 6,158 | 6,202 | 6,246 | 6,290 | 6,335 | 6,379 | 6,424 | 6,469 | 6,514 | 6,560 |
| 2,9 | 6,605 | 6,651 | 6,697 | 6,743 | 6,789 | 6,835 | 6,881 | 6,928 | 6,975 | 7,022 |
| **3,0** | 7,069 | 7,116 | 7,163 | 7,211 | 7,258 | 7,306 | 7,354 | 7,402 | 7,451 | 7,499 |
| 3,1 | 7,548 | 7,596 | 7,645 | 7,694 | 7,744 | 7,793 | 7,843 | 7,892 | 7,942 | 7,992 |
| 3,2 | 8,042 | 8,093 | 8,143 | 8,194 | 8,245 | 8,296 | 8,347 | 8,398 | 8,450 | 8,501 |
| 3,3 | 8,553 | 8,605 | 8,657 | 8,709 | 8,762 | 8,814 | 8,867 | 8,920 | 8,973 | 9,026 |
| 3,4 | 9,079 | 9,133 | 9,186 | 9,240 | 9,294 | 9,348 | 9,402 | 9,457 | 9,511 | 9,566 |
| **3,5** | 9,621 | 9,676 | 9,731 | 9,787 | 9,842 | 9,898 | 9,954 | 10,01 | 10,07 | 10,12 |
| 3,6 | 10,18 | 10,24 | 10,29 | 10,35 | 10,41 | 10,46 | 10,52 | 10,58 | 10,64 | 10,69 |
| 3,7 | 10,75 | 10,81 | 10,87 | 10,93 | 10,99 | 11,04 | 11,10 | 11,16 | 11,22 | 11,28 |
| 3,8 | 11,34 | 11,40 | 11,46 | 11,52 | 11,58 | 11,64 | 11,70 | 11,76 | 11,82 | 11,88 |
| 3,9 | 11,95 | 12,01 | 12,07 | 12,13 | 12,19 | 12,25 | 12,32 | 12,38 | 12,44 | 12,50 |
| **4,0** | 12,57 | 12,63 | 12,69 | 12,76 | 12,82 | 12,88 | 12,95 | 13,01 | 13,07 | 13,14 |
| 4,1 | 13,20 | 13,27 | 13,33 | 13,40 | 13,46 | 13,53 | 13,59 | 13,66 | 13,72 | 13,79 |
| 4,2 | 13,85 | 13,92 | 13,99 | 14,05 | 14,12 | 14,19 | 14,25 | 14,32 | 14,39 | 14,45 |
| 4,3 | 14,52 | 14,59 | 14,66 | 14,73 | 14,79 | 14 86 | 14,93 | 15,00 | 15,07 | 15,14 |
| 4,4 | 15,21 | 15,27 | 15,34 | 15,41 | 15,48 | 15,55 | 15,62 | 15,69 | 15,76 | 15,83 |
| **4,5** | 15,90 | 15,98 | 16,05 | 16,12 | 16,19 | 16,26 | 16,33 | 16,40 | 16,47 | 16,55 |
| 4,6 | 16,62 | 16,69 | 16,76 | 16,84 | 16,91 | 16,98 | 17,06 | 17,13 | 17,20 | 17,28 |
| 4,7 | 17,35 | 17,42 | 17,50 | 17,57 | 17,65 | 17,72 | 17,80 | 17,87 | 17,95 | 18,02 |
| 4,8 | 18,10 | 18,17 | 18,25 | 18,32 | 18,40 | 18,47 | 18,55 | 18,63 | 18,70 | 18,78 |
| 4,9 | 18,86 | 18,93 | 19,01 | 19,09 | 19,17 | 19,24 | 19,32 | 19,40 | 19,48 | 19,56 |
| **5,0** | 19,63 | 19,71 | 19,79 | 19,87 | 19,95 | 20,03 | 20,11 | 20,19 | 20,27 | 20,35 |
| 5,1 | 20,43 | 20,51 | 20,59 | 20,67 | 20,75 | 20,83 | 20,91 | 20,99 | 21,07 | 21,16 |
| 5,2 | 21,24 | 21,32 | 21,40 | 21,48 | 21,57 | 21,65 | 21,73 | 21,81 | 21,90 | 21,98 |
| 5,3 | 22,06 | 22,15 | 22,23 | 22,31 | 22,40 | 22,48 | 22,56 | 22,65 | 22,73 | 22,82 |
| 5,4 | 22,90 | 22,99 | 23,07 | 23,16 | 23,24 | 23,33 | 23,41 | 23,50 | 23,59 | 23,67 |

| *d* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5,5** | 23,76 | 23,84 | 23,93 | 24,02 | 24,11 | 24,19 | 24,28 | 24,37 | 24,45 | 24,54 |
| 5,6 | 24,63 | 24,72 | 24,81 | 24,89 | 24,98 | 25,07 | 25,16 | 25,25 | 25,34 | 25,43 |
| 5,7 | 25,52 | 25,61 | 25,70 | 25,79 | 25,88 | 25,97 | 26,06 | 26,15 | 26,24 | 26,33 |
| 5,8 | 26,42 | 26,51 | 26,60 | 26,69 | 26,79 | 26,88 | 26,97 | 27,06 | 27,15 | 27,25 |
| 5,9 | 27,34 | 27,43 | 27,53 | 27,62 | 27,71 | 27,81 | 27,90 | 27,99 | 28,09 | 28,18 |
| **6,0** | 28,27 | 28,37 | 28,46 | 28,56 | 28,65 | 28,75 | 28,84 | 28,94 | 29,03 | 29,13 |
| 6,1 | 29,22 | 29,32 | 29,42 | 29,51 | 29,61 | 29,71 | 29,80 | 29,90 | 30,00 | 30,09 |
| 6,2 | 30,19 | 30,29 | 30,39 | 30,48 | 30,58 | 30,68 | 30,78 | 30,88 | 30,97 | 31,07 |
| 6,3 | 31,17 | 31,27 | 31,37 | 31,47 | 31,57 | 31,67 | 31,77 | 31,87 | 31,97 | 32,07 |
| 6,4 | 32,17 | 32,27 | 32,37 | 32,47 | 32,57 | 32,67 | 32,78 | 32,88 | 32,98 | 33,08 |
| **6,5** | 33,18 | 33,29 | 33,39 | 33,49 | 33,59 | 33,70 | 33,80 | 33,90 | 34,00 | 34,11 |
| 6,6 | 34,21 | 34,32 | 34,42 | 34,52 | 34,63 | 34,73 | 34,84 | 34,94 | 35,05 | 35,15 |
| 6,7 | 35,26 | 35,36 | 35,47 | 35,57 | 35,68 | 35,78 | 35,89 | 36,00 | 36,10 | 36,21 |
| 6,8 | 36,32 | 36,42 | 36,53 | 36,64 | 36,75 | 36,85 | 36,96 | 37,07 | 37,18 | 37,28 |
| 6,9 | 37,39 | 37,50 | 37,61 | 37,72 | 37,83 | 37,94 | 38,05 | 38,16 | 38,26 | 38,37 |
| **7,0** | 38,48 | 38,59 | 38,70 | 38,82 | 38,93 | 39,04 | 39,15 | 39,26 | 39,37 | 39,48 |
| 7,1 | 39,59 | 39,70 | 39,82 | 39,93 | 40,04 | 40,15 | 40,26 | 40,38 | 40,49 | 40,60 |
| 7,2 | 40,72 | 40,83 | 40,94 | 41,06 | 41,17 | 41,28 | 41,40 | 41,51 | 41,62 | 41,74 |
| 7,3 | 41,85 | 41,97 | 42,08 | 42,20 | 42,31 | 42,43 | 42,54 | 42,66 | 42,78 | 42,89 |
| 7,4 | 43,01 | 43,12 | 43,24 | 43,36 | 43,47 | 43,59 | 43,71 | 43,83 | 43,94 | 44,06 |
| **7,5** | 44,18 | 44,30 | 44,41 | 44,53 | 44,65 | 44,77 | 44,89 | 45,01 | 45,13 | 45,25 |
| 7,6 | 45,36 | 45,48 | 45,60 | 45,72 | 45,84 | 45,96 | 46,08 | 46,20 | 46,32 | 46,45 |
| 7,7 | 46,57 | 46,69 | 46,81 | 46,93 | 47,05 | 47,17 | 47,29 | 47,42 | 47,54 | 47,66 |
| 7,8 | 47,78 | 47,91 | 48,03 | 48,15 | 48,27 | 48,40 | 48,52 | 48,65 | 48,77 | 48,89 |
| 7,9 | 49,02 | 49,14 | 49,27 | 49,39 | 49,51 | 49,64 | 49,76 | 49,89 | 50,01 | 50,14 |
| **8,0** | 50,27 | 50,39 | 50,52 | 50,64 | 50,77 | 50,90 | 51,02 | 51,15 | 51,28 | 51,40 |
| 8,1 | 51,53 | 51,66 | 51,78 | 51,91 | 52,04 | 52,17 | 52,30 | 52,42 | 52,55 | 52,68 |
| 8,2 | 52,81 | 52,94 | 53,07 | 53,20 | 53,33 | 53,46 | 53,59 | 53,72 | 53,85 | 53,98 |
| 8,3 | 54,11 | 54,24 | 54,37 | 54,50 | 54,63 | 54,76 | 54,89 | 55,02 | 55,15 | 55,29 |
| 8,4 | 55,42 | 55,55 | 55,68 | 55,81 | 55,95 | 56,08 | 56,21 | 56,35 | 56,48 | 56,61 |
| **8,5** | 56,75 | 56,88 | 57,01 | 57,15 | 57,28 | 57,41 | 57,55 | 57,68 | 57,82 | 57,95 |
| 8,6 | 58,09 | 58,22 | 58,36 | 58,49 | 58,63 | 58,77 | 58,90 | 59,04 | 59,17 | 59,31 |
| 8,7 | 59,45 | 59,58 | 59,72 | 59,86 | 59,99 | 60,13 | 60,27 | 60,41 | 60,55 | 60,68 |
| 8,8 | 60,82 | 60,96 | 61,10 | 61,24 | 61,38 | 61,51 | 61,65 | 61,79 | 61,93 | 62,07 |
| 8,9 | 62,21 | 62,35 | 62,49 | 62,63 | 62,77 | 62,91 | 63,05 | 63,19 | 63,33 | 63,48 |
| **9,0** | 63,62 | 63,76 | 63,90 | 64,04 | 64,18 | 64,33 | 64,47 | 64,61 | 64,75 | 64,90 |
| 9,1 | 65,04 | 65,18 | 65,33 | 65,47 | 65,61 | 65,76 | 65,90 | 66,04 | 66,19 | 66,33 |
| 9,2 | 66,48 | 66,62 | 66,77 | 66,91 | 67,06 | 67,20 | 67,35 | 67,49 | 67,64 | 67,78 |
| 9,3 | 67,93 | 68,08 | 68,22 | 68,37 | 68,51 | 68,66 | 68,81 | 68,96 | 69,10 | 69,25 |
| 9,4 | 69,40 | 69,55 | 69,69 | 69,84 | 69,99 | 70,14 | 70,29 | 70,44 | 70,58 | 70,73 |
| **9,5** | 70,88 | 71,03 | 71,18 | 71,33 | 71,48 | 71,63 | 71,78 | 71,93 | 72,08 | 72,23 |
| 9,6 | 72,38 | 72,53 | 72,68 | 72,84 | 72,99 | 73,14 | 73,29 | 73,44 | 73,59 | 73,75 |
| 9,7 | 73,90 | 74,05 | 74,20 | 74,36 | 74,51 | 74,66 | 74,82 | 74,97 | 75,12 | 75,28 |
| 9,8 | 75,43 | 75,58 | 75,74 | 75,89 | 76,05 | 76,20 | 76,36 | 76,51 | 76,67 | 76,82 |
| 9,9 | 76,98 | 77,13 | 77,29 | 77,44 | 77,60 | 77,76 | 77,91 | 78,07 | 78,23 | 78,38 |
| **10,0** | 78,54 | | | | | | | | | |

Véase en la pág. 66 las explicaciones de la tabla.

# *15. Elementos del segmento de círculo*

a) Longitud del arco y área del segmento para la cuerda igual a la unidad.

| Inclinación (razón de la flecha a la cuerda) $h/a$ | Longitud del arco $l$ | Area del segmento | Inclinación (razón de la flecha a la cuerda) $h/a$ | Longitud del arco $l$ | Area del segmento |
|---|---|---|---|---|---|
| — | — | — | 0,25 | 1,1591 | 0,1747 |
| 0,01 | 1,0003 | 0,0067 | 0,26 | 1,1715 | 0,1824 |
| 0,02 | 1,0011 | 0,0133 | 0,27 | 1,1843 | 0,1901 |
| 0,03 | 1,0024 | 0,0200 | 0,28 | 1,1975 | 0,1979 |
| 0,04 | 1,0043 | 0,0267 | 0,29 | 1,2110 | 0,2058 |
| 0,05 | 1,0067 | 0,0334 | 0,30 | 1,2250 | 0,2137 |
| 0,06 | 1,0096 | 0,0401 | 0,31 | 1,2393 | 0,2218 |
| 0,07 | 1,0130 | 0,0468 | 0,32 | 1,2539 | 0,2299 |
| 0,08 | 1,0170 | 0,0536 | 0,33 | 1,2689 | 0,2381 |
| 0,09 | 1,0215 | 0,0604 | 0,34 | 1,2843 | 0,2464 |
| 0,10 | 1,0265 | 0,0672 | 0,35 | 1,3000 | 0,2548 |
| 0,11 | 1,0320 | 0,0740 | 0,36 | 1,3160 | 0,2633 |
| 0,12 | 1,0380 | 0,0809 | 0,37 | 1,3323 | 0,2719 |
| 0,13 | 1,0445 | 0,0878 | 0,38 | 1,3490 | 0,2806 |
| 0,14 | 1,0515 | 0,0948 | 0,39 | 1,3660 | 0,2893 |
| 0,15 | 1,0590 | 0,1018 | 0,40 | 1,3832 | 0,2982 |
| 0,16 | 1,0669 | 0,1088 | 0,41 | 1,4008 | 0,3072 |
| 0,17 | 1,0754 | 0,1159 | 0,42 | 1,4186 | 0,3162 |
| 0,18 | 1,0843 | 0,1231 | 0,43 | 1,4367 | 0,3254 |
| 0,19 | 1,0936 | 0,1303 | 0,44 | 1,4551 | 0,3347 |
| 0,20 | 1,1035 | 0,1375 | 0,45 | 1,4738 | 0,3441 |
| 0,21 | 1,1137 | 0,1448 | 0,46 | 1,4927 | 0,3536 |
| 0,22 | 1,1244 | 0,1522 | 0,47 | 1,5118 | 0,3632 |
| 0,23 | 1,1356 | 0,1596 | 0,48 | 1,5313 | 0,3729 |
| 0,24 | 1,1471 | 0,1671 | 0,49 | 1,5509 | 0,3828 |
| 0,25 | 1,1591 | 0,1747 | 0,50 | 1,5708 | 0,3927 |

Véanse en la pág. 66 las explicaciones de la tabla.

Véanse en la pág. 195 las fórmulas referentes al segmento.

b) La longitud del arco, la flecha, la longitud de la cuerda y el área del segmento para un radio igual a la unidad

| Angulo central $\alpha°$ | Longitud del arco $l$ | Flecha $h$ | $\frac{l}{h}$ | Longitud de la cuerda $a$ | $\frac{a}{h}$ | Area del segmento |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0175 | 0,0000 | 458,37 | 0,0175 | 458,36 | 0,00000 |
| 2 | 0,0349 | 0,0002 | 229,19 | 0,0349 | 229,18 | 0,00000 |
| 3 | 0,0524 | 0,0003 | 152,80 | 0,0524 | 152,78 | 0,00001 |
| 4 | 0,0698 | 0,0006 | 114,60 | 0,0698 | 114,58 | 0,00003 |
| 5 | 0,0873 | 0,0010 | 91,69 | 0,0872 | 91,66 | 0,00006 |
| 6 | 0,1047 | 0,0014 | 76,41 | 0,1047 | 76,38 | 0,00010 |
| 7 | 0,1222 | 0,0019 | 65,50 | 0,1221 | 65,46 | 0,00015 |
| 8 | 0,1396 | 0,0024 | 57,32 | 0,1395 | 57,27 | 0,00023 |
| 9 | 0,1571 | 0,0031 | 50,96 | 0,1569 | 50,90 | 0,00032 |
| 10 | 0,1745 | 0,0038 | 45,87 | 0,1743 | 45,81 | 0,00044 |
| 11 | 0,1920 | 0,0046 | 41,70 | 0,1917 | 41,64 | 0,00059 |
| 12 | 0,2094 | 0,0055 | 38,23 | 0,2091 | 38,16 | 0,00076 |
| 13 | 0,2269 | 0,0064 | 35,30 | 0,2264 | 35,22 | 0,00097 |
| 14 | 0,2443 | 0,0075 | 32,78 | 0,2437 | 32,70 | 0,00121 |
| 15 | 0,2618 | 0,0086 | 30,60 | 0,2611 | 30,51 | 0,00149 |
| 16 | 0,2793 | 0,0097 | 28,69 | 0,2783 | 28,60 | 0,00181 |
| 17 | 0,2967 | 0,0110 | 27,01 | 0,2956 | 26,91 | 0,00217 |
| 18 | 0,3142 | 0,0123 | 25,52 | 0,3129 | 25,41 | 0,00257 |
| 19 | 0,3316 | 0,0137 | 24,18 | 0,3301 | 24,07 | 0,00302 |
| 20 | 0,3491 | 0,0152 | 22,98 | 0,3473 | 22,86 | 0,00352 |
| 21 | 0,3665 | 0,0167 | 21,89 | 0,3645 | 21,77 | 0,00408 |
| 22 | 0,3840 | 0,0184 | 20,90 | 0,3816 | 20,77 | 0,00468 |
| 23 | 0,4014 | 0,0201 | 20,00 | 0,3987 | 19,86 | 0,00535 |
| 24 | 0,4189 | 0,0219 | 19,17 | 0,4158 | 19,03 | 0,00607 |
| 25 | 0,4363 | 0,0237 | 18,41 | 0,4329 | 18,26 | 0,00686 |
| 26 | 0,4538 | 0,0256 | 17,71 | 0,4499 | 17,55 | 0,00771 |
| 27 | 0,4712 | 0,0276 | 17,06 | 0,4669 | 16,90 | 0,00862 |
| 28 | 0,4887 | 0,0297 | 16,45 | 0,4838 | 16,29 | 0,00961 |
| 29 | 0,5061 | 0,0319 | 15,89 | 0,5008 | 15,72 | 0,01067 |
| 30 | 0,5236 | 0,0341 | 15,37 | 0,5176 | 15,19 | 0,01180 |
| 31 | 0,5411 | 0,0364 | 14,88 | 0,5345 | 14,70 | 0,01301 |
| 32 | 0,5585 | 0,0387 | 14,42 | 0,5513 | 14,23 | 0,01429 |
| 33 | 0,5760 | 0,0412 | 13,99 | 0,5680 | 13,79 | 0,01566 |
| 34 | 0,5934 | 0,0437 | 13,58 | 0,5847 | 13,38 | 0,01711 |
| 35 | 0,6109 | 0,0463 | 13,20 | 0,6014 | 12,99 | 0,01864 |
| 36 | 0,6283 | 0,0489 | 12,84 | 0,6180 | 12,63 | 0,02027 |
| 37 | 0,6458 | 0,0517 | 12,50 | 0,6346 | 12,28 | 0,02198 |
| 38 | 0,6632 | 0,0545 | 12,17 | 0,6511 | 11,95 | 0,02378 |
| 39 | 0,6807 | 0,0574 | 11,87 | 0,6676 | 11,64 | 0,02568 |
| 40 | 0,6981 | 0,0603 | 11,58 | 0,6840 | 11,34 | 0,02767 |
| 41 | 0,7156 | 0,0633 | 11,30 | 0,7004 | 11,06 | 0,02976 |
| 42 | 0,7330 | 0,0664 | 11,04 | 0,7167 | 10,79 | 0,03195 |
| 43 | 0,7505 | 0,0696 | 10,79 | 0,7330 | 10,53 | 0,03425 |
| 44 | 0,7679 | 0,0728 | 10,55 | 0,7492 | 10,29 | 0,03664 |
| 45 | 0,7854 | 0,0761 | 10,32 | 0,7654 | 10,05 | 0,03915 |

Véanse en la pág. 66 las explicaciones de la tabla.
Véanse en la pág. 195 las fórmulas referentes al segmento.

| Angulo central $\alpha°$ | Longitud del arco $l$ | Flecha $h$ | $\frac{l}{h}$ | Longitud de la cuerda $a$ | $\frac{a}{h}$ | Area del segmento |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 0,7854 | 0,0761 | 10,32 | 0,7654 | 10,05 | 0,03915 |
| 46 | 0,8029 | 0,0795 | 10,10 | 0,7815 | 9,83 | 0,04176 |
| 47 | 0,8203 | 0,0829 | 9,89 | 0,7975 | 9,62 | 0,04448 |
| 48 | 0,8378 | 0,0865 | 9,69 | 0,8135 | 9,41 | 0,04731 |
| 49 | 0,8552 | 0,0900 | 9,50 | 0,8294 | 9,21 | 0,05025 |
| 50 | 0,8727 | 0,0937 | 9,31 | 0,8452 | 9,02 | 0,05331 |
| 51 | 0,8901 | 0,0974 | 9,14 | 0,8610 | 8,84 | 0,05649 |
| 52 | 0,9076 | 0,1012 | 8,97 | 0,8767 | 8,66 | 0,05978 |
| 53 | 0,9250 | 0,1051 | 8,80 | 0,8924 | 8,49 | 0,06319 |
| 54 | 0,9425 | 0,1090 | 8,65 | 0,9080 | 8,33 | 0,06673 |
| 55 | 0,9599 | 0,1130 | 8,50 | 0,9235 | 8,17 | 0,07039 |
| 56 | 0,9774 | 0,1171 | 8,35 | 0,9389 | 8,02 | 0,07417 |
| 57 | 0,9948 | 0,1212 | 8,21 | 0,9543 | 7,88 | 0,07808 |
| 58 | 1,0123 | 0,1254 | 8,07 | 0,9696 | 7,73 | 0,08212 |
| 59 | 1,0297 | 0,1296 | 7,94 | 0,9848 | 7,60 | 0,08629 |
| 60 | 1,0472 | 0,1340 | 7,82 | 1,0000 | 7,46 | 0,09059 |
| 61 | 1,0647 | 0,1384 | 7,69 | 1,0151 | 7,34 | 0,09502 |
| 62 | 1,0821 | 0,1428 | 7,58 | 1,0301 | 7,21 | 0,09958 |
| 63 | 1,0996 | 0,1474 | 7,46 | 1,0450 | 7,09 | 0,10428 |
| 64 | 1,1170 | 0,1520 | 7,35 | 1,0598 | 6,97 | 0,10911 |
| 65 | 1,1345 | 0,1566 | 7,24 | 1,0746 | 6,86 | 0,11408 |
| 66 | 1,1519 | 0,1613 | 7,14 | 1,0893 | 6,75 | 0,11919 |
| 67 | 1,1694 | 0,1661 | 7,04 | 1,1039 | 6,65 | 0,12443 |
| 68 | 1,1868 | 0,1710 | 6,94 | 1,1184 | 6,54 | 0,12982 |
| 69 | 1,2043 | 0,1759 | 6,85 | 1,1328 | 6,44 | 0,13535 |
| 70 | 1,2217 | 0,1808 | 6,76 | 1,1472 | 6,34 | 0,14102 |
| 71 | 1,2392 | 0,1859 | 6,67 | 1,1614 | 6,25 | 0,14683 |
| 72 | 1,2566 | 0,1910 | 6,58 | 1,1756 | 6,16 | 0,15279 |
| 73 | 1,2741 | 0,1961 | 6,50 | 1,1896 | 6,07 | 0,15889 |
| 74 | 1,2915 | 0,2014 | 6,41 | 1,2036 | 5,98 | 0,16514 |
| 75 | 1,3090 | 0,2066 | 6,33 | 1,2175 | 5,89 | 0,17154 |
| 76 | 1,3265 | 0,2120 | 6,26 | 1,2313 | 5,81 | 0,17808 |
| 77 | 1,3439 | 0,2174 | 6,18 | 1,2450 | 5,73 | 0,18477 |
| 78 | 1,3614 | 0,2229 | 6,11 | 1,2586 | 5,65 | 0,19160 |
| 79 | 1,3788 | 0,2284 | 6,04 | 1,2722 | 5,57 | 0,19859 |
| 80 | 1,3963 | 0,2340 | 5,97 | 1,2856 | 5,49 | 0,20573 |
| 81 | 1,4137 | 0,2396 | 5,90 | 1,2989 | 5,42 | 0,21301 |
| 82 | 1,4312 | 0,2453 | 5,83 | 1,3121 | 5,35 | 0,22045 |
| 83 | 1,4486 | 0,2510 | 5,77 | 1,3252 | 5,28 | 0,22804 |
| 84 | 1,4661 | 0,2569 | 5,71 | 1,3383 | 5,21 | 0,23578 |
| 85 | 1,4835 | 0,2627 | 5,65 | 1,3512 | 5,14 | 0,24367 |
| 86 | 1,5010 | 0,2686 | 5,59 | 1,3640 | 5,08 | 0,25171 |
| 87 | 1,5184 | 0,2746 | 5,53 | 1,3767 | 5,01 | 0,25990 |
| 88 | 1,5359 | 0,2807 | 5,47 | 1,3893 | 4,95 | 0,26825 |
| 89 | 1,5533 | 0,2867 | 5,42 | 1,4018 | 4,89 | 0,27675 |
| 90 | 1,5708 | 0,2929 | 5,36 | 1,4142 | 4,83 | 0,28540 |

| Angulo central $\alpha°$ | Longitud del arco $l$ | Flecha $h$ | $\frac{l}{h}$ | Longitud de la cuerda $a$ | $\frac{a}{h}$ | Area del segmento |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **90** | 1,5708 | 0,2929 | 5,36 | 1,4142 | 4,83 | 0,28540 |
| 91 | 1,5882 | 0,2991 | 5,31 | 1,4265 | 4,77 | 0,29420 |
| 92 | 1,6057 | 0,3053 | 5,26 | 1,4387 | 4,71 | 0,30316 |
| 93 | 1,6232 | 0,3116 | 5,21 | 1,4507 | 4,66 | 0,31226 |
| 94 | 1,6406 | 0,3180 | 5,16 | 1,4627 | 4,60 | 0,32152 |
| **95** | 1,6581 | 0,3244 | 5,11 | 1,4746 | 4,55 | 0,33093 |
| 96 | 1,6755 | 0,3309 | 5,06 | 1,4863 | 4,49 | 0,34050 |
| 97 | 1,6930 | 0,3374 | 5,02 | 1,4979 | 4,44 | 0,35021 |
| 98 | 1,7104 | 0,3439 | 4,97 | 1,5094 | 4,39 | 0,36008 |
| 99 | 1,7279 | 0,3506 | 4,93 | 1,5208 | 4,34 | 0,37009 |
| **100** | 1,7453 | 0,3572 | 4,89 | 1,5321 | 4,29 | 0,38026 |
| 101 | 1,7628 | 0,3639 | 4,84 | 1,5432 | 4,24 | 0,39058 |
| 102 | 1,7802 | 0,3707 | 4,80 | 1,5543 | 4,19 | 0,40104 |
| 103 | 1,7977 | 0,3775 | 4,76 | 1,5652 | 4,15 | 0,41166 |
| 104 | 1,8151 | 0,3843 | 4,72 | 1,5760 | 4,10 | 0,42242 |
| **105** | 1,8326 | 0,3912 | 4,68 | 1,5867 | 4,06 | 0,43333 |
| 106 | 1,8500 | 0,3982 | 4,65 | 1,5973 | 4,01 | 0,44439 |
| 107 | 1,8675 | 0,4052 | 4,61 | 1,6077 | 3,97 | 0,45560 |
| 108 | 1,8850 | 0,4122 | 4,57 | 1,6180 | 3,93 | 0,46695 |
| 109 | 1,9024 | 0,4193 | 4,54 | 1,6282 | 3,88 | 0,47845 |
| **110** | 1,9199 | 0,4264 | 4,50 | 1,6383 | 3,84 | 0,49008 |
| 111 | 1,9373 | 0,4336 | 4,47 | 1,6483 | 3,80 | 0,50187 |
| 112 | 1,9548 | 0,4408 | 4,43 | 1,6581 | 3,76 | 0,51379 |
| 113 | 1,9722 | 0,4481 | 4,40 | 1,6678 | 3,72 | 0,52586 |
| 114 | 1,9897 | 0,4554 | 4,37 | 1,6773 | 3,68 | 0,53806 |
| **115** | 2,0071 | 0,4627 | 4,34 | 1,6868 | 3,65 | 0,55041 |
| 116 | 2,0246 | 0,4701 | 4,31 | 1,6961 | 3,61 | 0,56289 |
| 117 | 2,0420 | 0,4775 | 4,28 | 1,7053 | 3,57 | 0,57551 |
| 118 | 2,0595 | 0,4850 | 4,25 | 1,7143 | 3,53 | 0,58827 |
| 119 | 2,0769 | 0,4925 | 4,22 | 1,7233 | 3,50 | 0,60116 |
| **120** | 2,0944 | 0,5000 | 4,19 | 1,7321 | 3,46 | 0,61418 |
| 121 | 2,1118 | 0,5076 | 4,16 | 1,7407 | 3,43 | 0,62734 |
| 122 | 2,1293 | 0,5152 | 4,13 | 1,7492 | 3,40 | 0,64063 |
| 123 | 2,1468 | 0,5228 | 4,11 | 1,7576 | 3,36 | 0,65404 |
| 124 | 2,1642 | 0,5305 | 4,08 | 1,7659 | 3,33 | 0,66759 |
| **125** | 2,1817 | 0,5383 | 4,05 | 1,7740 | 3,30 | 0,68125 |
| 126 | 2,1991 | 0,5460 | 4,03 | 1,7820 | 3,26 | 0,69505 |
| 127 | 2,2166 | 0,5538 | 4,00 | 1,7899 | 3,23 | 0,70897 |
| 128 | 2,2340 | 0,5616 | 3,98 | 1,7976 | 3,20 | 0,72301 |
| 129 | 2,2515 | 0,5695 | 3,95 | 1,8052 | 3,17 | 0,73716 |
| **130** | 2,2689 | 0,5774 | 3,93 | 1,8126 | 3,14 | 0,75144 |
| 131 | 2,2864 | 0,5853 | 3,91 | 1,8199 | 3,11 | 0,76584 |
| 132 | 2,3038 | 0,5933 | 3,88 | 1,8271 | 3,08 | 0,78034 |
| 133 | 2,3213 | 0,6013 | 3,86 | 1,8341 | 3,05 | 0,79497 |
| 134 | 2,3387 | 0,6093 | 3,84 | 1,8410 | 3,02 | 0,80970 |
| **135** | 2,3562 | 0,6173 | 3,82 | 1,8478 | 2,99 | 0,82454 |

Véanse en la pág. 66 las explicaciones de la tabla.

| Angulo central $\alpha°$ | Longitud del arco $l$ | Flecha $h$ | $\frac{l}{h}$ | Longitud de la cuerda $a$ | $\frac{a}{h}$ | Area del segmento |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **135** | 2,3562 | 0,6173 | 3,82 | 1,8478 | 2.99 | 0,82454 |
| 136 | 2,3736 | 0,6254 | 3,80 | 1,8544 | 2,97 | 0,83949 |
| 137 | 2,3911 | 0,6335 | 3,77 | 1,8608 | 2,94 | 0,85455 |
| 138 | 2,4086 | 0,6416 | 3,75 | 1,8672 | 2,91 | 0,86971 |
| 139 | 2,4260 | 0,6498 | 3,73 | 1,8733 | 2,88 | 0,88497 |
| **140** | 2,4435 | 0,6580 | 3,71 | 1,8794 | 2,86 | 0,90034 |
| 141 | 2,4609 | 0,6662 | 3,69 | 1,8853 | 2 83 | 0,91580 |
| 142 | 2,4784 | 0,6744 | 3,67 | 1,8910 | 2,80 | 0,93135 |
| 143 | 2,4958 | 0,6827 | 3,66 | 1,8966 | 2,78 | 0,94700 |
| 144 | 2,5133 | 0,6910 | 3,64 | 1,9021 | 2,75 | 0,96274 |
| **145** | 2,5307 | 0,6993 | 3,62 | 1,9074 | 2,73 | 0,97858 |
| 146 | 2,5482 | 0,7076 | 3,60 | 1,9126 | 2,70 | 0,99449 |
| 147 | 2,5656 | 0,7160 | 3,58 | 1,9176 | 2,68 | 1,01050 |
| 148 | 2,5831 | 0,7244 | 3,57 | 1,9225 | 2,65 | 1,02658 |
| 149 | 2,6005 | 0,7328 | 3,55 | 1,9273 | 2,63 | 1,04275 |
| **150** | 2,6180 | 0,7412 | 3,53 | 1,9319 | 2,61 | 1,05900 |
| 151 | 2,6354 | 0,7496 | 3,52 | 1,9363 | 2,58 | 1,07532 |
| 152 | 2,6529 | 0,7581 | 3,50 | 1,9406 | 2,56 | 1,09171 |
| 153 | 2,6704 | 0,7666 | 3,48 | 1,9447 | 2,54 | 1,10818 |
| 154 | 2,6878 | 0,7750 | 3,47 | 1,9487 | 2,51 | 1,12472 |
| **155** | 2,7053 | 0,7836 | 3,45 | 1,9526 | 2,49 | 1,14132 |
| 156 | 2,7227 | 0,7921 | 3,44 | 1,9563 | 2,47 | 1,15799 |
| 157 | 2,7402 | 0.8006 | 3,42 | 1,9598 | 2,45 | 1,17472 |
| 158 | 2,7576 | 0,8092 | 3,41 | 1,9633 | 2,43 | 1,19151 |
| 159 | 2,7751 | 0,8178 | 3,39 | 1,9665 | 2,40 | 1,20835 |
| **160** | 2,7925 | 0,8264 | 3,38 | 1,9696 | 2,38 | 1,22525 |
| 161 | 2,8100 | 0,8350 | 3,37 | 1,9726 | 2,36 | 1,24221 |
| 162 | 2,8274 | 0,8436 | 3,35 | 1,9754 | 2,34 | 1,25921 |
| 163 | 2,8449 | 0,8522 | 3,34 | 1,9780 | 2,32 | 1,27626 |
| 164 | 2,8623 | 0,8608 | 3,33 | 1,9805 | 2,30 | 1,29335 |
| **165** | 2,8798 | 0,8695 | 3,31 | 1,9829 | 2,28 | 1,31049 |
| 166 | 2,8972 | 0,8781 | 3,30 | 1,9851 | 2,26 | 1,32766 |
| 167 | 2,9147 | 0,8868 | 3,29 | 1,9871 | 2,24 | 1,34487 |
| 168 | 2,9322 | 0,8955 | 3,27 | 1,9890 | 2,22 | 1,36212 |
| 169 | 2,9496 | 0,9042 | 3,26 | 1,9908 | 2,20 | 1,37940 |
| **170** | 2,9671 | 0,9128 | 3,25 | 1,9924 | 2,18 | 1,39671 |
| 171 | 2,9845 | 0,9215 | 3,24 | 1,9938 | 2,16 | 1,41404 |
| 172 | 3,0020 | 0,9302 | 3,23 | 1,9951 | 2,14 | 1,43140 |
| 173 | 3,0194 | 0,9390 | 3,22 | 1,9963 | 2,13 | 1,44878 |
| 174 | 3,0369 | 0,9477 | 3,20 | 1,9973 | 2,11 | 1,46617 |
| **175** | 3,0543 | 0,9564 | 3,19 | 1,9981 | 2,09 | 1,48359 |
| 176 | 3,0718 | 0,9651 | 3,18 | 1,9988 | 2,07 | 1,50101 |
| 177 | 3,0892 | 0,9738 | 3,17 | 1,9993 | 2,05 | 1,51845 |
| 178 | 3,1067 | 0,9825 | 3,16 | 1,9997 | 2,04 | 1,53589 |
| 179 | 3,1241 | 0,9913 | 3,15 | 1,9999 | 2,02 | 1,55334 |
| **180** | 3,1416 | 1,0000 | 3,14 | 2,0000 | 2,00 | 1,57080 |

## *16. Reducción de grados a radianes*

Longitud del arco de la circunferencia de radio 1

| Angulo | Arco | Angulo | Arco | Angulo | arco |
|---|---|---|---|---|---|
| 1″ | 0,000005 | 1° | 0,017453 | 31° | 0,541052 |
| 2 | 0,000010 | 2 | 0,034907 | 32 | 0,558505 |
| 3 | 0,000015 | 3 | 0,052360 | 33 | 0,575959 |
| 4 | 0,000019 | 4 | 0,069813 | 34 | 0,593412 |
| 5 | 0,000024 | 5 | 0,087266 | 35 | 0,610865 |
| 6 | 0,000029 | 6 | 0,104720 | 36 | 0,628319 |
| 7 | 0,000034 | 7 | 0,122173 | 37 | 0,645772 |
| 8 | 0,000039 | 8 | 0,139626 | 38 | 0,663225 |
| 9 | 0,000044 | 9 | 0,157080 | 39 | 0,680678 |
| 10 | 0,000048 | 10 | 0,174533 | 40 | 0,698132 |
| 20 | 0,000097 | 11 | 0,191986 | 45 | 0,785398 |
| 30 | 0,000145 | 12 | 0,209440 | 50 | 0,872665 |
| 40 | 0,000194 | 13 | 0,226893 | 55 | 0,959931 |
| 50 | 0,000242 | 14 | 0,244346 | 60 | 1,047198 |
| | | 15 | 0,261799 | 65 | 1,134464 |
| 1′ | 0,000291 | 16 | 0,279253 | 70 | 1,221730 |
| 2 | 0,000582 | 17 | 0,296706 | 75 | 1,308997 |
| 3 | 0,000873 | 18 | 0,314159 | 80 | 1,396263 |
| 4 | 0,001164 | 19 | 0,331613 | 85 | 1,483530 |
| 5 | 0,001454 | 20 | 0,349066 | 90 | 1,570796 |
| 6 | 0,001745 | 21 | 0,366519 | 100 | 1,745329 |
| 7 | 0,002036 | 22 | 0,383972 | 120 | 2,094395 |
| 8 | 0,002327 | 23 | 0,401426 | 150 | 2,617994 |
| 9 | 0,002618 | 24 | 0,418879 | 180 | 3,141593 |
| 10 | 0,002909 | 25 | 0,436332 | 200 | 3,490659 |
| 20 | 0,005818 | 26 | 0,453786 | 250 | 4,363323 |
| 30 | 0,008727 | 27 | 0,471239 | 270 | 4,712389 |
| 40 | 0,011636 | 28 | 0,488692 | 300 | 5,235988 |
| 50 | 0,014544 | 29 | 0,506145 | 360 | 6,283185 |
| | | 30 | 0,523599 | 400 | 6,981317 |

*Ejemplos:*

1) 52°37′23″

| | |
|---|---|
| 50° | = 0,872665 |
| 2° | = 0,034907 |
| 30′ | = 0,008727 |
| 7′ | = 0,002036 |
| 20″ | = 0,000097 |
| 3″ | = 0,000015 |
| | 0,918447 |

52°37′23″ = 0,91845 radianes

Es cómodo realizar el cálculo con una calculadora de escritorio.

2) 5,645 radianes

| | |
|---|---|
| 5,235988 | = 300° |
| 0,409012 | |
| 0,401426 | = 23° |
| 0,007586 | |
| 0,005818 | = 20′ |
| 0,001768 | |
| 0,001745 | = 6′ |
| 0,000023 | = 5″ |

5,645 radianes = 323°26′5″

El arco igual al radio tiene 57°17′44″, 8 (= 1 radián).

# *17. Partes proporcionales*

| | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 1 |
| 2 | 2,2 | 2,4 | 2,6 | 2,8 | 3,0 | 3,2 | 3,4 | 3,6 | 3,8 | 4,0 | 2 |
| 3 | 3,3 | 3,6 | 3,9 | 4,2 | 4,5 | 4,8 | 5,1 | 5,4 | 5,7 | 6,0 | 3 |
| 4 | 4,4 | 4,8 | 5,2 | 5,6 | 6,0 | 6,4 | 6,8 | 7,2 | 7,6 | 8,0 | 4 |
| 5 | 5,5 | 6,0 | 6,5 | 7,0 | 7,5 | 8,0 | 8,5 | 9,0 | 9,5 | 10,0 | 5 |
| 6 | 6,6 | 7,2 | 7,8 | 8,4 | 9,0 | 9,6 | 10,2 | 10,8 | 11,4 | 12,0 | 6 |
| 7 | 7,7 | 8,4 | 9,1 | 9,8 | 10,5 | 11,2 | 11,9 | 12,6 | 13,3 | 14,0 | 7 |
| 8 | 8,8 | 9,6 | 10,4 | 11,2 | 12,0 | 12,8 | 13,6 | 14,4 | 15,2 | 16,0 | 8 |
| 9 | 9,9 | 10,8 | 11,7 | 12,6 | 13,5 | 14,4 | 15,3 | 16,2 | 17,1 | 18,0 | 9 |

| | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,9 | 3,0 | 1 |
| 2 | 4,2 | 4,4 | 4,6 | 4,8 | 5,0 | 5,2 | 5,4 | 5,6 | 5,8 | 6,0 | 2 |
| 3 | 6,3 | 6,6 | 6,9 | 7,2 | 7,5 | 7,8 | 8,1 | 8,4 | 8,7 | 9,0 | 3 |
| 4 | 8,4 | 8,8 | 9,2 | 9,6 | 10,0 | 10,4 | 10,8 | 11,2 | 11,6 | 12,0 | 4 |
| 5 | 10,5 | 11,0 | 11,5 | 12,0 | 12,5 | 13,0 | 13,5 | 14,0 | 14,5 | 15,0 | 5 |
| 6 | 12,6 | 13,2 | 13,8 | 14,4 | 15,0 | 15,6 | 16,2 | 16,8 | 17,4 | 18,0 | 6 |
| 7 | 14,7 | 15,4 | 16,1 | 16,8 | 17,5 | 18,2 | 18,9 | 19,6 | 20,3 | 21,0 | 7 |
| 8 | 16,8 | 17,6 | 18,4 | 19,2 | 20,0 | 20,8 | 21,6 | 22,4 | 23,2 | 24,0 | 8 |
| 9 | 18,9 | 19,8 | 20,7 | 21,6 | 22,5 | 23,4 | 24,3 | 25,2 | 26,1 | 27,0 | 9 |

| | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3,1 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 | 3,7 | 3,8 | 3,9 | 4,0 | 1 |
| 2 | 6,2 | 6,4 | 6,6 | 6,8 | 7,0 | 7,2 | 7,4 | 7,6 | 7,8 | 8,0 | 2 |
| 3 | 9,3 | 9,6 | 9,9 | 10,2 | 10,5 | 10,8 | 11,1 | 11,4 | 11,7 | 12,0 | 3 |
| 4 | 12,4 | 12,8 | 13,2 | 13,6 | 14,0 | 14,4 | 14,8 | 15,2 | 15,6 | 16,0 | 4 |
| 5 | 15,5 | 16,0 | 16,5 | 17,0 | 17,5 | 18,0 | 18,5 | 19,0 | 19,5 | 20,0 | 5 |
| 6 | 18,6 | 19,2 | 19,8 | 20,4 | 21,0 | 21,6 | 22,2 | 22,8 | 23,4 | 24,0 | 6 |
| 7 | 21,7 | 22,4 | 23,1 | 23,8 | 24,5 | 25,2 | 25,9 | 26,6 | 27,3 | 28,0 | 7 |
| 8 | 24,8 | 25,6 | 26,4 | 27,2 | 28,0 | 28,8 | 29,6 | 30,4 | 31,2 | 32,0 | 8 |
| 9 | 27,9 | 28,8 | 29,7 | 30,6 | 31,5 | 32,4 | 33,3 | 34,2 | 35,1 | 36,0 | 9 |

| | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4,1 | 4,2 | 4,3 | 4,4 | 4,5 | 4,6 | 4,7 | 4,8 | 4,9 | 5,0 | 1 |
| 2 | 8,2 | 8,4 | 8,6 | 8,8 | 9,0 | 9,2 | 9,4 | 9,6 | 9,8 | 10,0 | 2 |
| 3 | 12,3 | 12,6 | 12,9 | 13,2 | 13,5 | 13,8 | 14,1 | 14,4 | 14,7 | 15,0 | 3 |
| 4 | 16,4 | 16,8 | 17,2 | 17,6 | 18,0 | 18,4 | 18,8 | 19,2 | 19,6 | 20,0 | 4 |
| 5 | 20,5 | 21,0 | 21,5 | 22,0 | 22,5 | 23,0 | 23,5 | 24,0 | 24,5 | 25,0 | 5 |
| 6 | 24,6 | 25,2 | 25,8 | 26,4 | 27,0 | 27,6 | 28,2 | 28,8 | 29,4 | 30,0 | 6 |
| 7 | 28,7 | 29,4 | 30,1 | 30,8 | 31,5 | 32,2 | 32,9 | 33,6 | 34,3 | 35,0 | 7 |
| 8 | 32,8 | 33,6 | 34,4 | 35,2 | 36,0 | 36,8 | 37,6 | 38,4 | 39,2 | 40,0 | 8 |
| 9 | 36,9 | 37,8 | 38,7 | 39,6 | 40,5 | 41,4 | 42,3 | 43,2 | 44,1 | 45,0 | 9 |

| | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,1 | 5,2 | 5,3 | 5,4 | 5,5 | 5,6 | 5,7 | 5,8 | 5,9 | 6,0 | 1 |
| 2 | 10,2 | 10,4 | 10,6 | 10,8 | 11,0 | 11,2 | 11,4 | 11,6 | 11,8 | 12,0 | 2 |
| 3 | 15,3 | 15,6 | 15,9 | 16,2 | 16,5 | 16,8 | 17,1 | 17,4 | 17,7 | 18,0 | 3 |
| 4 | 20,4 | 20,8 | 21,2 | 21,6 | 22,0 | 22,4 | 22,8 | 23,2 | 23,6 | 24,0 | 4 |
| 5 | 25,5 | 26,0 | 26,5 | 27,0 | 27,5 | 28,0 | 28,5 | 29,0 | 29,5 | 30,0 | 5 |
| 6 | 30,6 | 31,2 | 31,8 | 32,4 | 33,0 | 33,6 | 34,2 | 34,8 | 35,4 | 36,0 | 6 |
| 7 | 35,7 | 36,4 | 37,1 | 37,8 | 38,5 | 39,2 | 39,9 | 40,6 | 41,3 | 42,0 | 7 |
| 8 | 40,8 | 41,6 | 42,4 | 43,2 | 44,0 | 44,8 | 45,6 | 46,4 | 47,2 | 48,0 | 8 |
| 9 | 45,9 | 46,8 | 47,7 | 48,6 | 49,5 | 50,4 | 51,3 | 52,2 | 53,1 | 54,0 | 9 |

| | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,4 | 6,5 | 6,6 | 6,7 | 6,8 | 6,9 | 7,0 | 1 |
| 2 | 12,2 | 12,4 | 12,6 | 12,8 | 13,0 | 13,2 | 13,4 | 13,6 | 13,8 | 14,0 | 2 |
| 3 | 18,3 | 18,6 | 18,9 | 19,2 | 19,5 | 19,8 | 20,1 | 20,4 | 20,7 | 21,0 | 3 |
| 4 | 24,4 | 24,8 | 25,2 | 25,6 | 26,0 | 26,4 | 26,8 | 27,2 | 27,6 | 28,0 | 4 |
| 5 | 30,5 | 31,0 | 31,5 | 32,0 | 32,5 | 33,0 | 33,5 | 34,0 | 34,5 | 35,0 | 5 |
| 6 | 36,6 | 37,2 | 37,8 | 38,4 | 39,0 | 39,6 | 40,2 | 40,8 | 41,4 | 42,0 | 6 |
| 7 | 42,7 | 43,4 | 44,1 | 44,8 | 45,5 | 46,2 | 46,9 | 47,6 | 48,3 | 49,0 | 7 |
| 8 | 48,8 | 49,6 | 50,4 | 51,2 | 52,0 | 52,8 | 53,6 | 54,4 | 55,2 | 56,0 | 8 |
| 9 | 54,9 | 55,8 | 56,7 | 57,6 | 58,5 | 59,4 | 60,3 | 61,2 | 62,1 | 63,0 | 9 |

| | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,1 | 7,2 | 7,3 | 7,4 | 7,5 | 7,6 | 7,7 | 7,8 | 7,9 | 8,0 | 1 |
| 2 | 14,2 | 14,4 | 14,6 | 14,8 | 15,0 | 15,2 | 15,4 | 15,6 | 15,8 | 16,0 | 2 |
| 3 | 21,3 | 21,6 | 21,9 | 22,2 | 22,5 | 22,8 | 23,1 | 23,4 | 23,7 | 24,0 | 3 |
| 4 | 28,4 | 28,8 | 29,2 | 29,6 | 30,0 | 30,4 | 30,8 | 31,2 | 31,6 | 32,0 | 4 |
| 5 | 35,5 | 36,0 | 36,5 | 37,0 | 37,5 | 38,0 | 38,5 | 39,0 | 39,5 | 40,0 | 5 |
| 6 | 42,6 | 43,2 | 43,8 | 44,4 | 45,0 | 45,6 | 46,2 | 46,8 | 47,4 | 48,0 | 6 |
| 7 | 49,7 | 50,4 | 51,1 | 51,8 | 52,5 | 53,2 | 53,9 | 54,6 | 55,3 | 56,0 | 7 |
| 8 | 56,8 | 57,6 | 58,4 | 59,2 | 60,0 | 60,8 | 61,6 | 62,4 | 63,2 | 64,0 | 8 |
| 9 | 63,9 | 64,8 | 65,7 | 66,6 | 67,5 | 68,4 | 69,3 | 70,2 | 71,1 | 72,0 | 9 |

| | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8,1 | 8,2 | 8,3 | 8,4 | 8,5 | 8,6 | 8,7 | 8,8 | 8,9 | 9,0 | 1 |
| 2 | 16,2 | 16,4 | 16,6 | 16,8 | 17,0 | 17,2 | 17,4 | 17,6 | 17,8 | 18,0 | 2 |
| 3 | 24,3 | 24,6 | 24,9 | 25,2 | 25,5 | 25,8 | 26,1 | 26,4 | 26,7 | 27,0 | 3 |
| 4 | 32,4 | 32,8 | 33,2 | 33,6 | 34,0 | 34,4 | 34,8 | 35,2 | 35,6 | 36,0 | 4 |
| 5 | 40,5 | 41,0 | 41,5 | 42,0 | 42,5 | 43,0 | 43,5 | 44,0 | 44,5 | 45,0 | 5 |
| 6 | 48,6 | 49,2 | 49,8 | 50,4 | 51,0 | 51,6 | 52,2 | 52,8 | 53,4 | 54,0 | 6 |
| 7 | 56,7 | 57,4 | 58,1 | 58,8 | 59,5 | 60,2 | 60,9 | 61,6 | 62,3 | 63,0 | 7 |
| 8 | 64,8 | 65,6 | 66,4 | 67,2 | 68,0 | 68,8 | 69,6 | 70,4 | 71,2 | 72,0 | 8 |
| 9 | 72,9 | 73,8 | 74,7 | 75,6 | 76,5 | 77,4 | 78,3 | 79,2 | 80,1 | 81,0 | 9 |

## *18. Tabla para la interpolación cuadrática*

| $k$ | $k_1$ | $k$ | $k$ | $k_1$ | $k$ | $k$ | $k_1$ | $k$ | $k$ | $k_1$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,000 | | 1,000 | 0,066 | | 0,934 | 0,147 | | 0,853 | 0,255 | | 0,745 |
| | 0,000 | | | 0,016 | | | 0,032 | | | 0,048 | |
| 0,002 | | 0,998 | 0,071 | | 0,929 | 0,153 | | 0,847 | 0,263 | | 0,737 |
| | 0,001 | | | 0,017 | | | 0,033 | | | 0,049 | |
| 0,006 | | 0,994 | 0,075 | | 0,925 | 0,159 | | 0,841 | 0,271 | | 0,729 |
| | 0,002 | | | 0,018 | | | 0,034 | | | 0,050 | |
| 0,010 | | 0,990 | 0,080 | | 0,920 | 0,165 | | 0,835 | 0,280 | | 0,720 |
| | 0,003 | | | 0,019 | | | 0,035 | | | 0,051 | |
| 0,014 | | 0,986 | 0,085 | | 0,915 | 0,171 | | 0,829 | 0,290 | | 0,710 |
| | 0,004 | | | 0,020 | | | 0,036 | | | 0,052 | |
| 0,018 | | 0,982 | 0,090 | | 0,910 | 0,177 | | 0,823 | 0,300 | | 0,700 |
| | 0,005 | | | 0,021 | | | 0,037 | | | 0,053 | |
| 0,022 | | 0,978 | 0,095 | | 0,905 | 0,183 | | 0,817 | 0,310 | | 0,690 |
| | 0,006 | | | 0,022 | | | 0,038 | | | 0,054 | |
| 0,026 | | 0,974 | 0,100 | | 0,900 | 0,190 | | 0,810 | 0,321 | | 0,679 |
| | 0,007 | | | 0,023 | | | 0,039 | | | 0,055 | |
| 0,030 | | 0,970 | 0,105 | | 0,895 | 0,196 | | 0,804 | 0,332 | | 0,668 |
| | 0,008 | | | 0,024 | | | 0,040 | | | 0,056 | |
| 0,035 | | 0,965 | 0,110 | | 0,890 | 0,203 | | 0,797 | 0,345 | | 0,655 |
| | 0,009 | | | 0,025 | | | 0,041 | | | 0,057 | |
| 0,039 | | 0,961 | 0,115 | | 0,885 | 0,210 | | 0,790 | 0,358 | | 0,642 |
| | 0,010 | | | 0,026 | | | 0,042 | | | 0,058 | |
| 0,043 | | 0,957 | 0,120 | | 0,880 | 0,217 | | 0,783 | 0,373 | | 0,627 |
| | 0,011 | | | 0,027 | | | 0,043 | | | 0,059 | |
| 0,048 | | 0,952 | 0,125 | | 0,875 | 0,224 | | 0,776 | 0,390 | | 0,610 |
| | 0,012 | | | 0,028 | | | 0,044 | | | 0,060 | |
| 0,052 | | 0,948 | 0,131 | | 0,869 | 0,231 | | 0,769 | 0,410 | | 0,590 |
| | 0,013 | | | 0,029 | | | 0,045 | | | 0,061 | |
| 0,057 | | 0,943 | 0,136 | | 0,864 | 0,239 | | 0,761 | 0,436 | | 0,564 |
| | 0,014 | | | 0,030 | | | 0,046 | | | 0,062 | |
| 0,061 | | 0,939 | 0,142 | | 0,858 | 0,247 | | 0,753 | 0,500 | | 0,500 |
| | 0,015 | | | 0,031 | | | 0,047 | | | | |
| 0,066 | | 0,934 | 0,147 | | 0,853 | 0,255 | | 0,745 | | | |

Véase en la pág. 15 la interpolación cuadrática.

A todos los valores de $k$ comprendidos entre valores contiguos de la columna $k$ (tanto de la derecha como de la izquierda) corresponde un mismo valor $k_1$, situado entre estos valores contiguos de $k$. A los valores "críticos" (tabulares) de $k$ corresponde el $k_1$ superior.

*Ejemplos:*

1) para $k = 0,8$ $k_1 = 0,040$ (igual que para todos los otros $k$ comprendidos entre 0,797 y 0,804 o entre 0,196 y 0,203);

2) para $k = 0,3$ (o para $k = 0,7$) $k_1 = 0,052$.

# B. TABLAS DE FUNCIONES ESPECIALES

## *19. Función Gamma**

| $x$ | $\Gamma(x)$ | $x$ | $\Gamma(x)$ | $x$ | $\Gamma(x)$ | $x$ | $\Gamma(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,00** | 1,00000 | **1,25** | 0,90640 | **1,50** | 0,88623 | **1,75** | 0,91906 |
| 01 | 0,99433 | 26 | 0,90440 | 51 | 0,88659 | 76 | 0,92137 |
| 02 | 0,98884 | 27 | 0,90250 | 52 | 0,88704 | 77 | 0,92376 |
| 03 | 0,98355 | 28 | 0,90072 | 53 | 0,88757 | 78 | 0,92623 |
| 04 | 0,97844 | 29 | 0,89904 | 54 | 0,88818 | 79 | 0,92877 |
| **1,05** | 0,97350 | **1,30** | 0,89747 | **1,55** | 0,88887 | **1,80** | 0,93138 |
| 06 | 0,96874 | 31 | 0,89600 | 56 | 0,88964 | 81 | 0,93408 |
| 07 | 0,96415 | 32 | 0,89464 | 57 | 0,89049 | 82 | 0,93685 |
| 08 | 0,95973 | 33 | 0,89338 | 58 | 0,89142 | 83 | 0,93969 |
| 09 | 0,95546 | 34 | 0,89222 | 59 | 0,89243 | 84 | 0,94261 |
| **1,10** | 0,95135 | **1,35** | 0,89115 | **1,60** | 0,89352 | **1,85** | 0,94561 |
| 11 | 0,94740 | 36 | 0,89018 | 61 | 0,89468 | 86 | 0,94869 |
| 12 | 0,94359 | 37 | 0,88931 | 62 | 0,89592 | 87 | 0,95184 |
| 13 | 0,93993 | 38 | 0,88854 | 63 | 0,89724 | 88 | 0,95507 |
| 14 | 0,93642 | 39 | 0,88785 | 64 | 0,89864 | 89 | 0,95838 |
| **1,15** | 0,93304 | **1,40** | 0,88726 | **1,65** | 0,90012 | **1,90** | 0,96177 |
| 16 | 0,92980 | 41 | 0,88676 | 66 | 0,90167 | 91 | 0,96523 |
| 17 | 0,92670 | 42 | 0,88636 | 67 | 0,90330 | 92 | 0,96877 |
| 18 | 0,92373 | 43 | 0,88604 | 68 | 0,90500 | 93 | 0,97240 |
| 19 | 0,92089 | 44 | 0,88581 | 69 | 0,90678 | 94 | 0,97610 |
| **1,20** | 0,91817 | **1,45** | 0,88566 | **1,70** | 0,90864 | **1,95** | 0,97988 |
| 21 | 0,91558 | 46 | 0,88560 | 71 | 0,91057 | 96 | 0,98374 |
| 22 | 0,91311 | 47 | 0,88563 | 72 | 0,91258 | 97 | 0,98768 |
| 23 | 0,91075 | 48 | 0,88575 | 73 | 0,91467 | 98 | 0,99171 |
| 24 | 0,90852 | 49 | 0,88595 | 74 | 0,91683 | 99 | 0,99581 |
| **1,25** | 0,90640 | **1,50** | 0,88623 | **1,75** | 0,91906 | **2,00** | 1,00000 |

Los valores de la función Gamma para $x < 1$ y $x > 2$ pueden ser calculados mediante las fórmulas:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \qquad \Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1).$$

*Ejemplos:*

1) $\Gamma(0{,}7) = \dfrac{\Gamma(1{,}7)}{0{,}7} = \dfrac{0{,}90864}{0{,}7} = 1{,}2981,$

2) $\Gamma(3{,}5) = 2{,}5\,\Gamma(2{,}5) = 2{,}5\cdot 1{,}5\cdot\Gamma(1{,}5) = 2{,}5\cdot 1{,}5\cdot 0{,}88623 = 3{,}32336.$

---

* Véase en la pág. 185 la definición, las fórmulas y las gráficas.

## 20. *Funciones de Bessel (cilíndricas)**

| $x$ | $J_0(x)$ | $J_1(x)$ | $Y_0(x)$ | $Y_1(x)$ | $I_0(x)$ | $I_1(x)$ | $K_0(x)$ | $K_1(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | +1,0000 | +0,0000 | $-\infty$ | $-\infty$ | +1,000 | 0,0000 | $\infty$ | $\infty$ |
| 0,1 | 0,9975 | 0,0499 | −1,5342 | −6,4590 | 1,003 | +0,0501 | 2,4271 | 9,8538 |
| 0,2 | 0,9900 | 0,0995 | 1,0811 | 3,3238 | 1,010 | 0,1005 | 1,7527 | 4,7760 |
| 0,3 | 0,9776 | 0,1483 | 0,8073 | 2,2931 | 1,023 | 0,1517 | 1,3725 | 3,0560 |
| 0,4 | 0,9604 | 0,1960 | 0,6060 | 1,7809 | 1,040 | 0,2040 | 1,1145 | 2,1844 |
| 0,5 | +0,9385 | +0,2423 | −0,4445 | −1,4715 | 1,063 | 0,2579 | 0,9244 | 1,6564 |
| 0,6 | 0,9120 | 0,2867 | 0,3085 | 1,2604 | 1,092 | 0,3137 | 0,7775 | 1,3028 |
| 0,7 | 0,8812 | 0,3290 | 0,1907 | 1,1032 | 1,126 | 0,3719 | 0,6605 | 1,0503 |
| 0,8 | 0,8463 | 0,3688 | −0,0868 | 0,9781 | 1,167 | 0,4329 | 0,5653 | 0,8618 |
| 0,9 | 0,8075 | 0,4059 | +0,0056 | 0,8731 | 1,213 | 0,4971 | 0,4867 | 0,7165 |
| 1,0 | +0,7652 | +0,4401 | +0,0883 | −0,7812 | 1,266 | 0,5652 | 0,4210 | 0,6019 |
| 1,1 | 0,7196 | 0,4709 | 0,1622 | 0,6981 | 1,326 | 0,6375 | 0,3656 | 0,5098 |
| 1,2 | 0,6711 | 0,4983 | 0,2281 | 0,6211 | 1,394 | 0,7147 | 0,3185 | 0,4346 |
| 1,3 | 0,6201 | 0,5220 | 0,2865 | 0,5485 | 1,469 | 0,7973 | 0,2782 | 0,3725 |
| 1,4 | 0,5669 | 0,5419 | 0,3379 | 0,4791 | 1,553 | 0,8861 | 0,2437 | 0,3208 |
| 1,5 | +0,5118 | +0,5579 | +0,3824 | −0,4123 | 1,647 | 0,9817 | 0,2138 | 0,2774 |
| 1,6 | 0,4554 | 0,5699 | 0,4204 | 0,3476 | 1,750 | 1,085 | 0,1880 | 0,2406 |
| 1,7 | 0,3980 | 0,5778 | 0,4520 | 0,2847 | 1,864 | 1,196 | 0,1655 | 0,2094 |
| 1,8 | 0,3400 | 0,5815 | 0,4774 | 0,2237 | 1,990 | 1,317 | 0,1459 | 0,1826 |
| 1,9 | 0,2818 | 0,5812 | 0,4968 | 0,1644 | 2,128 | 1,448 | 0,1288 | 0,1597 |
| 2,0 | +0,2239 | +0,5767 | +0,5104 | −0,1070 | 2,280 | 1,591 | 0,1139 | 0,1399 |
| 2,1 | 0,1666 | 0,5683 | 0,5183 | −0,0517 | 2,446 | 1,745 | 0,1008 | 0,1227 |
| 2,2 | 0,1104 | 0,5560 | 0,5208 | +0,0015 | 2,629 | 1,914 | 0,08927 | 0,1079 |
| 2,3 | 0,0555 | 0,5399 | 0,5181 | 0,0523 | 2,830 | 2,098 | 0,07914 | 0,09498 |
| 2,4 | 0,0025 | 0,5202 | 0,5104 | 0,1005 | 3,049 | 2,298 | 0,07022 | 0,08372 |
| 2,5 | −0,0484 | +0,4971 | +0,4981 | +0,1459 | 3,290 | 2,517 | 0,06235 | 0,07389 |
| 2,6 | 0,0968 | 0,4708 | 0,4813 | 0,1884 | 3,553 | 2,755 | 0,05540 | 0,06528 |
| 2,7 | 0,1424 | 0,4416 | 0,4605 | 0,2276 | 3,842 | 3,016 | 0,04926 | 0,05774 |
| 2,8 | 0,1850 | 0,4097 | 0,4359 | 0,2635 | 4,157 | 3,301 | 0,04382 | 0,05111 |
| 2,9 | 0,2243 | 0,3754 | 0,4079 | 0,2959 | 4,503 | 3,613 | 0,03901 | 0,04529 |
| 3,0 | −0,2601 | +0,3391 | +0,3769 | +0,3247 | 4,881 | 3,953 | 0,03474 | 0,04016 |
| 3,1 | 0,2921 | 0,3009 | 0,3431 | 0,3496 | 5,294 | 4,326 | 0,03095 | 0,03563 |
| 3,2 | 0,3202 | 0,2613 | 0,3070 | 0,3707 | 5,747 | 4,734 | 0,02759 | 0,03164 |
| 3,3 | 0,3443 | 0,2207 | 0,2691 | 0,3879 | 6,243 | 5,181 | 0,02461 | 0,02812 |
| 3,4 | 0,3643 | 0,1792 | 0,2296 | 0,4010 | 6,785 | 5,670 | 0,02196 | 0,02500 |
| 3,5 | −0,3801 | +0,1374 | +0,1890 | +0,4102 | 7,378 | 6,206 | 0,01960 | 0,02224 |
| 3,6 | 0,3918 | 0,0955 | 0,1477 | 0,4154 | 8,028 | 6,793 | 0,01750 | 0,01979 |
| 3,7 | 0,3992 | 0,0538 | 0,1061 | 0,4167 | 8,739 | 7,436 | 0,01563 | 0,01763 |
| 3,8 | 0,4026 | +0,0128 | 0,0645 | 0,4141 | 9,517 | 8,140 | 0,01397 | 0,01571 |
| 3,9 | 0,4018 | −0,0272 | +0,0234 | 0,4078 | 10,37 | 8,913 | 0,01248 | 0,01400 |
| 4,0 | −0,3971 | −0,0660 | −0,0169 | +0,3979 | 11,30 | 9,759 | 0,01116 | 0,01248 |
| 4,1 | 0,3887 | 0,1033 | 0,0561 | 0,3846 | 12,32 | 10,69 | 0,009980 | 0,01114 |
| 4,2 | 0,3766 | 0,1386 | 0,0938 | 0,3680 | 13,44 | 11,71 | 0,008927 | 0,009938 |
| 4,3 | 0,3610 | 0,1719 | 0,1296 | 0,3484 | 14,67 | 12,82 | 0,007988 | 0,008872 |
| 4,4 | 0,3423 | 0,2028 | 0,1633 | 0,3260 | 16,01 | 14,05 | 0,007149 | 0,007923 |
| 4,5 | −0,3205 | −0,2311 | −0,1947 | +0,3010 | 17,48 | 15,39 | 0,006400 | 0,007078 |
| 4,6 | 0,2961 | 0,2566 | 0,2235 | 0,2737 | 19,09 | 16,86 | 0,005730 | 0,006325 |
| 4,7 | 0,2693 | 0,2791 | 0,2494 | 0,2445 | 20,86 | 18,48 | 0,005132 | 0,005654 |
| 4,8 | 0,2404 | 0,2985 | 0,2723 | 0,2136 | 22,79 | 20,25 | 0,004597 | 0,005055 |
| 4,9 | 0,2097 | 0,3147 | 0,2921 | 0,1812 | 24,91 | 22,20 | 0,004119 | 0,004521 |

* Véanse en las págs. 532-535 la definición, las fórmulas y las gráficas.

| $x$ | $J_0(x)$ | $J_1(x)$ | $Y_0(x)$ | $Y_1(x)$ | $I_0(x)$ | $I_1(x)$ | $K_0(x)$ | $K_1(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | 0,00 | 0,00 |
| **5,0** | −0,1776 | −0,3276 | −0,3085 | +0,1479 | 27,24 | 24,34 | 369 1 | 404 5 |
| **5,1** | 0,1443 | 0,3371 | 0,3216 | 0,1137 | 29,79 | 26,68 | 330 8 | 361 9 |
| **5,2** | 0,1103 | 0,3432 | 0,3313 | 0,0792 | 32,58 | 29,25 | 296 6 | 323 9 |
| **5,3** | 0,0758 | 0,3460 | 0,3374 | 0,0445 | 35,65 | 32,08 | 265 9 | 290 0 |
| **5,4** | 0,0412 | 0,3453 | 0,3402 | +0,0101 | 39,01 | 35,18 | 238 5 | 259 7 |
| **5,5** | −0,0068 | −0,3414 | −0,3395 | −0,0238 | 42,69 | 38,59 | 213 9 | 232 6 |
| **5,6** | +0,0270 | 0,3343 | 0,3354 | 0,0568 | 46,74 | 42,33 | 191 8 | 208 3 |
| **5,7** | 0,0599 | 0,3241 | 0,3282 | 0,0887 | 51,17 | 46,44 | 172 1 | 186 6 |
| **5,8** | 0,0917 | 0,3110 | 0,3177 | 0,1192 | 56,04 | 50,95 | 154 4 | 167 3 |
| **5,9** | 0,1220 | 0,2951 | 0,3044 | 0,1481 | 61,38 | 55,90 | 138 6 | 149 9 |
| **6,0** | +0,1506 | −0,2767 | −0,2882 | −0,1750 | 67,23 | 61,34 | 124 4 | 134 4 |
| **6,1** | 0,1773 | 0,2559 | 0,2694 | 0,1998 | 73,66 | 67,32 | 111 7 | 120 5 |
| **6,2** | 0,2017 | 0,2329 | 0,2483 | 0,2223 | 80,72 | 73,89 | 100 3 | 108 1 |
| **6,3** | 0,2238 | 0,2081 | 0,2251 | 0,2422 | 88,46 | 81,10 | 090 01 | 096 91 |
| **6,4** | 0,2433 | 0,1816 | 0,1999 | 0,2596 | 96,96 | 89,03 | 080 83 | 086 93 |
| **6,5** | +0,2601 | −0,1538 | −0,1732 | −0,2741 | 106,3 | 97,74 | 072 59 | 077 99 |
| **6,6** | 0,2740 | 0,1250 | 0,1452 | 0,2857 | 116,5 | 107,3 | 065 20 | 069 98 |
| **6,7** | 0,2851 | 0,0953 | 0,1162 | 0,2945 | 127,8 | 117,8 | 058 57 | 062 80 |
| **6,8** | 0,2931 | 0,0652 | 0,0864 | 0,3002 | 140,1 | 129,4 | 052 62 | 056 36 |
| **6,9** | 0,2981 | 0,0349 | 0,0563 | 0,3029 | 153,7 | 142,1 | 047 28 | 050 59 |
| **7,0** | +0,3001 | −0,0047 | −0,0259 | −0,3027 | 168,6 | 156,0 | 042 48 | 045 42 |
| **7,1** | 0,2991 | +0,0252 | +0,0042 | 0,2995 | 185,0 | 171,4 | 038 17 | 040 78 |
| **7,2** | 0,2951 | 0,0543 | 0,0339 | 0,2934 | 202,9 | 188,3 | 034 31 | 036 62 |
| **7,3** | 0,2882 | 0,0826 | 0,0628 | 0,2846 | 222,7 | 206,8 | 030 84 | 032 88 |
| **7,4** | 0,2786 | 0,1096 | 0,0907 | 0,2731 | 244,3 | 227,2 | 027 72 | 029 53 |
| **7,5** | +0,2663 | +0,1352 | +0,1173 | −0,2591 | 268,2 | 249,6 | 024 92 | 026 53 |
| **7,6** | 0,2516 | 0,1592 | 0,1424 | 0,2428 | 294,3 | 274,2 | 022 40 | 023 83 |
| **7,7** | 0,2346 | 0,1813 | 0,1658 | 0,2243 | 323,1 | 301,3 | 020 14 | 021 41 |
| **7,8** | 0,2154 | 0,2014 | 0,1872 | 0,2039 | 354,7 | 331,1 | 018 11 | 019 24 |
| **7,9** | 0,1944 | 0,2192 | 0,2065 | 0,1817 | 389,4 | 363,9 | 016 29 | 017 29 |
| **8,0** | +0,1717 | +0,2346 | +0,2235 | −0,1581 | 427,6 | 399,9 | 014 65 | 015 54 |
| **8,1** | 0,1475 | 0,2476 | 0,2381 | 0,1331 | 469,5 | 439,5 | 013 17 | 013 96 |
| **8,2** | 0,1222 | 0,2580 | 0,2501 | 0,1072 | 515,6 | 483,0 | 011 85 | 012 55 |
| **8,3** | 0,0960 | 0,2657 | 0,2595 | 0,0806 | 566,3 | 531,0 | 010 66 | 011 28 |
| **8,4** | 0,0692 | 0,2708 | 0,2662 | 0,0535 | 621,9 | 583,7 | 009 588 | 010 14 |
| **8,5** | +0,0419 | +0,2731 | +0,2702 | −0,0262 | 683,2 | 641,6 | 008 626 | 009 120 |
| **8,6** | +0,0146 | 0,2728 | 0,2715 | +0,0011 | 750,5 | 705,4 | 007 761 | 008 200 |
| **8,7** | −0,0125 | 0,2697 | 0,2700 | 0,0280 | 824,4 | 775,5 | 006 983 | 007 374 |
| **8,8** | 0,0392 | 0,2641 | 0,2659 | 0,0544 | 905,8 | 852,7 | 006 283 | 006 631 |
| **8,9** | 0,0653 | 0,2559 | 0,2592 | 0,0799 | 995,2 | 937,5 | 005 654 | 005 964 |
| **9,0** | −0,0903 | +0,2453 | +0,2499 | +0,1043 | 1094 | 1031 | 005 088 | 005 364 |
| **9,1** | 0,1142 | 0,2324 | 0,2383 | 0,1275 | 1202 | 1134 | 004 579 | 004 825 |
| **9,2** | 0,1367 | 0,2174 | 0,2245 | 0,1491 | 1321 | 1247 | 004 121 | 004 340 |
| **9,3** | 0,1577 | 0,2004 | 0,2086 | 0,1691 | 1451 | 1371 | 003 710 | 003 904 |
| **9,4** | 0,1768 | 0,1816 | 0,1907 | 0,1871 | 1595 | 1508 | 003 339 | 003 512 |
| **9,5** | −0,1939 | +0,1613 | +0,1712 | +0,2032 | 1753 | 1658 | 003 006 | 003 160 |
| **9,6** | 0,2090 | 0,1395 | 0,1502 | 0,2171 | 1927 | 1824 | 002 706 | 002 843 |
| **9,7** | 0,2218 | 0,1166 | 0,1279 | 0,2287 | 2119 | 2006 | 002 436 | 002 559 |
| **9,8** | 0,2323 | 0,0928 | 0,1045 | 0,2379 | 2329 | 2207 | 002 193 | 002 302 |
| **9,9** | 0,2403 | 0,0684 | 0,0804 | 0,2447 | 2561 | 2428 | 001 975 | 002 072 |
| **10,0** | −0,2459 | +0,0435 | +0,0557 | +0,2490 | 2816 | 2671 | 001 778 | 001 865 |

## *21. Polinomios de Legendre (funciones esféricas)**

| $x = P_1(x)$ | $P_2(x)$ | $P_3(x)$ | $P_4(x)$ | $P_5(x)$ | $P_6(x)$ | $P_7(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | −0,5000 | 0,0000 | 0,3750 | 0,0000 | −0,3125 | 0,0000 |
| 0,05 | −0,4962 | −0,0747 | 0,3657 | 0,0927 | −0,2962 | −0,1069 |
| 0,10 | −0,4850 | −0,1475 | 0,3379 | 0,1788 | −0,2488 | −0,1995 |
| 0,15 | −0,4662 | −0,2166 | 0,2928 | 0,2523 | −0,1746 | −0,2649 |
| 0,20 | −0,4400 | −0,2800 | 0,2320 | 0,3075 | −0,0806 | −0,2935 |
| 0,25 | −0,4062 | −0,3359 | 0,1577 | 0,3397 | +0,0243 | −0,2799 |
| 0,30 | −0,3650 | −0,3825 | +0,0729 | 0,3454 | 0,1292 | −0,2241 |
| 0,35 | −0,3162 | −0,4178 | −0,0187 | 0,3225 | 0,2225 | −0,1318 |
| 0,40 | −0,2600 | −0,4400 | −0,1130 | 0,2706 | 0,2926 | −0,0146 |
| 0,45 | −0,1962 | −0,4472 | −0,2050 | 0,1917 | 0,3290 | +0,1106 |
| 0,50 | −0,1250 | −0,4375 | −0,2891 | +0,0898 | 0,3232 | 0,2231 |
| 0,55 | −0,0462 | −0,4091 | −0,3590 | −0,0282 | 0,2708 | 0,3007 |
| 0,60 | +0,0400 | −0,3600 | −0,4080 | −0,1526 | 0,1721 | 0,3226 |
| 0,65 | 0,1338 | −0,2884 | −0,4284 | −0,2705 | +0,0347 | 0,2737 |
| 0,70 | 0,2350 | −0,1925 | −0,4121 | −0,3652 | −0,1253 | +0,1502 |
| 0,75 | 0,3438 | −0,0703 | −0,3501 | −0,4164 | −0,2808 | −0,0342 |
| 0,80 | 0,4600 | +0,0800 | −0,2330 | −0,3995 | −0,3918 | −0,2397 |
| 0,85 | 0,5838 | 0,2603 | −0,0506 | −0,2857 | −0,4030 | −0,3913 |
| 0,90 | 0,7150 | 0,4725 | +0,2079 | −0,0411 | −0,2412 | −0,3678 |
| 0,95 | 0,8538 | 0,7184 | 0,5541 | +0,3727 | +0,1875 | +0,0112 |
| 1,00 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |

$P_0(x) = 1; \qquad P_1(x) = x;$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5);$$

$$P_7(x) = \frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x).$$

---

* Véanse en la pág. 535 la definición y las gráficas.

# 22. *Integrales elípticas**

## a) Integrales elípticas de primera especie: $F(k, \varphi)$, $k = \text{sen}\,\alpha$

| $\varphi$ \ $\alpha$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 0,1745 | 0,1746 | 0,1746 | 0,1748 | 0,1749 | 0,1751 | 0,1752 | 0,1753 | 0,1754 | 0,1754 |
| 20 | 0,3491 | 0,3493 | 0,3499 | 0,3508 | 0,3520 | 0,3533 | 0,3545 | 0,3555 | 0,3561 | 0,3564 |
| 30 | 0,5236 | 0,5243 | 0,5263 | 0,5294 | 0,5334 | 0,5379 | 0,5422 | 0,5459 | 0,5484 | 0,5493 |
| 40 | 0,6981 | 0,6997 | 0,7043 | 0,7116 | 0,7213 | 0,7323 | 0,7436 | 0,7535 | 0,7604 | 0,7629 |
| 50 | 0,8727 | 0,8756 | 0,8842 | 0,8982 | 0,9173 | 0,9401 | 0,9647 | 0,9876 | 1,0044 | 1,0107 |
| 60 | 1,0472 | 1,0519 | 1,0660 | 1,0896 | 1,1226 | 1,1643 | 1,2126 | 1,2619 | 1,3014 | 1,3170 |
| 70 | 1,2217 | 1,2286 | 1,2495 | 1,2853 | 1,3372 | 1,4068 | 1,4944 | 1,5959 | 1,6918 | 1,7354 |
| 80 | 1,3963 | 1,4056 | 1,4344 | 1,4846 | 1,5597 | 1,6660 | 1,8125 | 2,0119 | 2,2653 | 2,4362 |
| 90 | 1,5708 | 1,5828 | 1,6200 | 1,6858 | 1,7868 | 1,9356 | 2,1565 | 2,5046 | 3,1534 | $\infty$ |

## b) Integrales elípticas de segunda especie: $E(k, \varphi)$, $k = \text{sen}\,\alpha$

| $\varphi$ \ $\alpha$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 10 | 0,1745 | 0,1745 | 0,1744 | 0,1743 | 0,1742 | 0,1740 | 0,1739 | 0,1738 | 0,1737 | 0,1736 |
| 20 | 0,3491 | 0,3489 | 0,3483 | 0,3473 | 0,3462 | 0,3450 | 0,3438 | 0,3429 | 0,3422 | 0,3420 |
| 30 | 0,5236 | 0,5229 | 0,5209 | 0,5179 | 0,5141 | 0,5100 | 0,5061 | 0,5029 | 0,5007 | 0,5000 |
| 40 | 0,6981 | 0,6966 | 0,6921 | 0,6851 | 0,6763 | 0,6667 | 0,6575 | 0,6497 | 0,6446 | 0,6428 |
| 50 | 0,8727 | 0,8698 | 0,8614 | 0,8483 | 0,8317 | 0,8134 | 0,7954 | 0,7801 | 0,7697 | 0,7660 |
| 60 | 1,0472 | 1,0426 | 1,0290 | 1,0076 | 0,9801 | 0,9493 | 0.9184 | 0,8914 | 0,8728 | 0,8660 |
| 70 | 1,2217 | 1,2149 | 1,1949 | 1,1632 | 1,1221 | 1,0750 | 1,0266 | 0,9830 | 0,9514 | 0,9397 |
| 80 | 1,3963 | 1,3870 | 1,3597 | 1,3161 | 1,2590 | 1,1926 | 1,1225 | 1,0565 | 1,0054 | 0,9848 |
| 90 | 1,5708 | 1,5589 | 1,5238 | 1,4675 | 1,3931 | 1,3055 | 1,2111 | 1,1184 | 1,0401 | 1,0000 |

* Véanse en la página siguiente y en las págs. 399—400 las definiciones.

## c) Integrales elípticas completas, $k = \operatorname{sen} \alpha$

| $\alpha°$ | $K$ | $E$ | $\alpha°$ | $K$ | $E$ | $\alpha°$ | $K$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,5708 | 1,5708 | 30 | 1,6858 | 1,4675 | 60 | 2,1565 | 1,2111 |
| 1 | 1,5709 | 1,5707 | 31 | 1,6941 | 1,4608 | 61 | 2,1842 | 1,2015 |
| 2 | 1,5713 | 1,5703 | 32 | 1,7028 | 1,4539 | 62 | 2,2132 | 1,1920 |
| 3 | 1,5719 | 1,5697 | 33 | 1,7119 | 1,4469 | 63 | 2,2435 | 1,1826 |
| 4 | 1,5727 | 1,5689 | 34 | 1,7214 | 1,4397 | 64 | 2,2754 | 1,1732 |
| 5 | 1,5738 | 1,5678 | 35 | 1,7312 | 1,4323 | 65 | 2,3088 | 1,1638 |
| 6 | 1,5751 | 1,5665 | 36 | 1,7415 | 1,4248 | 66 | 2,3439 | 1,1545 |
| 7 | 1,5767 | 1,5649 | 37 | 1,7522 | 1,4171 | 67 | 2,3809 | 1,1453 |
| 8 | 1,5785 | 1,5632 | 38 | 1,7633 | 1,4092 | 68 | 2,4198 | 1,1362 |
| 9 | 1,5805 | 1,5611 | 39 | 1,7748 | 1,4013 | 69 | 2,4610 | 1,1272 |
| 10 | 1,5828 | 1,5589 | 40 | 1,7868 | 1,3931 | 70 | 2,5046 | 1,1184 |
| 11 | 1,5854 | 1,5564 | 41 | 1,7992 | 1,3849 | 71 | 2,5507 | 1,1096 |
| 12 | 1,5882 | 1,5537 | 42 | 1,8122 | 1,3765 | 72 | 2,5998 | 1,1011 |
| 13 | 1,5913 | 1,5507 | 43 | 1,8256 | 1,3680 | 73 | 2,6521 | 1,0927 |
| 14 | 1,5946 | 1,5476 | 44 | 1,8396 | 1,3594 | 74 | 2,7081 | 1,0844 |
| 15 | 1,5981 | 1,5442 | 45 | 1,8541 | 1,3506 | 75 | 2,7681 | 1,0764 |
| 16 | 1,6020 | 1,5405 | 46 | 1,8691 | 1,3418 | 76 | 2,8327 | 1,0686 |
| 17 | 1,6061 | 1,5367 | 47 | 1,8848 | 1,3329 | 77 | 2,9026 | 1,0611 |
| 18 | 1,6105 | 1,5326 | 48 | 1,9011 | 1,3238 | 78 | 2,9786 | 1,0538 |
| 19 | 1,6151 | 1,5283 | 49 | 1,9180 | 1,3147 | 79 | 3,0617 | 1,0468 |
| 20 | 1,6200 | 1,5238 | 50 | 1,9356 | 1,3055 | 80 | 3,1534 | 1,0401 |
| 21 | 1,6252 | 1,5191 | 51 | 1,9539 | 1,2963 | 81 | 3,2553 | 1,0338 |
| 22 | 1,6307 | 1,5141 | 52 | 1,9729 | 1,2870 | 82 | 3,3699 | 1,0278 |
| 23 | 1,6365 | 1,5090 | 53 | 1,9927 | 1,2776 | 83 | 3,5004 | 1,0223 |
| 24 | 1,6426 | 1,5037 | 54 | 2,0133 | 1,2681 | 84 | 3,6519 | 1,0172 |
| 25 | 1,6490 | 1,4981 | 55 | 2,0347 | 1,2587 | 85 | 3,8317 | 1,0127 |
| 26 | 1,6557 | 1,4924 | 56 | 2,0571 | 1,2492 | 86 | 4,0528 | 1,0086 |
| 27 | 1,6627 | 1,4864 | 57 | 2,0804 | 1,2397 | 87 | 4,3387 | 1,0053 |
| 28 | 1,6701 | 1,4803 | 58 | 2,1047 | 1,2301 | 88 | 4,7427 | 1,0026 |
| 29 | 1,6777 | 1,4740 | 59 | 2,1300 | 1,2206 | 89 | 5,4349 | 1,0008 |
| 30 | 1,6858 | 1,4675 | 60 | 2,1565 | 1,2111 | 90 | $\infty$ | 1,0000 |

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} = \int_0^{\operatorname{sen} \varphi} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\,\sqrt{1 - k^2 t^2}},$$

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}\, d\psi = \int_0^{\operatorname{sen} \varphi} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt,$$

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} \int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}\,\sqrt{1 - k^2 t^2}},$$

$$E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}\, d\psi = \int_0^{1} \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt.$$

## *23. Integral de probabilidad*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt^*$$

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,00** | 0,0000 | **0,30** | 0,2358 | **0,60** | 0,4515 | **0,90** | 0,6319 |
| 01 | 0,0080 | 31 | 0,2434 | 61 | 0,4581 | 91 | 0,6372 |
| 02 | 0,0160 | 32 | 0,2510 | 62 | 0,4647 | 92 | 0,6424 |
| 03 | 0,0239 | 33 | 0,2586 | 63 | 0,4713 | 93 | 0,6476 |
| 04 | 0,0319 | 34 | 0,2661 | 64 | 0,4778 | 94 | 0,6528 |
| **0,05** | 0,0399 | **0,35** | 0,2737 | **0,65** | 0,4843 | **0,95** | 0,6579 |
| 06 | 0,0478 | 36 | 0,2812 | 66 | 0,4907 | 96 | 0,6629 |
| 07 | 0,0558 | 37 | 0,2886 | 67 | 0,4971 | 97 | 0,6680 |
| 08 | 0,0638 | 38 | 0,2961 | 68 | 0,5035 | 98 | 0,6729 |
| 09 | 0,0717 | 39 | 0,3035 | 69 | 0,5098 | 99 | 0,6778 |
| **0,10** | 0,0797 | **0,40** | 0,3108 | **0,70** | 0,5161 | **1,00** | 0,6827 |
| 11 | 0,0876 | 41 | 0,3182 | 71 | 0,5223 | 01 | 0,6875 |
| 12 | 0,0955 | 42 | 0,3255 | 72 | 0,5285 | 02 | 0,6923 |
| 13 | 0,1034 | 43 | 0,3328 | 73 | 0,5346 | 03 | 0,6970 |
| 14 | 0,1113 | 44 | 0,3401 | 74 | 0,5407 | 04 | 0,7017 |
| **0,15** | 0,1192 | **0,45** | 0,3473 | **0,75** | 0,5467 | **1,05** | 0,7063 |
| 16 | 0,1271 | 46 | 0,3545 | 76 | 0,5527 | 06 | 0,7109 |
| 17 | 0,1350 | 47 | 0,3616 | 77 | 0,5587 | 07 | 0,7154 |
| 18 | 0,1428 | 48 | 0,3688 | 78 | 0,5646 | 08 | 0,7199 |
| 19 | 0,1507 | 49 | 0,3759 | 79 | 0,5705 | 09 | 0,7243 |
| **0,20** | 0 1585 | **0,50** | 0,3829 | **0,80** | 0,5763 | **1,10** | 0,7287 |
| 21 | 0,1663 | 51 | 0,3899 | 81 | 0,5821 | 11 | 0,7330 |
| 22 | 0,1741 | 52 | 0,3969 | 82 | 0,5878 | 12 | 0,7373 |
| 23 | 0,1819 | 53 | 0,4039 | 83 | 0,5935 | 13 | 0,7415 |
| 24 | 0,1897 | 54 | 0,4108 | 84 | 0,5991 | 14 | 0,7457 |
| **0,25** | 0,1974 | **0,55** | 0,4177 | **0,85** | 0,6047 | **1,15** | 0,7499 |
| 26 | 0,2051 | 56 | 0,4245 | 86 | 0,6102 | 16 | 0,7540 |
| 27 | 0,2128 | 57 | 0,4313 | 87 | 0,6157 | 17 | 0,7580 |
| 28 | 0,2205 | 58 | 0,4381 | 88 | 0,6211 | 18 | 0,7620 |
| 29 | 0,2282 | 59 | 0,4448 | 89 | 0,6265 | 19 | 0,7660 |
| **0,30** | 0,2358 | **0,60** | 0,4515 | **0,90** | 0,6319 | **1,20** | 0,7699 |

* Véanse en la pág. 651 la gráfica de la función y sus aplicaciones más simples. A veces se llama integral de probabilidad a la función

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \Phi(x\sqrt{2}).$$

| $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ | $x$ | $\Phi(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1,20** | 0,7699 | **1,50** | 0,8664 | **1,80** | 0,9281 | **2,50** | 0,9876 |
| 21 | 0,7737 | 51 | 0,8690 | 81 | 0,9297 | 55 | 0,9892 |
| 22 | 0,7775 | 52 | 0,8715 | 82 | 0,9312 | 60 | 0,9907 |
| 23 | 0,7813 | 53 | 0,8740 | 83 | 0,9328 | 65 | 0,9920 |
| 24 | 0,7850 | 54 | 0,8764 | 84 | 0,9342 | 70 | 0,9931 |
| **1,25** | 0,7887 | **1,55** | 0,8789 | **1,85** | 0,9357 | **2,75** | 0,9940 |
| 26 | 0,7923 | 56 | 0,8812 | 86 | 0,9371 | 80 | 0,9949 |
| 27 | 0,7959 | 57 | 0,8836 | 87 | 0,9385 | 85 | 0,9956 |
| 28 | 0,7995 | 58 | 0,8859 | 88 | 0,9399 | 90 | 0,9963 |
| 29 | 0,8029 | 59 | 0,8882 | 89 | 0,9412 | 95 | 0,9968 |
| **1,30** | 0,8064 | **1,60** | 0,8904 | **1,90** | 0,9426 | **3,00** | 0,99730 |
| 31 | 0,8098 | 61 | 0,8926 | 91 | 0,9439 | 10 | 0,99806 |
| 32 | 0,8132 | 62 | 0,8948 | 92 | 0,9451 | 20 | 0,99863 |
| 33 | 0,8165 | 63 | 0,8969 | 93 | 0,9464 | 30 | 0,99903 |
| 34 | 0,8198 | 64 | 0,8990 | 94 | 0,9476 | 40 | 0,99933 |
| **1,35** | 0,8230 | **1,65** | 0,9011 | **1,95** | 0,9488 | **3,50** | 0,99953 |
| 36 | 0,8262 | 66 | 0,9031 | 96 | 0,9500 | 60 | 0,99968 |
| 37 | 0,8293 | 67 | 0,9051 | 97 | 0,9512 | 70 | 0,99978 |
| 38 | 0,8324 | 68 | 0,9070 | 98 | 0,9523 | 80 | 0,99986 |
| 39 | 0,8355 | 69 | 0,9090 | 99 | 0,9534 | 90 | 0,99990 |
| **1,40** | 0,8385 | **1,70** | 0,9109 | **2,00** | 0,9545 | **4,00** | 0,99994 |
| 41 | 0,8415 | 71 | 0,9127 | 05 | 0,9596 | | |
| 42 | 0,8444 | 72 | 0,9146 | 10 | 0,9643 | | |
| 43 | 0,8473 | 73 | 0,9164 | 15 | 0,9684 | **4,417** | $1-10^{-5}$ |
| 44 | 0,8501 | 74 | 0,9181 | 20 | 0,9722 | **4,892** | $1-10^{-6}$ |
| **1,45** | 0,8529 | **1,75** | 0,9199 | **2,25** | 0,9756 | **5,327** | $1-10^{-7}$ |
| 46 | 0,8557 | 76 | 0,9216 | 30 | 0,9786 | | |
| 47 | 0,8584 | 77 | 0,9233 | 35 | 0,9812 | | |
| 48 | 0,8611 | 78 | 0,9249 | 40 | 0,9836 | | |
| 49 | 0,8638 | 79 | 0,9265 | 45 | 0,9857 | | |
| **1,50** | 0,8664 | **1,80** | 0,9281 | **2,50** | 0,9876 | | |

# II. GRÁFICAS

## A. FUNCIONES ELEMENTALES

### *1. Polinomios*

FUNCIÓN LINEAL: $y = ax+b$ (fig. 2, $a$)

La gráfica es una *línea recta*. Para $a > 0$ la función es monótona creciente, para $a < 0$ es monótona decreciente y para $a = 0$ es constante. Las intersecciones con los ejes son: $A\ (-b/a, 0)$, $B\ (0, b)$. Más detalladamente véase la pág. 232. Para $b = 0$ es la *proporcionalidad directa*: $y = ax$; la gráfica es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas (fig. 2, $b$).

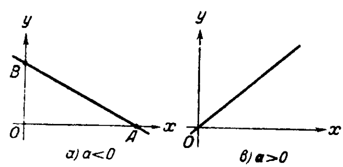


Fig. 2

TRINOMIO CUADRÁTICO: $y = ax^2+bx+c$ (fig. 3).

La gráfica es una *parábola* con el eje vertical (eje de simetría) $x = -b/2a$. Para $a > 0$ la función al principio decrece, luego alcanza el mínimo y después crece; para $a < 0$ crece, alcanza el máximo y decrece.

Las intersecciones: con el eje $Ox$ es $A_1A_2\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$, con el eje $Oy$ es $B(0, c)$. El extremo es $C\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Sobre la parábola véase en las págs. 242-244.

POLINOMIO DE TERCER GRADO: $y = ax^3+bx^2+cx+d$ (fig. 4).

La gráfica es *una parábola cúbica*. El comportamiento de la función depende de los signos de $a$ y $\Delta = 3ac-b^2$. Si $\Delta \geqslant 0$ (fig. 4, $a$ y $b$), para $a > 0$ la función es monótona creciente y para $a < 0$ es monótona decreciente. Si $\Delta < 0$, la función tiene un máximo y un mínimo (fig. 4, $c$): para $a > 0$ primeramente la función crece desde $-\infty$ hasta el máximo, después decrece hasta el mínimo y nuevamente crece hasta $+\infty$; para $a < 0$ la función decrece desde $+\infty$ hasta el mínimo, crece hasta el

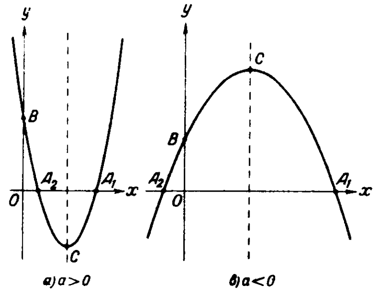



Fig. 3

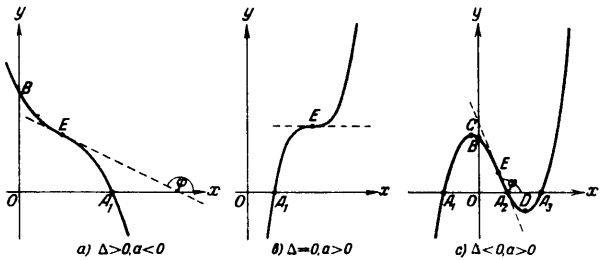



Fig. 4

máximo y nuevamente decrece hasta $-\infty$. Las intersecciones con el eje $Ox$ se determinan por las raíces reales de la ecuación $y = 0$*; pueden haber una, dos (en este caso en uno de los puntos es tangente al eje) o tres: $A_1$, $A_2$, y $A_3$. La intersección con el eje $y$ es: $B(0, d)$. Los extremos son: $C, D\left(-\frac{b \pm \sqrt{-\Delta}}{3a}, d + \frac{2b^3 - 9abc \mp (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right)$.

El punto de inflexión, que es el centro de simetría de la curva es: $E\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2b^3 - 9abc}{27a^2} + d\right)$; la pendiente de la tangente en este punto es: $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_E = \frac{\Delta}{3a}$.

* Véanse en las págs. 155-156 la resolución de la ecuación cúbica.

POLINOMIO DE $n$-ÉSIMO GRADO $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (fig. 5).

La gráfica es *una curva de orden $n$** del tipo parabólico.

a) Si $n$ es **impar**, $y$ varía uniformemente para $a_0 > 0$ desde $-\infty$ hasta $+\infty$ y para $a_0 < 0$ desde $+\infty$ hasta $-\infty$; la curva puede cortar al eje $x$ (o ser tangente a él) desde 1 hasta $n$ veces**. Esta función o no tiene extremos en absoluto o tiene un número par (desde 2 hasta $n-1$), los máximos y mínimos se alternan; tiene un número impar de puntos de inflexión (desde 1 hasta $n-2$).

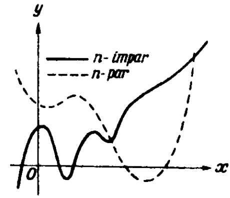



Fig. 5

b) Si $n$ es **par**, $y$ varía uniformemente para $a_0 > 0$ desde $+\infty$ hasta $+\infty$ y para $a_0 < 0$ desde $-\infty$ hasta $-\infty$, sin cortar en absoluto el eje $x$ o cortándolo (o siendo tangente a él) desde 1 hasta $n$ veces. La función tiene un número impar de extremos (desde 1 hasta $n-1$), los máximos y mínimos se alternan; tiene un número par de puntos de inflexión (desde 0 hasta $n-2$).

Estas curvas no tienen asíntotas ni puntos singulares.

Para trazar la gráfica se recomienda hallar primero los extremos y los puntos de inflexión (como también los valores de las derivadas en estos últimos puntos), marcar estos puntos y las tangentes a la curva en ellos y trazar después una curva suavemente continua.

Cuando es necesario el empleo frecuente de las gráficas de **los polinomios de cuarto grado** $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ para un determinado $a$, es conveniente trazar la gráfica de la función $y = ax^4$ (véase más abajo) y después, trasladando el origen de coordenadas al punto $\left(-\frac{b}{4a}, 0\right)$, reducir la ecuación a la forma $Y = aX^4 + a'X^2 + b'X + c'$ y sumar geométricamente las ordenadas de la curva $Y = aX^4$ y de la parábola $Y = a'X^2 + b'X + c'$.

FUNCIÓN POTENCIAL: $y = ax^n$ ($n$ es un entero $> 1$) (fig. 6).

La gráfica es *una parábola de n-ésimo orden.* 1) para $a = 1$, la curva $y = x^n$ pasa por los puntos $O(0, 0)$ y $A(1, 1)$ siendo tangente al eje $x$ en el origen de coordenadas. Si $n$ es par (fig. 6, $a$), entonces la curva es simétrica con respecto al eje $y$ y tiene un mínimo en el origen de coordenadas; si $n$ es impar (fig. 6, $b$), entonces la curva es simétrica con respecto al origen de coordenadas y en éste tiene un punto de inflexión. Carece de

* Véase en la pág. 231 lo referente al orden de una curva.

** Véanse en las págs. 158-161 y 163-165 la resolución de la ecuación algebraica de $n$-ésimo grado.

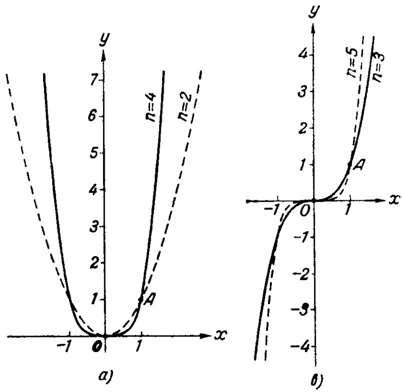



Fig. 6

asíntotas. 2) Caso general. La curva $y = ax^n$ se obtiene por dilatación de la curva $y = x^n$ en dirección del eje $y$ en $|a|$ veces, y si $a < 0$ entonces la curva es la reflexión de la curva $y = |a|\, x^n$ con respecto al eje $x$.

## 2. *Funciones racionales fraccionarias*

PROPORCIONALIDAD INVERSA: $y = \frac{a}{x}$ (fig. 7).

La gráfica es ***una hipérbola equilátera*** cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas. Tiene una discontinuidad en $x = 0\,(y = \pm\infty)$. Si $a > 0$ la función decrece desde 0 hasta $-\infty$ y desde $+\infty$ hasta 0 (la curva está situada en el primero y en el tercer cuadrantes); si $a < 0$, la función crece desde 0 hasta $+\infty$ y desde $-\infty$ hasta 0 (la curva está situada en el segundo y en el cuarto cuadrantes). Los vértices de la hipérbola son: $A, B(\pm\sqrt{|a|},\ \pm\sqrt{|a|})$; para $a > 0$ los signos se toman iguales y para $a < 0$, desiguales. Carece de extremos. Sobre la hipérbola véase en las págs. 239-242.

FUNCIÓN LINEAL FRACCIONARIA (FUNCIÓN HOMOGRÁFICA): $y = \frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}$ (fig. 8).

La gráfica es ***una hipérbola equilátera*** cuyas asíntotas son paralelas a los ejes de coordenadas; el centro es $C\left(-\frac{b_2}{a_2},\ \frac{a_1}{a_2}\right)$. El parámetro que corresponde a $a$ en la ecuación de la proporcionalidad inversa es:

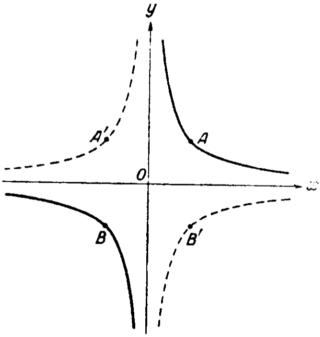



Fig. 7

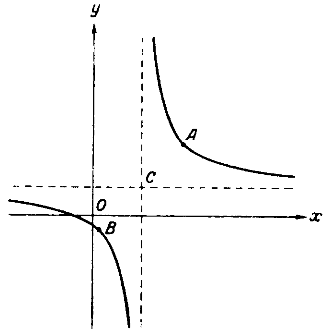



Fig. 8

$a = -\frac{D}{a_2^2}$, donde $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, los vértices de la hipérbola son: $A$, $B\left(-\frac{b_2 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}, \frac{a_1 \pm \sqrt{|D|}}{a_2}\right)$; para $D < 0$ los signos se toman iguales y para $D > 0$ desiguales. Para $x = -\frac{b_2}{a_2}$ la función tiene una discontinuidad. Si $D < 0$, la función decrece desde $\frac{a_1}{a_2}$ hasta $-\infty$ y desde $+\infty$ hasta $\frac{a_1}{a_2}$; si $D > 0$, la función crece desde $\frac{a_1}{a_2}$ hasta $+\infty$ y desde $-\infty$ hasta $\frac{a_1}{a_2}$. Carece de extremos.

La función $y = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = \left(\frac{ax^2+bx+c}{x^2}\right)$ (Fig. 9). [$b \neq 0$, $c \neq 0$. Para $b = 0$ véase la pág. 96 (función potencial), para $c = 0$ véase más arriba (función lineal fraccionaria)].

La gráfica es *una curva de tercer orden* con dos asíntotas: $x = 0$ e $y = a$ y está formada de dos ramas: una que corresponde a la variación monótona de $y$ desde $a$ hasta $+\infty$ (ó $-\infty$) y la otra que pasa por tres puntos característicos: la intersección con la asíntota $A\left(-\frac{c}{b}, a\right)$, el extremo $B\left(-\frac{2c}{b}, a - \frac{b^2}{4c}\right)$ y el punto de inflexión $C\left(-\frac{3c}{b}, a - \frac{2b^2}{9c}\right)$. Los cuatro casos posibles de la posición de estas ramas dependen de los signos de $b$ y $c$ (fig. 9). Los puntos de intersección con el eje $x$ son: $D$, $E\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$; puede haber dos, uno (tangente) o ninguno según sea el singo de $b^2 - 4ac$.

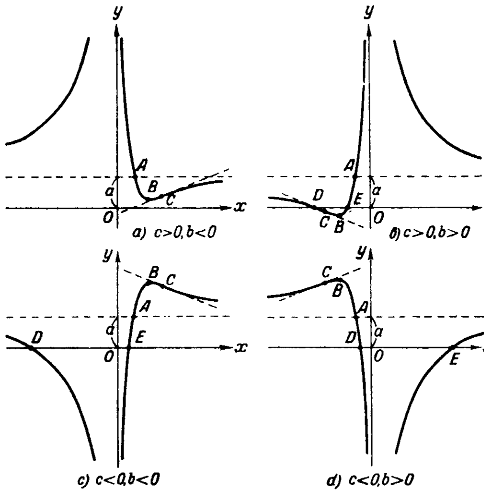



Fig. 9

LA FUNCIÓN $y = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ (fig. 10).

La gráfica es *la curva de tercer orden* que es simétrica con respecto a la recta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ y que tiene por asíntota el eje $x$. El comportamiento de la curva depende de los signos de $a$ y $\Delta = 4ac - b^2$. Hemos estudiado sólo el caso de $a > 0$; para $a < 0$ es necesario estudiar la

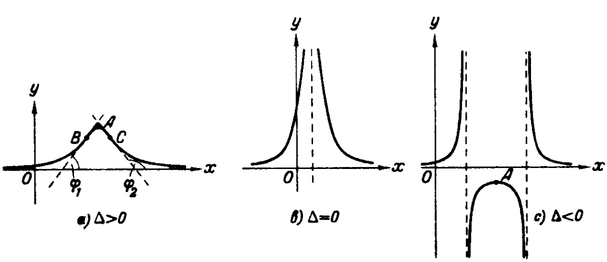



Fig. 10

curva $y = \frac{1}{(-a)x^2 - bx - c}$ y representarla simétricamente con respecto al eje $x$.

a) Si $\Delta > 0$, la función es continua y positiva para todo $x$. Crece desde 0 hasta el máximo y decrece hasta 0. El máximo es $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$, los puntos de inflexión son $B$, $C\left(-\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2a\sqrt{3}}, \frac{3a}{\Delta}\right)$, y las pendientes de las tangentes en estos puntos son $\operatorname{tg}\varphi = \pm a^2\left(\frac{3}{\Delta}\right)^{3/2}$ (fig. 10, $a$).

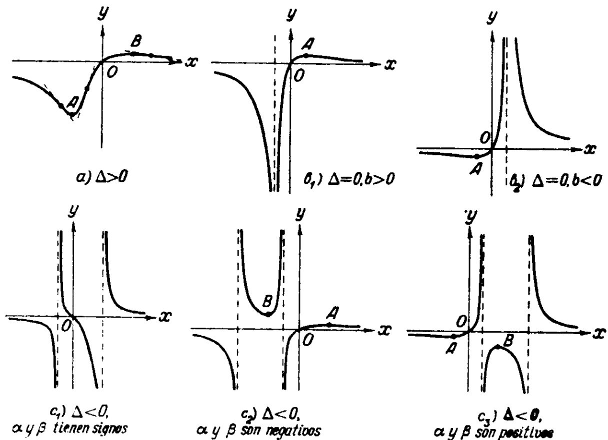



Fig. 11

b) Si $\Delta = 0$, la función es positiva para todo $x$. Crece desde 0 hasta $+\infty$, para $x = -\frac{b}{2a}$ tiene una discontinuidad infinita y decrece desde $+\infty$ hasta 0 (fig. 10, $b$).

c) Si $\Delta < 0$, la función crece desde 0 hasta $+\infty$, tiene una discontinuidad infinita, pasa desde $-\infty$ a $-\infty$ a través del punto máximo $A$, tiene una segunda discontinuidad infinita y decrece desde $+\infty$ hasta 0. El máximo es: $A\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4a}{\Delta}\right)$, los puntos de discontinuidad son: $x = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}}{2a}$ (fig. 10, $c$).

La función $y = \frac{x}{ax^2+bx+c}$ (fig. 11).

La gráfica es *una curva de tercer orden* que pasa por el origen de coordenadas y que tiene por asíntota el eje $x$. El comportamiento de la función depende de los signos de $a$ y $\Delta = 4ac-b^2$ y también de los signos de las raíces $\alpha$ y $\beta$ de la ecuación $ax^2+bx+c = 0$ (si $\Delta < 0$) y del signo de $b$, si $\Delta = 0$. Solamente hemos estudiado el caso $a > 0$; para $a < 0$ se debe estudiar la curva $y = \frac{x}{(-a)x^2-bx-c}$ y representarla simétricamente con respecto al eje $x$.

a) Si $\Delta > 0$, la función es continua, decrece desde 0 hasta el mínimo, crece hasta el máximo y nuevamente decrece hasta 0. El mínimo y el máximo son: $A$, $B\left(\mp\sqrt{\frac{c}{a}},\ \frac{-b\mp 2\sqrt{ac}}{\Delta}\right)$, la curva tiene tres puntos de inflexión (fig. 11, $a$).

b) Si $\Delta = 0$ el comportamiento de la función depende del signo de $b$:

1) $b > 0$; la función decrece desde 0 hasta $-\infty$, tiene una discontinuidad, crece desde $-\infty$ hasta el máximo y decrece hasta cero (fig. 11, $b_1$) el máximo es: $A\left(+\sqrt{\frac{c}{a}},\ \frac{1}{2\sqrt{ac}+b}\right)$;

2) $b < 0$; la función decrece desde 0 hasta el mínimo, pasa por 0 y crece hasta $+\infty$, tiene una discontinuidad infinita y decrece desde $+\infty$ hasta 0 (fig. 11, $b_2$); el mínimo es: $A\left(-\sqrt{\frac{c}{a}},\ -\frac{1}{2\sqrt{ac}-b}\right)$. En ambos casos, la gráfica tiene una discontinuidad para $x = -\frac{b}{2a}$ y un punto de inflexión.

c) $\Delta < 0$. Tiene dos puntos de discontinuidad: $x = \alpha$ y $x = \beta$; el comportamiento de la función depende de los signos de $\alpha$ y $\beta$:

1) $\alpha$ y $\beta$ tienen signos distintos; la función decrece desde 0 hasta $-\infty$, desde $+\infty$ hasta $-\infty$ y desde $+\infty$ hasta 0; no tiene extremos (fig. 11, $c_1$);

2) $\alpha$ y $\beta$ son negativos, la función decrece desde 0 hasta $-\infty$, después varía desde $+\infty$ hasta $+\infty$, pasando por el punto mínimo y, finalmente, crece desde $-\infty$ hasta el máximo y decrece hasta cero; los puntos $A$ y $B$, máximo y minimo, se hallan por las mismas fórmulas que en el caso a) (fig. 11, $c_2$);

3) $\alpha$ y $\beta$ son positivos; la función decrece desde 0 hasta el mínimo y crece hasta $+\infty$, después varía desde $-\infty$ hasta $-\infty$ pasando por el punto máximo y, finalmente, decrece desde $+\infty$ hasta 0; los puntos $A$ y $B$, máximo y mínimo, se hallan por las mismas fórmulas que en el caso a) (fig. 11, $c_3$).

En los tres casos la gráfica tiene un punto de inflexión.

**Función potencial**: $y = \frac{a}{x^n} = ax^{-n}$ ($n$ es entero positivo) (fig. 12).

La gráfica es una *curva de tipo hiperbólico* cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas. Para $x = 0$ es discontinua.

Si $a > 0$, para $n$ par la función crece desde 0 hasta $+\infty$ y decrece desde $+\infty$ hasta 0, siendo siempre positiva y para $n$ impar decrece desde 0 hasta $-\infty$ y desde $+\infty$ hasta 0.

Si $a < 0$, para $n$ par la función decrece desde 0 hasta $-\infty$ y crece desde $-\infty$ hasta 0, siendo siempre negativa y para $n$ impar crece desde 0 hasta $+\infty$ y desde $-\infty$ hasta 0.

No tiene extremos. Cuanto mayor sea $n$, tanto más rápidamente se aproxima asintóticamente la curva al eje $x$ y tanto más lentamente se aproxima asintóticamente al eje $y$. Para $n$ par la curva es simétrica con respecto al eje $y$ y para $n$ impar, con respecto al origen de coordenadas. En la fig. 12 se muestran dos ejemplos: $n = 2$ y $n = 3$.

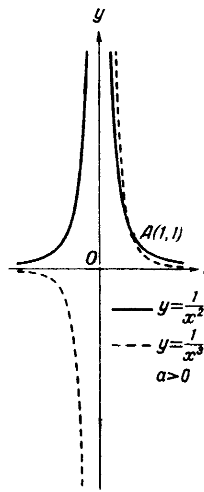



Fig. 12

## 3. *Funciones irracionales*

RAÍZ CUADRADA DE UN BINOMIO LINEAL:

$$y = \pm\sqrt{ax+b} \quad \text{(fig. 13)}$$

La gráfica es *una parábola*, cuyo eje es el eje $x$, el vértice es $A(-b/a, 0)$, el parámetro es $p = a/2$. El campo de existencia de la función y su comportamiento dependen del signo de $a$ (véase la fig. 13). La función es biforme y no tiene extremos. Sobre la parábola, véase más detalladamente en las págs. 242-244.

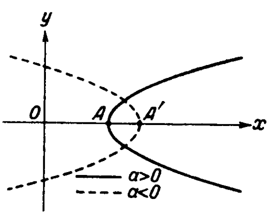



Fig. 13

RAÍZ CUADRADA DE UN TRINOMIO CUADRÁTICO: $y = \pm\sqrt{ax^2+bx+c}$ (fig. 14). Para $a < 0$, la gráfica es *una elipse* y para $a > 0$, *una hipérbola*; uno de los ejes es el eje $x$ y el otro la recta $x = -b/2a$, los vértices son: $A$, $C\left(-\frac{b\pm\sqrt{-\Delta}}{2a}, 0\right)$ y $B$, $D\left(-\frac{b}{2a}, \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a}}\right)$, donde $\Delta = 4ac - b^2$. El campo de existencia de

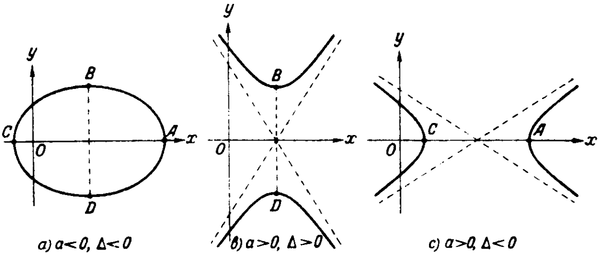



Fig. 14

a función y su comportamiento dependen de los signos de $a$ y $\Delta$ (véase la fig. 14). La función es biforme y tiene extremo, si $\Delta$ y $a$ son de un mismo signo (los puntos $B$ y $D$). Para $a < 0$ y $\Delta > 0$ la función sólo toma valores imaginarios y por esto no existe la curva. Sobre la elipse y la hipérbola, véase más detalladamente en las págs. 237-242.

FUNCIÓN POTENCIAL: $y = ax^k = ax^{\pm m/n}$ ($m$ y $n$ son números enteros positivos, primos entre sí). Hemos estudiado el caso $a = 1$ (para $a \neq 1$, la curva en comparación con $y = x^k$ está alargada $|a|$ veces en la dirección del eje $y$ y si $a$ es negativo es simétrica a la misma con respecto al eje $x$).

1) $k > 0$, $y = x^{m/n}$. La gráfica (fig. 15) pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. Para $k > 1$ es tangente (en el origen) al eje $x$ (fig. 15, $d$), para $k < 1$ es tangente (en el origen) al eje $y$ (fig. 15, $a$, $b$, $c$). Para $n$ par la curva es simétrica con respecto al eje $x$ (la función es biforme, fig. 15, $a$, $d$), para $m$ par es simétrica con respecto al eje $y$ (fig. 15, $c$), para $m$ y $n$ impares es simétrica con respecto al origen (fig. 15, $b$). En relación con esto la curva puede tener en el origen de coordenadas: un vértice, un

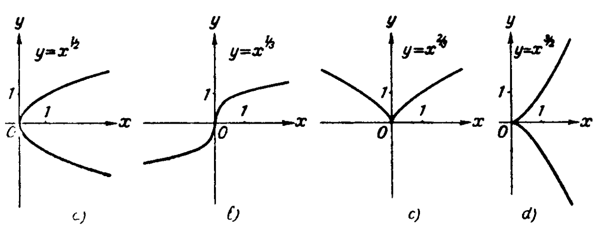



Fig. 15

punto de inflexión o un punto de retroceso (véase la fig. 15); no tiene asíntotas.

2) $k < 0$, $y = x^{-m/n}$. La gráfica es una *curva de tipo hiperbólico* cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas (fig. 16). Para $x = 0$ es discontinua. Cuanto mayor sea $|k|$ tanto más rápidamente se aproxima la curva asintóticamente al eje $x$ y tanto más despacio se aproxima asintóticamente al eje $y$. La simetría con respecto a los ejes o al origen de coordenadas depende de que $m$ y $n$ sean pares o impares, igualmente que en el caso $k > 0$ (véase más arriba); así se determina el comportamiento de la función (véase la fig. 16); no tiene extremos.

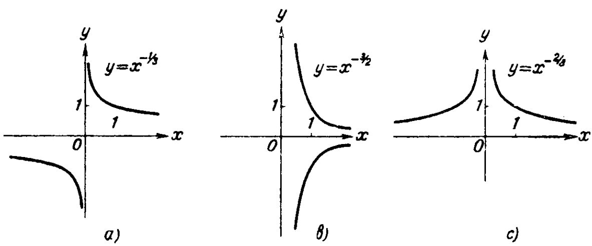



Fig. 16

## 4. *Funciones exponenciales y logarítmicas*

FUNCIÓN EXPONENCIAL: $y = a^x = e^{bx} (a > 0,\ b = \ln a)$ (fig. 17). La gráfica es *una curva exponencial* (para $a = e$ es la curva exponencial *natural* $y = e^x$). La función sólo toma valores positivos. Para $a > 1$ (es decir, $b > 0$) es monótona creciente desde 0 hasta $\infty$; para $a < 1$ (es decir, $b < 0$) es monótona decreciente desde $\infty$ hasta 0, tanto más rápidamente cuanto mayor sea $|b|$. La curva pasa por el punto $A(0, 1)$ y se aproxima asintóticamente al eje $x$ (para $b > 0$ a la izqiuerda, para $b < 0$ a la derecha) tanto más rápidamente cuanto mayor sea $|b|$. La función $y = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ crece para $a < 1$ y decrece para $a > 1$.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA: $y = \log_a x (a > 0)$ (fig. 18). La gráfica es *una curva logarítmica* (la reflexión de la curva exponencial con respecto a la bisectriz $y = x$); para $a = e$ es la curva logarítmica *natural* $y = \ln x$. La función existe sólo para $x > 0$. Para $a > 1$ es monótona creciente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, para $a < 1$ es monótona decreciente desde $+\infty$ hasta $-\infty$ tanto más lentamente cuanto mayor sea $|\ln a|$. La curva pasa por el punto $A$ (1, 0) y asintóticamente se aproxima al eje $y$ (para $a > 1$

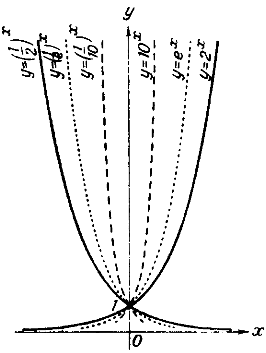



Fig. 17

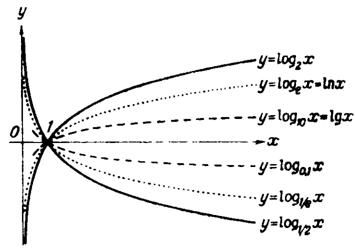



Fig. 18

hacia abajo, para $a < 1$ hacia arriba) tanto mas rápidamente cuanto mayor sea $|\ln a|$.

FUNCIÓN $y = e^{-(ax)^2}$ (fig. 19).

La función crece desde 0 hasta 1 y decrece desde 1 hasta 0; la curva es simétrica con respecto al eje $y$ y se aproxima asintóticamente al eje $x$ tanto más rápidamente cuanto mayor sea $a$. Tiene un máximo en el punto $A\,(0, 1)$, los puntos de inflexión son: $B, C\left(\pm\frac{1}{a\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, las pendientes de las tangentes en ellos son: $\operatorname{tg}\varphi = \mp a\sqrt{\frac{2}{e}}$. Una aplicación fundamental es *la curva de la ley normal de la distribución de errores (la curva de Gauss)*: $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2\sigma^2}$ (véanse en la pág. 651 su gráfica y sus aplicaciones a la teoría de probabilidades).

FUNCIÓN: $y = ae^{bx}+ce^{dx}$ (fig. 20).

Es conveniente construir la curva, sumando gráficamente las ordenadas de las curvas $y_1 = ae^{bx}$ y $y_2 = ce^{dx}$ (véase pág. 99), representadas por líneas suaves (entera y de trazos). La función es continua. Si ninguno de los números $a$, $b$, $c$ y $d$ es igual a cero, la curva es de uno de los cuatro tipos siguientes (las gráficas representadas en la fig. 20, en relación con los signos de los parámetros pueden transformarse simétricamente con respecto a los ejes de coordenadas):

a) $a$ y $c$ son de un mismo signo, $b$ y $d$ son de un mismo signo; la función varía monótonamente, sin cambiar el signo desde 0 hasta $+\infty$

(ó $-\infty$) o desde $+\infty$ ($-\infty$) hasta 0; no tiene puntos de inflexión y la asíntota es el eje $x$ (fig. 20, *a*).

b) $a$ y $c$ son de un mismo signo, $b$ y $d$ son de distintos signos; la función varía desde $+\infty$ hasta $+\infty$, o desde $-\infty$ hasta $-\infty$, sin variar el signo, pasando por el extremo; no tiene puntos de inflexión (fig. 20, *b*).

c) $a$ y $c$ son de signos distintos, $b$ y $d$ son de un mismo signo; la función varía desde 0 hasta $+\infty$ ($-\infty$) o desde $+\infty$ ($-\infty$) hasta 0, variando el signo una vez y pasando por un extremo $C$ y por un punto de inflexión $D$; la asíntota es el eje $x$ (fig. 20, *c*).

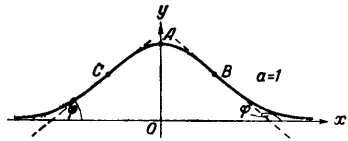



Fig. 19

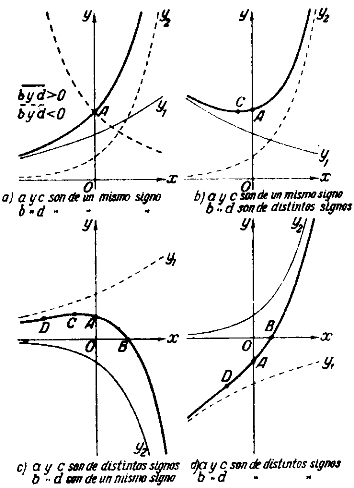



Fig. 20

d) $a$ y $c$ son de signos distintos, $b$ y $d$ son de signos distintos; la función varía monótonamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, o desde $+\infty$ hasta $-\infty$, no teniendo ningún extremo, pero pasando por un punto de inflexión $D$ (fig. 20, $d$).

La intersección con el eje $y$ es: $A\,(0, a+c)$, la intersección con el eje $x$ es: $B\left[x = \frac{1}{d-b} \ln\left(-\frac{a}{c}\right)\right]$, el extremo es $C\left[x = \frac{1}{d-b} \ln\left(-\frac{ab}{cd}\right)\right]$, el punto de inflexión es: $D\left[x = \frac{1}{d-b} \ln\left(-\frac{ab^2}{cd^2}\right)\right]$.

FUNCIÓN $y = ae^{bx+cx^2}$ (fig. 21).

La curva es simétrica con respecto a la recta vertical $x = -\frac{b}{2c}$, no corta al eje $x$ y corta al eje $y$ en el punto $D(0, a)$. El comportamiento de la

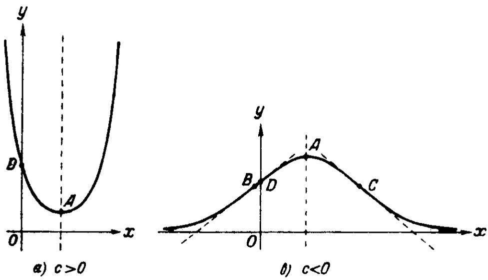



Fig. 21

función depende de los signos de $a$ y $c$. Sólo hemos estudiado el caso $a > 0$; para $a < 0$ se debe transformar la curva simétricamente con respecto al eje $x$.

a) Si $c > 0$, la función decrece desde $+\infty$ hasta el mínimo y crece hasta $+\infty$, siendo siempre positiva. El mínimo es: $A\left(-\frac{b}{2c}, ae^{-b^2/4c}\right)$, no tiene asíntotas ni puntos de inflexión (fig. 21, $a$).

b) Si $c < 0$, la función crece desde 0 hasta el máximo y decrece hasta cero. La asíntota es el eje $x$. El máximo es: $A\left(-\frac{b}{2c}, ae^{-b^2/4c}\right)$, los puntos de inflexión son: $B$, $C$, $\left(\frac{-b\pm\sqrt{-2c}}{2c}, ae^{\frac{-(b^2+2c)}{4c}}\right)$ (fig. 21, $b$).

FUNCIÓN $y = ax^be^{cx}$ (Fig. 22).

Hemos estudiado el caso $a > 0$ (para $a < 0$ la curva se debe transformar simétricamente con respecto al eje $x$) y sólo se han estudiado los valores positivos de $x$. Para $b > 0$ la curva pasa por el origen de coordenadas; la tangente en el origen de coordenadas para $b > 1$ es el eje $x$; para $b = 1$ es la bisectriz del cuadrante de coordenadas $y = x$; para $b < 1$ es el eje $y$. Para $b < 0$, el eje $y$ es la asíntota. Para $c > 0$ la función crece indefinidamente con el crecimiento de $x$, para $c < 0$ se aproxima asintóticamente a cero. Si $b$ y $c$ tienen distintos signos, la función tiene el extremo $A\left(x = -\frac{b}{c}\right)$. La curva puede tener 0, 1 ó 2 puntos de inflexión: $C, D\left(x = -\frac{b \pm \sqrt{b}}{c}\right)$ (fig. 22, $c$, $e$, $f$, $g$).

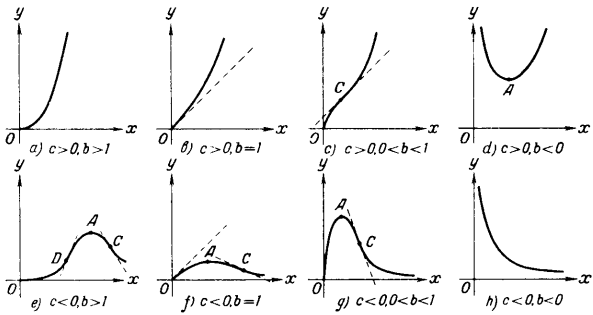



Fig. 22

FUNCIÓN $y = Ae^{-ax} \operatorname{sen}(\omega x + \varphi_0)$ (fig. 23).

La gráfica es *la curva del movimiento vibratorio amortiguado*. La curva oscila alrededor del eje $Ox$, aproximándose asintóticamente a él; además, las dos curvas exponenciales $y = \pm Ae^{-ax}$ "la envuelven", tocándola en los puntos $A_1, A_2, \ldots, \left(\frac{(k+1/2)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k Ae^{-ax}\right)$. Las intersecciones con los ejes son: $B(0, A \operatorname{sen} \varphi_0)$, $C_1, C_2, \ldots, \left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$; los extremos son: $D_1, D_2, \ldots$ para $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + \alpha}{\omega}$; para $x = \frac{k\pi - \varphi_0 + 2\alpha}{\omega}$, los puntos de inflexión son: $E_1, E_2, \ldots$ donde $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega}{a}$.

El valor $\delta = \ln \left| \frac{y_i}{y_{i+1}} \right| = a \frac{\pi}{\omega}$ (en que $y_i$ e $y_{i+1}$ son las ordenadas de dos extremos vecinos) se llama *decremento logarítmico de amortiguación*.

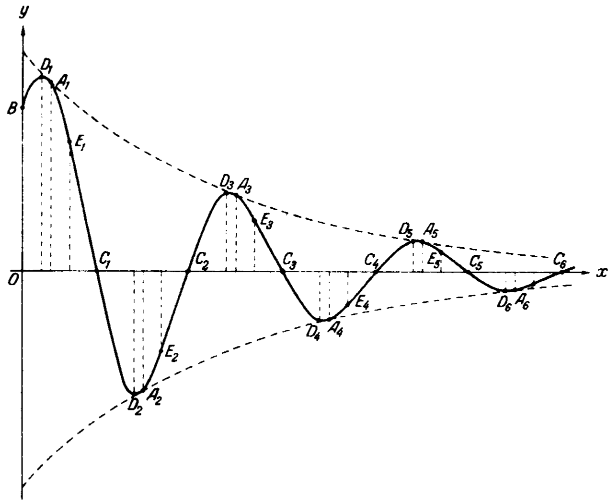



Fig. 23

## 5. *Funciones trigonométricas**

SENO: $y = A$ sen $(\omega x + \varphi_0)$ (fig. 24).

La gráfica es *la sinusoide*. Para $A = \omega = 1$ y $\varphi_0 = 0$ *la sinusoide ordinaria* $y =$ sen $x$ (fig. 24, *a*) es una curva continua de período $T = 2\pi$. Las intersecciones con el eje $x$ son: $B_1$, $B_2$, ... $(k\pi, 0)$, estos mismos son puntos de inflexión con ángulo de inclinación con el eje $x$ igual a $\pm\pi/4$. Los extremos son: $C_1$, $C_2$, ... $[(k+1/2)\pi, (-1)^k]$. *La sinusoide general* (fig. 24, *b*), en comparación con la ordinaria, está alargada a lo largo del eje $y$ $|A|$ veces ($|A|$ es *la amplitud*), está comprimida a lo largo del eje $x$ $\omega$ veces ($\omega$ es *la frecuencia*) y desplazada hacia la izquierda en el segmento $\frac{\varphi_0}{\omega}$ ($\varphi_0$ es *la fase inicial*). El período es $T = \frac{2\pi}{\omega}$; las intersecciones con el eje $x$ son: $B_1$, $B_2$, ... $\left(\frac{k\pi - \varphi_0}{\omega}, 0\right)$, los extremos son: $C_1$, $C_2$, ... $\left(\frac{(k+1/2)\pi - \varphi_0}{\omega}, (-1)^k A\right)$ (véase también pág. 212).

---

* Véanse en las págs. 210-212 las fórmulas trigonométricas. Véanse en la pág. 53 las tablas.

COSENO: $y = A\cos(\omega x+\varphi_0)$; esta ecuación se puede escribir de otra forma: $y = A\operatorname{sen}\left(\omega x+\varphi_0+\frac{\pi}{2}\right)$. La gráfica es *la sinusoide*.

*La cosinusoide* $y = \cos x = \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (fig. 25). Las intersecciones

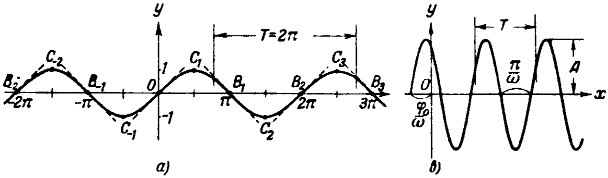



Fig. 24

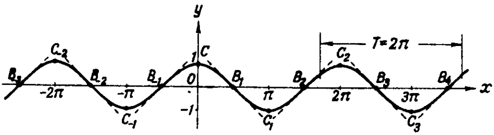



Fig. 25

con el eje $x$ son: $B_1, B_2, \ldots$ $[(k+1/2)\cdot\pi, 0]$, las cuales son también puntos de inflexión con un ángulo de inclinación con el eje $x$ igual a $\pi/4$. Los extremos son: $C_1, C_2, \ldots$ $[k\pi, (-1)^k]$.

TANGENTE: $y = \operatorname{tg} x$ (fig. 26).

La gráfica es *la tangentoide*, una curva periódica de período $T = \pi$ y con asíntotas iguales a $x = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$. Cuando $x$ varía desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $+\frac{\pi}{2}$, $y$ crece monótonamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, después los valores de $y$ se repiten. Las intersecciones con el eje $x$ son: $0, A_1, A_{-1}, A_2, A_{-2}, \ldots$ $(k\pi, 0)$, los cuales son también puntos de inflexión con un ángulo de inclinación con el eje $x$ igual a $\pi/4$.

COTANGENTE: $y = \operatorname{ctg} x$ (fig. 27), en otra forma $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

La gráfica es *la tangentoide* reflejada con respecto al eje $x$ y trasladada a la izquierda en el segmento $\frac{\pi}{2}$. Las asíntotas son: $x = k\pi$. Cuando $x$ varía desde 0 hasta $\pi$, la función decrece monótonamente desde $+\infty$ hasta $-\infty$, después los valores de $y$ se repiten. Las intersecciones con el eje $x$ son: $A_1$, $A_{-1}$, $A_2$, $A_{-2}$, ... $\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\ 0\right]$, las cuales son también puntos de inflexión con un ángulo de inclinación con el eje $x$ igual a $-\frac{\pi}{4}$.

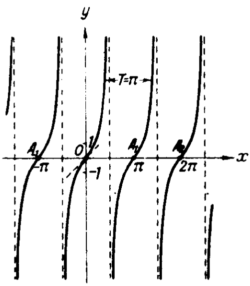



Fig. 26

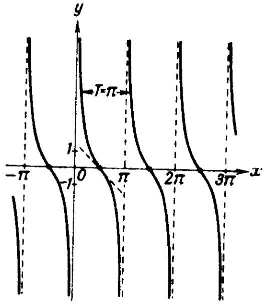



Fig. 27

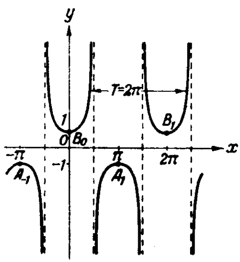



Fig. 28

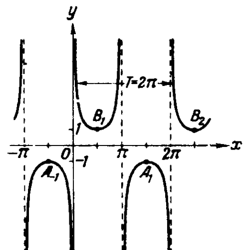



Fig. 29

SECANTE: $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ (fig. 28).

La gráfica es una curva periódica de período $T = 2\pi$ y con asíntotas iguales a: $x = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$; $|y| \geqslant 1$. Los máximos son: $A_1$, $A_2$, ... $[(2k+1)\pi,\ -1]$, y los mínimos: $B_1$, $B_2$, ... $(2k\pi,\ +1)$.

COSECANTE: (fig. 29) $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$, de otra forma $y = \sec\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

La gráfica es la misma curva que la $\sec x$ trasladada a la derecha en un intervalo $x = \frac{\pi}{2}$. Las asíntotas son: $x = k\pi$. Los máximos son: $A_1, A_2, \ldots \left(\frac{4k+3}{2}\pi, -1\right)$, y los mínimos $B_1, B_2, \ldots \left(\frac{4k+1}{2}\pi, 1\right)$.

## 6. *Funciones trigonométricas inversas**

Las gráficas de estas funciones se obtienen de las gráficas de las funciones trigonométricas mediante una reflexión con respecto a la bisectriz del primero y tercer cuadrante $y = x$.

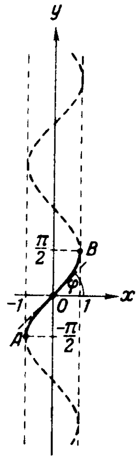


Fig. 30

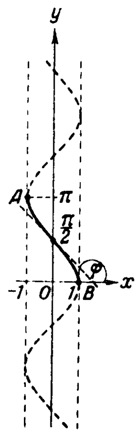


Fig. 31

ARCO SENO: $y =$ Arc sen $x$ (fig. 30).

La función sólo existe para $|x| \leq 1$, es multiforme. El valor principal $y = \operatorname{arc\,sen} x$ (señalado con línea entera) desde $A\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ hasta $B\left(+1, +\frac{\pi}{2}\right)$ crece monótonamente; en el origen de coordenadas tiene un punto de inflexión $\left(\text{con un ángulo de inclinación igual a } \frac{\pi}{4}\right)$, el cual es también el centro de simetría de la curva.

* Véanse en las págs. 216-219 las definiciones y las fórmulas.

ARCO COSENO $y = \text{Arc}\cos x$ (fig. 31).

Es la misma curva que para el Arc sen $x$ bajada en un segmento $\frac{\pi}{2}$. La función existe sólo para $|x| \leq 1$, es multiforme. El valor principal $y = \text{arc}\cos x$ (señalado con línea entera) desde $A(-1, +\pi)$ hasta $B(+1, 0)$ decrece monótonamente; el punto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ es el centro de simetría y un punto de inflexión de la curva $\left(\text{con un ángulo de inclinación con el eje } x \text{ igual a } \frac{3\pi}{4}\right)$.

ARCO TANGENTE: $y = \text{Arc tg}\, x$ (fig. 32)

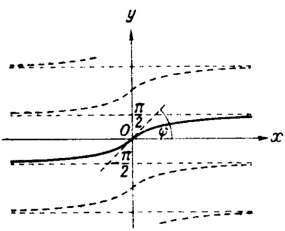



Fig. 32

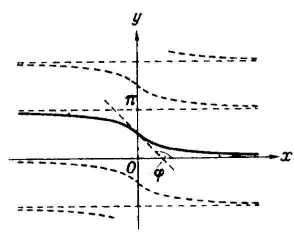



Fig. 33

La función es multiforme. El valor principal $y = \text{arc tg}\, x$ crece monótonamente desde $-\frac{\pi}{2}$ hasta $+\frac{\pi}{2}$; el origen de coordenadas es un punto de inflexión $\left(\text{con un ángulo de inclinación igual a } \frac{\pi}{4}\right)$, que es el centro de simetría de la curva. Los valores restantes de $y$ se obtienen agregando al valor principal la magnitud $\pm k\pi$. Las asíntotas son: $y = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$.

ARCO COTANGENTE: $y = \text{Arc ctg}\, x$ (fig. 33).

La función es multiforme. El valor principal $y = \text{arc ctg}\, x$, decrece monótonamente desde $\pi$ hasta 0; $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ es un punto de inflexión (centro de simetría) con ángulo de inclinación igual a $\frac{3\pi}{4}$. Los valores restantes de $y$ se obtienen agregando al valor principal la magnitud $\pm k\pi$. Las asíntotas son: $y = \pm k\pi$.

## 7. *Funciones hiperbólicas**

SENO HIPERBÓLICO: $y = \operatorname{sh} x$ (fig. 34).

La función es impar, monótona creciente desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El origen de coordenadas es un punto de inflexión $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ y el centro de simetría de la curva. No tiene asíntotas.

COSENO HIPERBÓLICO: $y = \operatorname{ch} x$ (fig. 35).

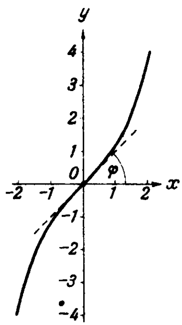


Fig. 34

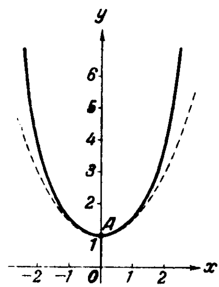


Fig. 35

La gráfica es *la catenaria* (véase pág. 125). La función es par; para $x < 0$ decrece desde $+\infty$ hasta 1, para $x > 0$ crece desde 1 hasta $+\infty$. Tiene un mínimo en el punto $A(0, 1)$: no tiene asíntotas. La curva está situada simétricamente con respecto al eje $y$, más arriba de la parábola $y = 1 + \frac{x^2}{2}$ (representada con línea de trazos).

TANGENTE HIPERBÓLICA: $y = \operatorname{th} x$ (fig. 36).

La función es impar, monótona creciente desde $-1$ hasta $+1$. El origen de coordenadas es un punto de inflexión $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ y es el centro de simetría de la curva. Tiene dos asíntotas: $y = \pm 1$.

COTANGENTE HIPERBÓLICA: $y = \operatorname{cth} x$ (fig. 37).

---

* Véanse en las págs. 223-224 las explicaciones teóricas. Véanse en las págs. 57-60 las tablas.

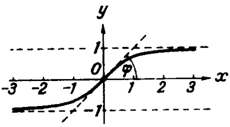


Fig. 36

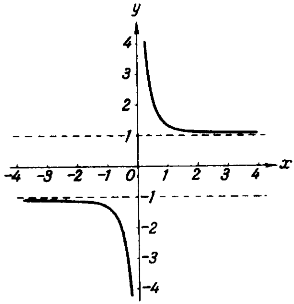


Fig. 37

La función es impar, para $x = 0$ tiene una discontinuidad. Para $x < 0$ decrece desde $-1$ hasta $-\infty$, para $x > 0$ decrece desde $+\infty$ hasta $+1$. No tiene extremos ni puntos de inflexión. Tiene tres asíntotas: $x = 0$, $y = \pm 1$.

## 8. *Funciones hiperbólicas inversas**

Las gráficas se obtienen de las gráficas de las funciones hiperbólicas, mediante reflexiones con respecto a la bisectriz del ángulo $xOy$.

El área-seno: $y = \operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (fig. 38).

La función es impar, monótona creciente desde $-\infty$ hasta $+\infty$. El origen de coordenadas es un punto de inflexión ($\varphi = \pi/4$) y es el centro de simetría de la curva. Carece de asíntotas.

Area-coseno: $y = \operatorname{Arch} x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$ (fig. 39).

La función es biforme y existe sólo para los valores de $x \geqslant 1$. La

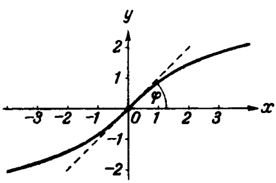


Fig. 38

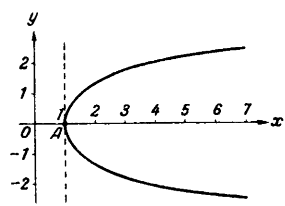


Fig. 39

* Véanse en las pags. 226-227 las consideraciones teóricas.

curva es simétrica con respecto al eje $x$; en el punto $A$ (1, 0) es tangente a la recta vertical $x = 1$, después $y$ crece en valor absoluto.

AREA-TANGENTE: $y = \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ (fig. 40).

La función es impar y existe sólo para los valores de $|x| < 1$; desde $-\infty$ hasta $+\infty$ es monótona creciente. El origen de coordenadas es un punto de inflexión $\left(\varphi = \frac{\pi}{4}\right)$ y es el centro de simetría de la curva. Tiene dos asíntotas: $x = \pm 1$.

AREA-COTANGENTE: $y = \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ (fig. 41).

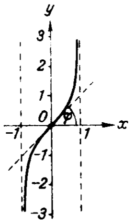



Fig. 40

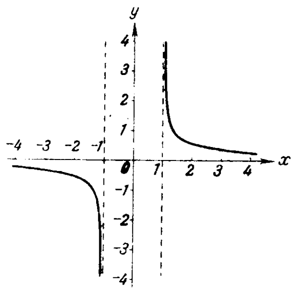



Fig. 41

La función es impar y existe sólo para los valores de $|x| > 1$. Para $-\infty < x < -1$ decrece desde 0 hasta $-\infty$, para $+1 < x < +\infty$ decrece desde $+\infty$ hasta 0. No tiene extremos ni puntos de inflexión. Tiene tres asíntotas: $y = 0$, $x = \pm 1$.

## B. CURVAS ESENCIALES

En este párrafo se dan algunos datos de las curvas más importantes y de uso frecuente en la práctica (además de las curvas esenciales que fueron expuestas anteriormente). A estos datos se refieren: la definición de la curva como cierto lugar geométrico, las coordenadas de los puntos característicos, la longitud de la curva o de una parte de ella, el área limitada por la curva o por una parte de la misma, el radio de curvatura en los puntos característicos.

Véanse en las págs. 286-287 las consideraciones generales sobre el trazado de curvas por sus ecuaciones.

Véanse en las págs. 237-244 las curvas de segundo orden (la elipse, la hipérbola y la parábola).

## 9. *Curvas de tercer orden*

Parábola semicúbica (fig. 42).

*La ecuación* es: $y = ax^{3/2}$* y en forma paramétrica: $x = t^2$, $y = at^3$. En el origen de coordenadas tiene un punto de retroceso. No tiene asíntotas. La curvatura $K = \dfrac{6a}{\sqrt{x}\,(4+9a^2x)^{3/2}}$ toma todos los valores desde $\infty$ hasta 0. La longitud de la curva desde el origen hasta el punto $M$** es:

$$L = \frac{1}{27a^2}\left[(4+9a^2x)^{3/2}-8\right].$$

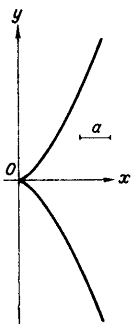



Fig. 42

Curva de Agnesi (fig. 43).

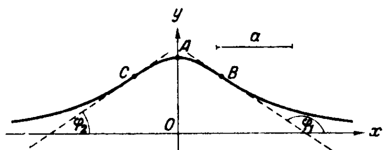



Fig. 43

*La ecuación* es: $y = \dfrac{a^3}{a^2+x^2}$. La asíntota es $y = 0$. El máximo es $A(0, a)$; el radio de curvatura en el máximo es: $r = \dfrac{a}{2}$.

Los puntos de inflexión son: $B$, $C\left(\pm\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{3a}{4}\right)$, la inclinación de la curva en estos puntos es: $\operatorname{tg}\varphi = \mp\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. El área entre la curva y la asíntota es $S = \pi a^2$.

Hoja de Descartes (fig. 44).

*La ecuación* es: $x^3+y^3 = 3axy$ y en forma paramétrica es: $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$).

---

* Aquí y más adelante se considera $a > 0$.

** En este caso y más adelante $M$ es un punto cualquiera de la curva con coordenadas variables $x$ e $y$.

El origen de coordenadas es un nodo, en el cual las tangentes son los ejes de coordenadas, el radio de curvatura de las ramas en el origen es: $r = \frac{3a}{2}$. La asíntota es $x+y+a = 0$. El vértice es: $A\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right)$. El área del lazo es: $S_1 = \frac{3}{2}a^2$; el área entre la curva y la asíntota es $S_2 = \frac{3}{2}a^2$.

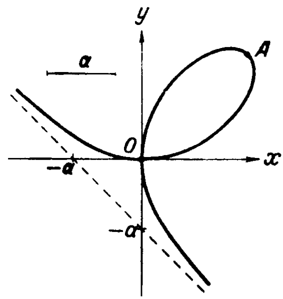


Fig. 44

CISOIDE (fig. 45). Es el lugar geométrico de los puntos $M$, para los cuales $OM = PQ$ ($P$ es un punto arbitrario del *círculo generador* de diámetro $a$).

*La ecuación* es: $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$; en forma paramétrica es: $x = \frac{at^2}{1+t^2}$, $y = \frac{at^3}{1+t^2}$ ($t = \operatorname{tg} MOx$); en coordenadas polares es: $\rho = \frac{a \operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi}$. El origen de coordenadas es un punto de retroceso. La asíntota es: $x = a$. El área entre la curva y la asíntota es: $S = 3/4\, \pi a^2$.

ESTROFOIDE (fig. 46). Es el lugar geométrico de los puntos $M_1$ y $M_2$.

(que yacen en rayos arbitrarios que pasan por el punto $A$), para los cuales $PM_1 = PM_2 = OP$ ($P$ es un punto arbitrario del eje $Oy$).

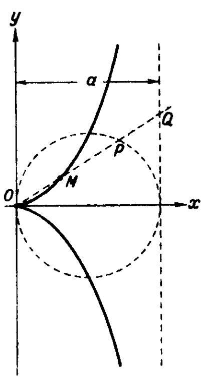


Fig. 45

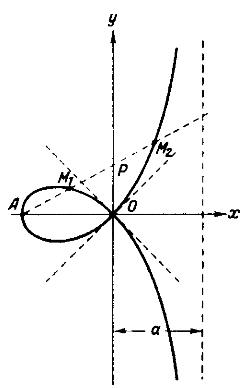


Fig. 46

*La ecuación* es: $y^2 = x^2\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$; en forma paramétrica es: $x = a\,\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = at\,\frac{t^2-1}{t^2+1}$ $(t = \operatorname{tg} MOx)$; en coordenadas polares es: $\rho = -a\,\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$. En el origen de coordenadas tiene un nodo (las tangentes son: $y = \pm x$). La asíntota es: $x = a$. El vértice es $A(-a, 0)$. El área del lazo es: $S_1 = 2a^2 - {}^1/_2\pi a^2$, el área entre la curva y la asíntota es: $S_2 = 2a^2 + {}^1/_2\pi a^2$.

## *10. Curvas de cuarto orden*

CONCOIDE DE NICOMEDES (fig. 47). Es el lugar geométrico de los puntos $M$ para los cuales $OM = OP \pm l$ (para el signo «+» la rama exterior y para el signo «−» la rama interior)*.

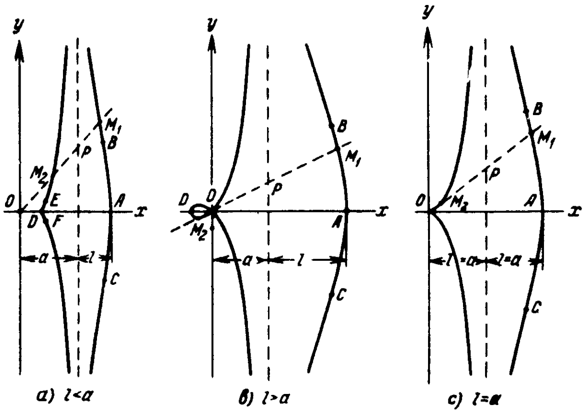



Fig. 47

*La ecuación* es: $(x-a)^2(x^2+y^2) - l^2x^2 = 0$; en forma paramétrica es: $x = a + l\cos\varphi$, $y = a\operatorname{tg}\varphi + l\ \operatorname{sen}\varphi$; en coordenadas polares es: $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l$.

* En general *concoide* de una curva dada se llama a la curva obtenida por la prolongación o disminución del radio vector de cada punto de la curva dada en un segmento constante $l$. Si la ecuación de la curva en coordenadas polares es $\rho = f(\varphi)$, entonces la ecuación de su concoide es $\rho = f(\varphi) \pm l$. La concoide de Nicomedes es la concoide de la línea recta.

*Rama exterior:* La asíntota es $x = a$. El vértice es $A(a+l, 0)$. Tiene dos puntos de inflexión $B$, $C$ [cuyas abscisas $x$ son iguales al máximo de las raíces de la ecuación $x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0$*]. El área entre la rama y su asíntota es $S = \infty$.

*Rama interior:* Tiene una asíntota $x = a$, un vértice $D(a-l, 0)$. En el origen de coordenadas tiene un punto doble cuyo carácter depende del valor de $a$ y $l$:

a) para $l < a$ es un punto aislado (fig. 47, *a*). Además, la curva tiene dos puntos de inflexión $E$, $F$ [la abscisa $x$ es igual al valor de la segunda raíz positiva de la ecuación

$$x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0];$$

b) para $l > a$ es un nodo (fig. 47, *b*). Para $x = a - \sqrt[3]{al^2}$, la curva tiene un máximo y un mínimo. La pendiente de las tangentes en el origen de coordenadas es $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{a}$; el radio de curvatura es $r_0 = \frac{l\sqrt{l^2 - a^2}}{2}$;

c) para $l = a$ tiene un punto de retroceso (fig. 47, *c*).

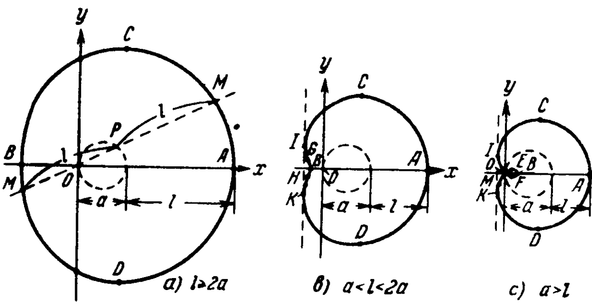



Fig. 48

**Caracol de Pascal** (fig. 48). Es la concoide de la circunferencia**: $OM = OP \pm l$ (el polo se encuentra en la circunferencia).

*La ecuación* es: $(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2(x^2 + y^2)$; en forma paramétrica es: $x = a\cos^2\varphi + l\cos\varphi$, $y = a\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + l \operatorname{sen}\varphi$; en coordenadas polares es: $\rho = a\cos\varphi + l$ ($a$ es el diámetro de la circunferencia). Tiene los vértices $A$, $B$ $(a \pm l, 0)$. La forma de la curva depende de los valores de $a$

---

* Véanse en las págs. 155-157 los procedimientos para resolver tales ecuaciones

** Véase la llamada en la página anterior.

y de $l$, lo cual es evidente en las figs. 48 y 49. Tiene cuatro extremos si $a > l$ y dos si $a \leqslant l$: $C, D, E, F\left(\cos\varphi = \frac{-l \pm \sqrt{l^2+8a^2}}{4a}\right)$. Existen los puntos de inflexión $G, H\left(\cos\varphi = -\frac{2a^2+l^2}{3al}\right)$, si $a < l < 2a$. Existe doble tangente en los puntos $I, K\left(-\frac{l^2}{4a}, \pm\frac{l\sqrt{4a^2-l^2}}{4a}\right)$, si $l < 2a$. El origen de coordenadas en un punto doble; aislado, para $a < l$ y nodo para $a > l$ (la pendiente de las tangentes en este punto es $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{a^2-l^2}}{l}$, el radio de curvatura es $r_0 = {}^1/_2\sqrt{a^2-l^2}$) y para $a = l$ es un punto de retroceso. En el último caso la curva es *la cardioide*. (Véase más abajo).

El área del caracol es $S = \frac{\pi a^2}{2} + \pi l^2$. [En el caso $a > l$ (fig 48, $c$), cuando se calcula por esta fórmula el área del lazo interior se cuenta dos veces].

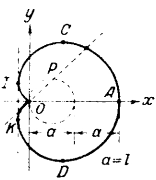


Fig. 49

Cardioide (fig. 49), se puede definir de dos maneras: 1) El caso particular del caracol de Pascal: $OM = OP \pm a$ ($a$ es el diámetro de la circunferencia). 2) La epicicloide (véase pág. 119) en la cual el diámetro del círculo rodante y el del estacionario son iguales ($= a$).

*La ecuación* es: $(x^2+y^2)^2 - 2ax(x^2+y^2) = a^2y^2$; en forma paramétrica es: $x = a\cos\varphi\,(1+\cos\varphi)$, $y = a\operatorname{sen}\varphi\;(1+\cos\varphi)$; en coordenadas polares es: $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

El origen de coordenadas es un punto de retroceso. Tiene un vértice $A(2a, 0)$, un máximo y un mínimo $\left(\cos\varphi = \frac{1}{2}\right)$; $C, D\left(\frac{3}{4}a, \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$. El area es $S = \frac{3}{2}\pi a^2$ (el área de un círculo de diámetro $a$ tomada 6 veces). La longitud de la curva es: $L = 8a$.

Ovalos de Cassini (fig. 50). Es el lugar geométrico de los puntos $M$, para los cuales el producto de las distancias $F_1M \cdot F_2M = a^2$ ($F_1$, $F_2$ son los focos fijos, $a$ es una constante).

*La ecuación* es $(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = a^4 - c^4$, en que $F_1, F_2\,(\pm c, 0)$; en coordenadas polares $\rho^2 = c^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4\cdot\cos^2 2\varphi + (a^4-c^4)}$. La forma de la curva depende de la relación entre $a$ y $c$:

a) Si $a > c\sqrt{2}$; es *un óvalo de forma elíptica* (fig. 50, $a$). Los puntos de intersección con el eje $x$ son: $A, C(\pm\sqrt{a^2+c^2}, 0)$; los puntos de intersección con el eje $y$ son: $B, D(0, \pm\sqrt{a^2-c^2})$. Si $a = c\sqrt{2}$ es *un óvalo del mismo tipo;* en este caso $A, C(\pm c\sqrt{3}, 0)$, $B, D(0, \pm c)$; en los puntos $B$ y $D$ la curvatura es igual a cero (contacto) estrecho con las rectas $y = \pm c$);

b) $c < a < c\sqrt{2}$; es *un óvalo con "talle"* (fig. 50, *b*). Las intersecciones con los ejes son las mismas que en el caso a); los máximos y los mínimos son: *B*, *D* (véanse las coordenadas más arriba), *E*, *G*, *K*, $I\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right)$; tiene cuatro puntos de inflexión: $P, L, M, N\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(m-n)}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}(m+n)}\right)$, en que $n = \frac{a^4-c^4}{3c^2}$, $m = \sqrt{\frac{a^4-c^4}{3}}$;

c) $a = c$, es *una lemniscata* (véase más abajo);

d) $a < c$, son *dos óvalos* (fig 50, *c*). Las intersecciones con el eje $x$ son: $A$, $C(\pm\sqrt{a^2+c^2}, 0)$ y $P$, $Q(\pm\sqrt{c^2-a^2}, 0)$; los máximos y los mínimos son: $E, G, K, I\left(\pm\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}, \pm\frac{a^2}{2c}\right)$.

El radio de curvatura es: $r = \frac{2a^2\rho^3}{c^4-a^4+3\rho^4}$ ($\rho$ es el radio vector).

LEMNISCATA (fig. 51). Es un caso particular del óvalo de Cassini ($a = c$); $F_1M \cdot F_2M = \left(\frac{F_1F_2}{2}\right)^2$, en que $F_1, F_2(\pm a, 0)$.

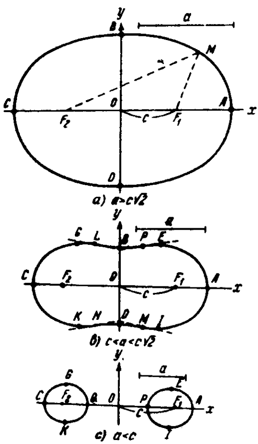


Fig. 50

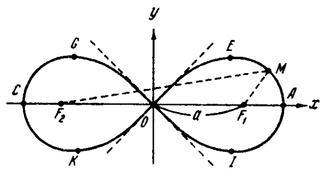


Fig. 51

*La ecuación* es: $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2) = 0$; en coordenadas polares $\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$. El origen de coordenadas es un nodo con el cual las tangentes son: $y = \pm x$, el mismo es un punto de inflexión. Las intersecciones de la curva con el eje $x$ son: $A$, $C(\pm a\sqrt{2}, 0)$; los máximos y los mínimos son: $E, G, K, I\left(\pm\frac{a\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{a}{2}\right)$; el ángulo polar en estos puntos es: $\varphi = \pm\pi/6$. El radio de curvatura es $r = \frac{2a^2}{3\rho}$. El área de cada lazo es $S = a^2$.

## *11. Cicloides*

CICLOIDE ORDINARIA (fig. 52). Es la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalamiento por una línea recta.

*La ecuación* en forma paramétrica es: $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a$ es el radio de la circunferencia, $t = \angle MC_1B$); en coordenadas cartesianas es: $x + \sqrt{y(2a-y)} = a$ Arccos $\frac{a-y}{a}$. La curva es periódica, con período (*la base de la cicloide*) $OO_1 = 2\pi a$. Los puntos de retroceso son: $O, O_1, O_2, \ldots, (2k\pi a, 0)$; los vértices son: $A_1, A_2, \ldots$ $[(2k+1)\pi a, 2a]$. La longitud $OM$ es: $L = 8a \operatorname{sen}^2 1/4t$; la longitud de una rama es: $L_{OA_1O_1} = 8a$, el área $OA_1O_1O$ es: $S = 3\pi a^2$. El radio de curvatura $r = 4a \operatorname{sen} 1/2t$, en los vértices $r_A = 4a$. La evoluta (pág. 287) de la cicloide es una cicloide semejante (está representada con línea de trazos).

CICLOIDES ALARGADA (fig. 53, *a*) Y ACORTADA (fig. 53, *b*) (*"trocoides"*). Son las curvas descritas por un punto que yace a) en el exterior y b) en el interior de una circunferencia que rueda sin resbalamiento por una línea recta.

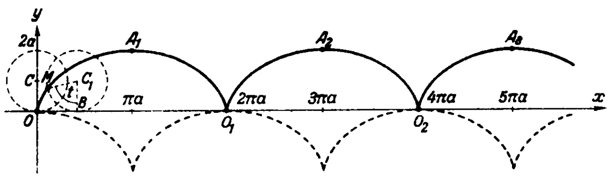
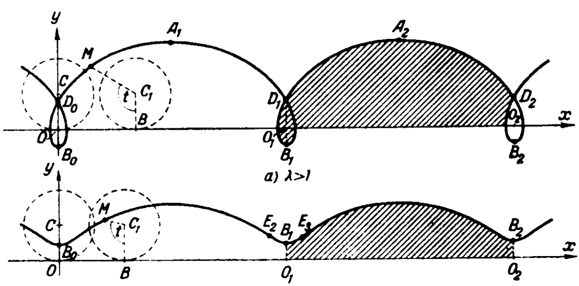



Fig. 52




a) $\lambda > 1$

б) $\lambda < 1$

Fig. 53

*La ecuación* en forma paramétrica es: $x = a(t - \lambda \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \lambda \cos t)$, donde $a$ es el radio de la circunferencia, $t = \angle MC_1P$, $\lambda a = C_1M$ ($\lambda > 1$ para la cicloide alargada; $\lambda < 1$, para la acortada). Las curvas son periódicas, de período $OO_1 = 2\pi a$; los máximos son: $A_1, A_2, \ldots$ $[(2k+1)\pi a, (1+\lambda)a]$, los mínimos son: $B_0, B_1, B_2, \ldots$ $[2k\pi a, (1-\lambda)a]$. Para la cicloide alargada los nodos son: $D_0, D_1, D_2, \ldots$ $\left[2k\pi a, a\left(1 - \sqrt{\lambda^2 - t_0^2}\right)\right]$ donde $t_0$ es la raíz positiva menor de la ecuación $t = \lambda \operatorname{sen} t$*. Los puntos de inflexión, para la cicloide acortada son: $E_1, E_2, \ldots\ldots\ldots$ $\ldots\left[a\left(\arccos \lambda - \lambda\sqrt{1-\lambda^2}\right), a(1-\lambda^2)\right]$. La longitud de un ciclo es $L = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\lambda^2 - 2\lambda \cos t}\, dt$; el área sombreada en la fig. 53 es: $S = \pi a^2(2+\lambda^2)$. El radio de curvatura es: $r = a\frac{(1+\lambda^2-2\lambda\cos t)^{3/2}}{\lambda(\cos t - \lambda)}$, en los puntos máximos es: $r_A = -a\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$, en los puntos mínimos es: $r_B = a\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$.

EPICICLOIDE (fig. 54). Es la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalamiento por el exterior de otra circunferencia.

*La ecuación* en forma paramétrica es: $x = (A+a)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right)$, $y = (A+a)\operatorname{sen}\varphi - a\operatorname{sen}\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right)$. [$A$ es el radio del círculo estacionario y $a$, del círculo móvil, $\varphi = \angle COx$]. La forma de la curva depende de la razón $\frac{A}{a} = m$. Para $m = 1$ es *la cardioide* (véase pág. 116).

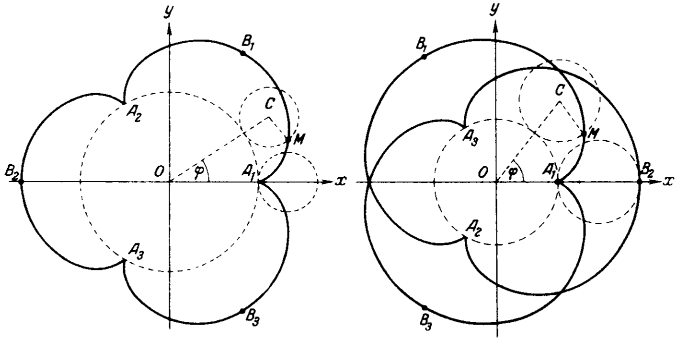
a) Para $m$ entero la curva está formada de $m$ ramas (fig. 54 *a*), "que rodean" el círculo estacionario; los puntos de retroceso son: $A_1, A_2, \ldots,$ $A_m$ $\left(\rho = A, \varphi = \frac{2k\pi}{m}(k = 0, 1, \ldots, m-1)\right)$; los vértices son: $B_1, B_2,$ $\ldots, B_m\left[\rho = A+2a, \varphi = \frac{2\pi}{m}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$;

b) Para $m$ fraccionario las ramas se cruzan (fig. 54, *b*) pero cuando el punto $M$ ha descrito un número finito de ramas, vuelve a la posición inicial. Para $m$ **irracional** el número de ramas es infinito y el punto $M$ no vuelve a la posición inicial.

La longitud de la rama $L_{A_1B_1A_2} = \frac{8(A+a)}{m}$, para $m$ entero la longitud de toda la curva es $L = 8(A+a)$. El área del sector $A_1B_1A_2A_1$ (sin el sector del círculo estacionario) es: $S = \pi a^2\left(\frac{3A+2a}{A}\right)$. El radio de curvatura es: $r = \frac{4a(A+a)}{2a+A}\operatorname{sen}\frac{A\varphi}{2a}$; en los vértices es: $r_B = \frac{4a(A+a)}{2a+A}$.

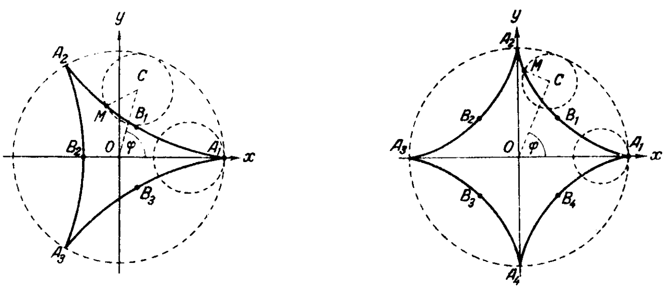
---

* Véanse en las págs. 162-165 la resolución de tales ecuaciones.




a) $m=3$ б) $m=\frac{3}{2}$

Fig. 54

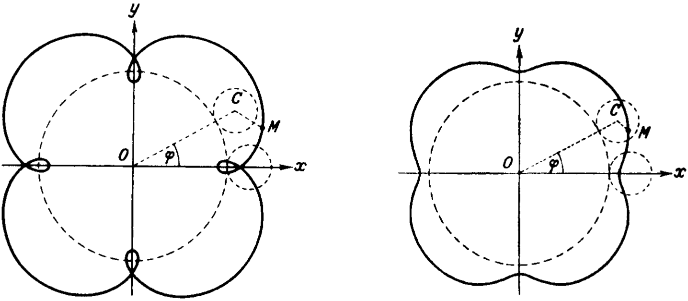



a) $m=3$ б) $m=4$

Fig. 55

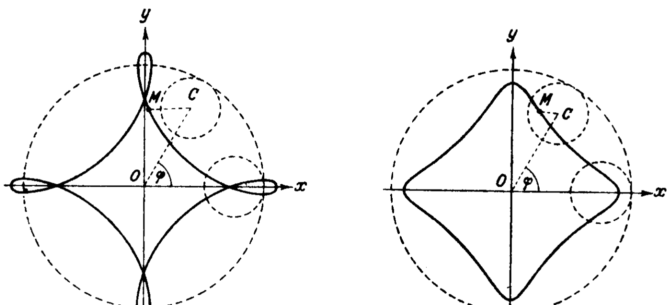
Hipocicloide (fig. 55). Es la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalamiento por el interior de otra cincunferencia.

*La ecuación* de la hipocicloide, las coordenadas de los vértices y de los puntos de retroceso, las fórmulas para la longitud de arco, para el área y para el radio de curvatura son las mismas que para la epicicloide, teniendo sólo que reemplazar «$+a$», por «$-a$»; el número de puntos de re-




a) $\lambda > 1, a > 0$ б) $\lambda < 1, a > 0$

Fig. 56




a) $\lambda > 1, a < 0$ б) $\lambda < 1, a < 0$

Fig. 57

troceso, para $m$ entero, fraccionario o irracional ($m$ es siempre $> 1$) es el mismo que en la epicicloide. Para $m = 2$ la curva degenera en el diámetro del círculo estacionario. Para $m = 3$ es la hipocicloide con tres ramas (fig. 55, *a*): $x = a\,(2\cos\varphi + \cos 2\varphi)$, $y = a\,(2\,\mathrm{sen}\,\varphi - \mathrm{sen}\,2\varphi)$; $L = 16a$, $S_{\text{total}} = 2\pi a^2$. Para $m = 4$ (fig. 55, *b*) es la hipocicloide con cuatro ramas *(la astroide)*: $x = A\cos^3\varphi$, $y = A\,\mathrm{sen}^3\,\varphi$; en coordenadas cartesianas es: $x^{2/3} + y^{2/3} = A^{2/3}$; $L = 24a = 6A$; $S = \frac{3}{8}\pi A^2$.

EPICICLOIDES E HIPOCICLOIDES ALARGADAS Y ACORTADAS (*epitrocoides* e *hipotrocoides*) (fig. 56 y 57). Es la curva descrita por un punto que está situado en el exterior o en el interior de una circunferencia que rueda sin resbalamiento por otra circunferencia exterior a ella (epicicloide, fig. 56) o interior a ella (hipocicloide, fig. 57).

*La ecuación* (en forma parametrica) es:

$$x = (A+a)\cos\varphi - \lambda\, a\cos\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right).$$

$$y = (A+a)\,\mathrm{sen}\,\varphi - \lambda a\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right).$$

$A$ es el radio del círculo estacionario y $a$, el del círculo móvil (además en el caso de la hipocicloide «$+a$» se reemplaza en la ecuación por «$-a$»), $\lambda a = CM$ ($\lambda > 1$, para alargada y $\lambda < 1$, para la acortada). Para $A = 2a$ ($\lambda$ es un número cualquiera) la hipocicloide $x = a(1+\lambda)\cos\varphi$, $y = a(1-\lambda)\,\mathrm{sen}\,\varphi$, se convierte en la elipse con semiejes: $a(1+\lambda)$ y $a(1-\lambda)$. Para $A = a$ se obtiene el *caracol de Pascal* (véase pág. 115)*: $x = a\,(2\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi)$, $y = a\,(2\,\mathrm{sen}\,\varphi - \lambda\,\mathrm{sen}\,2\varphi)$.

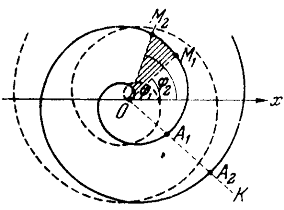


Fig. 58

## 12. Espirales

ESPIRAL DE ARQUÍMEDES (fig. 58). Es la curva descrita por un punto que se mueve con velocidad constante $v$ por un rayo que gira alrededor del polo $O$ con velocidad angular constante $\omega$.

*La ecuación* en coordenadas polares es: $\rho = a\varphi$; $a = \frac{v}{\omega}$. La curva está formada de dos ramas que son simétricas con respecto al eje $Ox$. Cada uno de los rayos $OK$ corta a la curva en los puntos $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$ que se encuentran a la distancia $A_iA_{i+1} = 2\pi a$. La longitud del arco $OM$: $L = \frac{a}{2}(\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \mathrm{Arsh}\,\varphi)$, $\frac{2L}{a\varphi^2} \to 1$ para grandes valores de $\varphi$. El área del sector $M_1OM_2$ es: $S = \frac{a^2}{6}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$. El radio de curvatura es: $r = a\,\frac{(\varphi^2+1)^{3/2}}{\varphi^2+2}$, en el origen de coordenadas es: $r_0 = \frac{a}{2}$.

ESPIRAL HIPERBÓLICA (fig. 59).

---

* En la pág. 115 se designó por $a$ el valor que aquí se designa por $2\lambda\, a$ y por $l$ el diámetro $2a$. Se ha cambiado también el sistema de coordenadas.

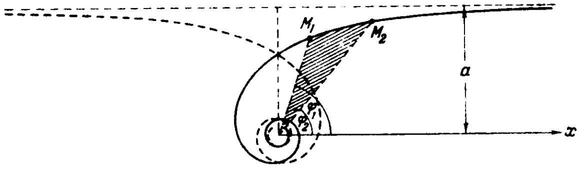



Fig. 59

*La ecuación* en coordenadas polares es: $\rho = \frac{a}{\varphi}$. La curva está formada de dos ramas, que son simétricas con respecto al eje $y$; cada rama tiene como asíntota la recta $y = a$ y el origen de coordenadas $O$ como punto asintótico. El área del sector $M_1OM_2$ es: $S = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right)$; $\lim\limits_{\varphi_2 \to \infty} S = \frac{a^2}{2\varphi}$. El radio de curvatura es $r = \frac{a}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3$.

ESPIRAL LOGARÍTMICA (fig. 60). Es la curva que corta bajo un mismo ángulo $\alpha$ todos los rayos que parten de un mismo punto $O$.

*La ecuación* (en coordenadas polares) es: $\rho = ae^{k\varphi}$ $\left[k = \operatorname{ctg}\alpha;\right.$ si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, entonces $k = 0$ y la curva es una circunferencia$\left.\right]$. La curva tiene como punto asintótico el polo $O$. La longitud del arco $M_1M_2$ es: $L = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}(\rho_2 - \rho_1)$, el límite de la longitud del arco $OM$ a partir del origen de coordenadas es: $L_0 = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\rho$. El radio de curvatura es: $r = \sqrt{1+k^2}\rho = L_0k$.

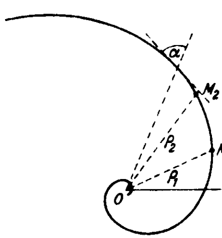



Fig. 60

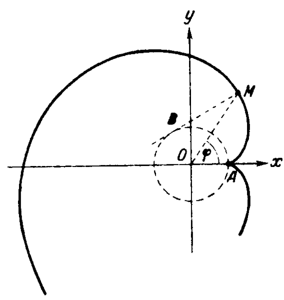



Fig. 61

DESARROLLO (EVOLVENTE*) DE UNA CIRCUNFERENCIA (fig. 61). Es la curva descrita por el extremo de un hilo tirante que se desenrolla desde una circunferencia $(\overset{\frown}{AB} = BM)$.

*La ecuación* en forma paramétrica es:

$$x = a\cos\varphi + a\varphi \operatorname{sen}\varphi, \qquad y = a \operatorname{sen}\varphi - a\varphi\cos\varphi$$

($a$ es el radio del círculo y $\varphi = \angle BOx$) La curva tiene dos ramas que son simétricas con respecto al eje $x$; el punto de retroceso es $A(a, 0)$; las

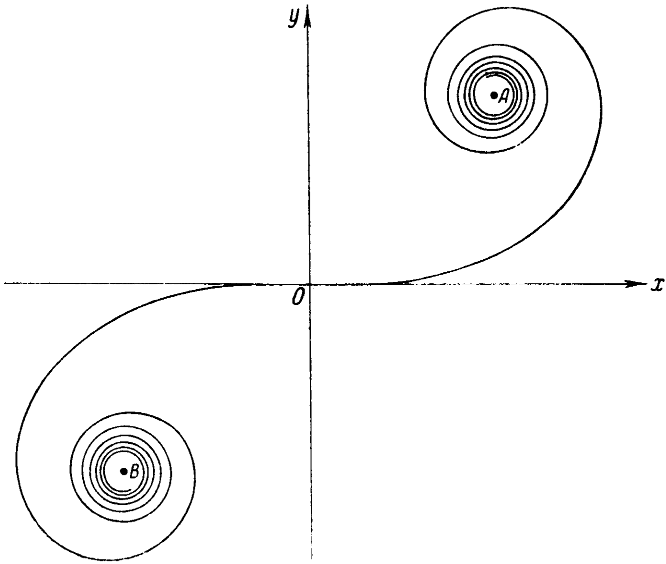



Fig. 62

intersecciones con el eje $Ox$ son: $x = \frac{a}{\cos\varphi_0}$, en que $\varphi_0$ son las raíces de la ecuación $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$**. La longitud del arco $AM$ es: $L = \frac{1}{2}a\varphi^2$. El radio

---

* Véase en la pág. 287 lo referente a la evolvente.

** Véase en las págs. 162-165 la resolución de tales ecuaciones.

de curvatura es: $r = a\varphi = \sqrt{2aL}$; el centro de curvatura $B$ se encuentra en la circunferencia.

LA CLOTOIDE (fig. 62). Es la curva cuyo radio de curvatura es inversamente proporcional a la longitud de arco: $r = a^2 : s$.

*La ecuación* en forma paramétrica es $x = a\sqrt{\pi}\int\limits_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt$,

$y = a\sqrt{\pi}\int\limits_0^t \operatorname{sen}\frac{\pi t^2}{2}\,dt$* en que $t = \frac{s}{a\sqrt{\pi}}$, $s = \overset{\frown}{OM}$.

La curva es simétrica con respecto al origen de coordenadas que es un punto de inflexión (la tangente es el eje $x$); tiene dos puntos asintóticos:

$$A\left(+\frac{a\sqrt{\pi}}{2},\ +\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right) \quad \text{y} \quad B\left(-\frac{a\sqrt{\pi}}{2},\ -\frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

## *13. Otras curvas*

CATENARIA (fig. 63). Un hilo pesado, flexible, inextensible, colgado entre dos puntos toma la forma de la catenaria.

*La ecuación* es: $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a} = a\frac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}$.

La curva es simétrica con respecto al eje $y$ pasando más arriba de la parábola $y = a+\frac{x^2}{2a}$ (señalada con línea de trazos). El vértice es $A(0, a)$.

La longitud del arco $AM$ es: $L = a\operatorname{sh}\frac{x}{a} = a\frac{e^{x/a}-e^{-x/a}}{2}$; el área $OAMP$ es: $S=aL=a^2\operatorname{sh}\frac{x}{a}$. El radio de curvatura es: $r=\frac{y^2}{a}=a\operatorname{ch}^2\frac{x}{a}$.

TRACTRIZ (fig. 64). Es la curva para la cual la longitud del segmento de la tangente desde el punto de contacto $M$ hasta el punto de intersección $P$ con la recta dada (en la fig. 64 con el eje de las abscisas) es un valor constante**.

La tractriz es la evolvente de la catenaria (pág. 287), además el desarrollo comienza en el vértice $A$.

---

* Estas integrales no se expresan mediante funciones elementales.

** En otras palabras: si a un extremo de un hilo inextensible de longitud dada ($a$) está sujeto un punto material ($M$) y el otro extremo ($P$) se mueve por la recta ($Ox$), entonces este punto $M$ describe la tractriz (a esto es debido el origen de la denominación de la tractriz como línea de atracción).

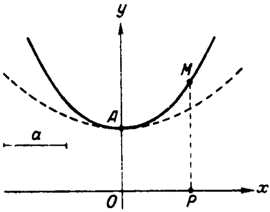



Fig. 63

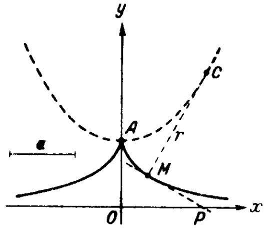



Fig. 64

*La ecuación* es: $x = a \operatorname{Arch} \frac{a}{y} \pm \sqrt{a^2-y^2} = a \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2-y^2}}{y} \mp \mp \sqrt{a^2-y^2}$.

La asíntota es el eje $x$, el punto de retroceso (con la tangente vertical) es: $A(0, a)$. La curva es simétrica con respecto al eje $y$. La longitud del arco $AM$ es: $L = a \ln \frac{a}{y}$; cuando aumenta la longitud del arco $L$, la diferencia $L-x$ (donde $x$ es la abscisa del punto $M$) $\approx a(1-\ln 2) \approx 0{,}307a$. El radio de curvatura es: $r = a \operatorname{ctg} \frac{x}{y}$.

SEGUNDA PARTE

# MATEMATICA ELEMENTAL

---

## I. CALCULOS APROXIMADOS

### *1. Reglas para los cálculos aproximados*

CÁLCULOS APROXIMADOS. Al realizar cálculos siempre es necesario tener en cuenta la exactitud que se necesita o la que se puede obtener. Es absolutamente inadmisible realizar cálculos con una gran exactitud, si los datos del problema no lo permiten o no piden esto (por ejemplo, para los cálculos con números de 5 cifras significativas exactas no se pueden emplear logaritmos con siete cifras exactas). Toda persona que deba realizar cálculos necesita tener un profundo conocimiento de las reglas de los cálculos aproximados.

ERRORES. *Error* de un número aproximado dado es la diferencia entre un número exacto $x$ y su valor aproximado $a$. Si se sabe que $|x-a| < \Delta_a$, el valor $\Delta_a$ se llama *error absoluto límite* del valor aproximado $a$; la razón $\Delta_a : a = \delta_a$ se llama *error relativo límite*, frecuentemente este último se expresa en porcentajes.

*Ejemplo*. 3,14 es el valor aproximado de $\pi$, el error es igual a 0,00159 ..., el error absoluto límite se puede considerar igual a 0,0016... y el error relativo límite es igual a $\frac{0,0016}{3,14} = 0,00051 = 0,051\%$.

Generalmente, para simplificar, se omite la palabra "límite".

Véase en la pág. 650 lo referente a los *errores en las observaciones*.

CIFRAS SIGNIFICATIVAS. Si el error absoluto del valor $a$ no excede una unidad del orden de la última cifra del número $a$, entonces se dice que el número $a$ tiene todas sus cifras "*exactas*"*. Los números aproximados se deben anotar conservando sólo las cifras exactas. Si, por ejemplo, el error absoluto del número 52 400 es igual a 100, entonces este número debe ser anotado en la forma $524 \cdot 10^2$ ó $5{,}24 \cdot 10^4$. Se puede calcular el error del número aproximado indicando el número de cifras significativas exactas que contiene. Al calcular las cifras significativas no se cuentan los ceros a la izquierda.

*Ejemplos:* 1) 1 pie cúbico $= 0{,}0283$ m³, tiene tres cifras significativas exactas; 2) 1 pulgada $= 2{,}5400$ cm tiene cinco cifras significativas exactas.

Si el número $a$ tiene $n$ cifras significativas exactas entonces su error relativo es $\delta_a \leqslant \frac{1}{z \cdot 10^{n-1}}$, donde $z$ es la primera cifra significativa del número $a$. En el número $a$ con error relativo $\delta_a$ hay $n$ cifras significativas exactas, donde $n$ es el número entero mayor que verifica la desigualdad

$$(1+z)\delta_a \leqslant 10^{1-n}. \; **$$

*Ejemplo.* Si el número $a = 47{,}542$ ha sido obtenido como resultado de operaciones con números aproximados (véase más abajo) y se sabe que $\delta_a = 0{,}1\%$, entonces $a$ tiene tres cifras exactas, ya que $(4+1) \cdot 0{,}001 < < 10^{-2}$.

Redondeo. Si un número aproximado contiene cifras excesivas (o no exactas) éste debe *redondearse*. En el redondeo se conservan todas las cifras exactas, despreciando las demás; por otra parte, si la primera cifra despreciada es mayor que 4, la última cifra conservada se aumenta en una unidad. Si la parte despreciada está formada sólo de la cifra 5, el redondeo se hace de tal manera que la última cifra quede par. En el redondeo, surge un error complementario que no excede la mitad de la unidad del orden de la última cifra significativa del número redondeado. Por esto, para que después del redondeo todas las cifras sean exactas, el error antes del redondeo no debe ser mayor que la mitad de la unidad del orden hasta el cual se piensa hacer el redondeo.

Operaciones con números aproximados. El resultado de las operaciones con números aproximados representa también un número aproximado. El error del resultado puede expresarse por el error de los datos iniciales mediante los siguientes teoremas:

1) El error absoluto límite de **la suma** algebraica es igual a la suma de los errores absolutos límites de los sumandos.

---

* Generalmente, en esta definición se pide con frecuencia que el error no exceda a la mitad de la unidad del orden de la última cifra del número aproximado. En relación con esto véase más abajo ("redondeo").

** Si se tiene en cuenta el error posible del rodendeo (véase más adelante), se debe suponer que $(1+z)\delta_a \leqslant 0{,}5 \cdot 10^{1-n}$.

2) El error relativo de **la suma** está comprendido entre el máximo y el mínimo de los errores relativos de los sumandos.

3) Los errores relativos **del producto** y **del cociente** son iguales a la suma de los errores relativos de los factores o, respectivamente, del dividendo y del divisor.

4) El error relativo de **la potencia** $n$-ésima de un número aproximado es $n$ veces mayor que el error relativo de la base (tanto para $n$ enteros como para fraccionarios).

Aplicando estos teoremas se puede determinar el error del resultado de una combinación cualquiera de operaciones aritméticas con números aproximados.

*Ejemplos:*

1) $V = r^2 h; \quad \Delta_V = V\delta_V = (2\delta_r + \delta_h).$

2) $z = \sqrt{\frac{x}{1+y}}; \quad \delta_z = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_{1+y}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_x}{x} + \frac{\Delta_y}{1+y}\right).$

ERROR DE UNA FUNCIÓN. Además de las reglas dadas más arriba, el error cometido en el cálculo de los valores de una función, cuyos argumentos son dados aproximadamente, puede ser evaluado mediante la diferencial de esta función. El error de la función no es otra cosa más que el posible incremento de la función que se obtiene al asignar a sus argumentos incrementos iguales a sus errores. Como, corrientemente, los errores son suficientemente pequeños, es prácticamente admisible el reemplazo de los incrementos por las diferenciales (véase pág 355). Si sólo se conocen los errores absolutos límites de los argumentos, entonces para el cálculo de las diferenciales es necesario tomar para todas las derivadas sus valores absolutos.

*Ejemplos:*

1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}; \quad d\varphi = \frac{b\,da - a\,db}{a^2+b^2}, \quad \Delta_\varphi = \frac{b\Delta_a + a\Delta_b}{a^2+b^2}.$

2) $z = \sqrt{x^2+y^2}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{z\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}, \quad \delta_z = \frac{\Delta_z}{z} = \frac{x\Delta_x + y\Delta_y}{x^2+y^2}.$

Para una función, cuyo valor se halla mediante tablas, la acotación del error puede realizarse de una forma extremadamente sencilla. Si el argumento se ha dado con un error de $\Delta_x$, entonces para la determinación del error de $f(x)$, se halla mediante la interpolación lineal (véase pág. 15) el incremento de la función que corresponde a $\pm\Delta_x$. El valor absoluto de este incremento da el error absoluto límite de $f(x)$.

*Ejemplos:* 1) Si el diámetro del círculo $D = 5{,}92$ cm tiene un error $\Delta_D = 0{,}005$, los errores correspondientes de la longitud de la circunferencia y del área del círculo son iguales a (véanse las págs. 69 y 71)

0,015 cm y 0,05 cm$^2$ respectivamente. 2) Si tg $\alpha = 0{,}818 \pm 0{,}002$, (véase pág. 55) $\alpha = 39^\circ\ 17' \pm 0^\circ\ 4'$.

Problema recíproco. Si se pide obtener el resultado con una exactitud determinada, entonces deduciendo primero la fórmula para el error del resultado por uno de los procedimientos indicados anteriormente, se pueden determinar los errores admisibles de los datos iniciales. La solución de este problema no es única y exige hipótesis complementarias.

*Ejemplo:* ¿ Con qué exactitud deben ser medidos los catetos de un triángulo rectángulo, uno de los cuales es aproximadamente tres veces menor que el otro, para que el error del ángulo definido por su tangente no sea mayor que un minuto? De tg $\varphi = \frac{a}{b}$ se deduce que (véase más arriba):

$\Delta_\varphi = \frac{b\Delta_a + a\Delta_b}{a^2+b^2}$, de donde, suponiendo que $b = 3a$ y haciendo $\Delta_a = \Delta_b$ obtenemos que $1' = 0{,}00029 = 0{,}4\frac{\Delta_a}{a}$, y $\delta_a = 0{,}0007$. Así, en la medición de los catetos es admisible un error absoluto igual de modo que para el menor de ellos el error relativo sea 0,07%.

Cálculos sin consideración exacta de errores. Por el procedimiento indicado más arriba puede ser estimado el error absoluto **limite,** es decir, un valor que excede a priori el valor absoluto del verdadero error. Además, siempre se supone que los diferentes errores se intensifican uno con el otro, pero en la práctica esto es muy raro que suceda. Para cálculos masivos, cuando no se tiene en cuenta el error de cada resultado por separado, se emplean *las siguientes reglas del cálculo de cifras*. Ateniéndose a estas reglas se puede considerar que en término medio los resultados obtenidos tendrán todas las cifras exactas, aunque en casos aislados es posible un error en varias unidades del último dígito*.

1. *Al sumar y restar* números aproximados se deben conservar en el resultado tantas **cifras decimales** cuantas tenga el dato aproximado que contiene el menor número de cifras decimales.

2. *Al multiplicar y dividir* se deben conservar en el resultado tantas cifras significativas cuantas tenga el dato aproximado que tiene el menor número de cifras significativas.

3. *Al elevar al cuadrado y al cubo* se deben conservar en el resultado tantas **cifras significativas** cuantas tenga el número aproximado que se eleva a la potencia. (En este caso, la última cifra del cuadrado y, especialmente, la del cubo, es menos segura que la última cifra de la base).

---

* Las reglas están dadas en la redacción de V. M. Bradis.

4. *Al extraer la raíz cuadrada y cúbica* se deben tomar en el resultado tantas **cifras significativas** cuantas tenga el valor aproximado del subradical. (En este caso, la última cifra de la raíz cuadrada y, especialmente, de la cúbica, es menos exacta que la última cifra del subradical.)

5. En todos los resultados intermedios se debe conservar una cifra más que las que recomiendan las reglas anteriores. En el resultado final esta "cifra de reserva" se elimina.

6. Si algunos datos tienen más **cifras decimales** (en la suma o en la resta) o más **cifras significativas** (en la multiplicación, división, elevación a potencia o extracción de raíz) que otros, entonces se les debe primeramente redondear, conservando sólo una cifra excesiva.

7. Si los datos se pueden tomar con cualquier exactitud, entonces para obtener un resultado con $k$ cifras, se deben tomar los datos con un número de cifras tal, que según las reglas 1–4 el resultado tenga $(k+1)$ cifras.

8. Al calcular mediante logaritmos algún monomio se debe contar el número de cifras significativas del dato aproximado que tiene el menor número de cifras significativas y tomar una tabla de logaritmos que tenga una cifra decimal más. En el resultado final la última cifra significativa se desprecia.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE NÚMEROS APROXIMADOS. Para no obtener cifras innecesarias, la multiplicación y división de números aproximados se efectúa de la siguiente manera:

En la multiplicación se toma por multiplicador el número menos exacto de los dos factores. Se empieza la multiplicación desde las cifras de órdenes superiores y en cada producto parcial se tacha en el multiplicando la última cifra de la derecha. En este caso es deseable introducir una corrección en la última cifra tachada.

En la división, según la regla 6, si es posible se conserva en el dividendo, una cifra más que en el divisor. Cuando se efectúa la división en lugar de añadir ceros en el resto, como se hace corrientemente, se debe ir tachando cada vez una cifra del divisor. Al multiplicar se deben introducir correcciones en las cifras tachadas.

*Ejemplos:* 1) Multiplicar 4,128 por 2,953; 2) Dividir 12,189 por 4,128. La anotación final de los cálculos tendrá la forma siguiente:

```
1)  4,128            2)  12,189 | 4,128
  × 2,953              −  8,256 | 2,953
  -------                 ------
    8,256              −  3,933
  + 3,715                 3,715
      206                 -----
       12              −    218
  -------                   206
   12,189 ≈ 12,19           ---
                       −     12
                             12
                             --
```

| Fórmula | El error de la fórmula no excede 0,1 % si $x$ varía | | El error de la fórmula no excede 1,0 % si $x$ varía | | El error de la fórmula no excede 10 % si $x$ varía | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | desde | hasta | desde | hasta | desde | hasta |
| $\operatorname{sen} x = x$ | $-0{,}077 = -4°{,}4$ | $0{,}077 = 4°{,}4$ | $-0{,}245 = -14°{,}0$ | $0{,}245 = 14°{,}0$ | $-0{,}786 = -45°{,}0$ | $0{,}786 = 45°{,}0$ |
| $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6}$ | $-0{,}580 = -33°{,}2$ | $0{,}580 = 33°{,}2$ | $-1{,}005 = -57°{,}6$ | $1{,}005 = 57°{,}6$ | $-1{,}632 = -93°{,}5$ | $1{,}632 = 93°{,}5$ |
| $\cos x = 1$ | $-0{,}045 = -2°{,}6$ | $0{,}045 = 2°{,}6$ | $-0{,}141 = -8°{,}1$ | $0{,}141 = 8°{,}1$ | $-0{,}451 = -25°{,}8$ | $0{,}451 = 25°{,}8$ |
| $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ | $-0{,}386 = -22°{,}1$ | $0{,}386 = 22°{,}1$ | $-0{,}662 = -37°{,}9$ | $0{,}662 = 37°{,}9$ | $-1{,}036 = -59°{,}3$ | $1{,}036 = 59°{,}3$ |
| $\operatorname{tg} x = x$ | $-0{,}054 = -3°{,}1$ | $0{,}054 = 3°{,}1$ | $-0{,}172 = -9°{,}8$ | $0{,}172 = 9°{,}8$ | $-0{,}517 = -29°{,}6$ | $0{,}517 = 29°{,}6$ |
| $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3}$ | $-0{,}293 = 16°{,}8$ | $0{,}293 = 16°{,}8$ | $-0{,}519 = -29°{,}7$ | $0{,}519 = 29°{,}7$ | $-0{,}895 = -51°{,}3$ | $0{,}895 = 51°{,}3$ |
| $\sqrt{a^2+x} = a + \frac{x}{2a}$ * | $-0{,}085a^2$ | $0{,}093a^2$ | $-0{,}247a^2$ | $0{,}328a^2$ | $-0{,}607a^2$ | $1{,}545a^2$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2+x}} = \frac{1}{a} - \frac{x}{2a^3}$ | $-0{,}051a^2$ | $0{,}052a^2$ | $-0{,}157a^2$ | $0{,}166a^2$ | $-0{,}448a^2$ | $0{,}530a^2$ |
| $\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2}$ | $-0{,}031a$ | $0{,}031a$ | $-0{,}099a$ | $0{,}099a$ | $-0{,}301a$ | $0{,}301a$ |
| $e^x = 1 + x$ | $-0{,}045$ | $0{,}045$ | $-0{,}134$ | $0{,}148$ | $-0{,}375$ | $0{,}502$ |
| $\ln(1+x) = x$ | $-0{,}002$ | $0{,}002$ | $-0{,}020$ | $0{,}020$ | $-0{,}176$ | $0{,}230$ |

* La fórmula se puede escribir en la forma $\sqrt{a^2+x} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2+x}{a}\right)$. En la práctica se usa generalmente esta forma. Como $a$ es el valor aproximado de la raíz ("primera aproximación") de esta fórmula se deduce *la regla:* para obtener un valor más exacto de la raíz se debe tomar la media aritmética de la primera aproximación y del cociente de la división del subradical por la primera aproximación; en este caso se puede considerar que el número de cifras exactas del resultado obtenido es el doble que el número de cifras exactas de la primera aproximación.

También se debe señalar que la fórmula $\sqrt{a^2+b^2} = 0{,}960a + 0{,}398b$, en que $a > b$, la cual se ha obtenido según el principio de la aproximación uniforme (véase pág. 657), da un error que no excede el 4 %.

## 2. *Fórmulas de aproximación*

En muchos casos, las funciones bastante complicadas se pueden reemplazar aproximadamente por otras más simples que den un resultado con un error admisible. Con este fin, se pueden emplear varios de los primeros términos de los desarrollos de estas funciones en serie de Taylor (véase pág. 377) o el método de los cuadrados mínimos (véase pág. 658). En el último caso, la fórmula dependerá esencialmente del intervalo para el cual está destinada. En la pág. 132 se muestran las fórmulas más usuales que se obtienen de la serie de Taylor, y se indica la exactitud de las mismas.

## 3. *La regla de cálculo*

Designación de la regla de cálculo. Los cálculos más simples que contienen la multiplicación, la división, la extracción de las raíces cuadradas y cúbicas, la elevación a potencia de números dados y las operaciones con funciones trigonométricas de los ángulos dados, pueden efectuarse aproximadamente por medio de la regla de cálculo. La exactitud de los cálculos es distinta en diferentes casos, pero, por término medio, los cálculos con la regla de cálculo de longitud 25 cm corresponden a los cálculos con tres cifras significativas, es decir, con un error relativo desde el 0,1% hasta el 1%. En los casos en que es suficiente semejante exactitud, los cálculos deben efectuarse con la regla de cálculo.

Escala logarítmica. La construcción de la regla de cálculo está basada en la escala logarítmica y es la siguiente. En un eje, respecto

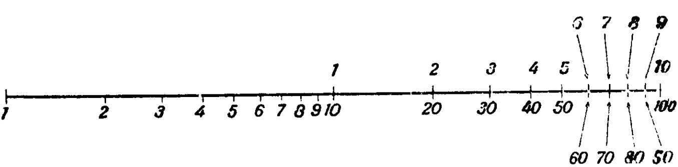



Fig. 65

de cierta escala, se marcan desde el punto inicial segmentos iguales a los logaritmos decimales de una serie de números (fig. 65). Si ya se ha marcado el lg $a$, entonces en el punto correspondiente se pone la anotación $a$ (fig. 66). En el punto inicial debe figurar la marca 1 ($\lg 1 = 0$). De esta manera, en la escala logarítmica, la distancia desde la marca 1 hasta la marca $a$ es igual a $\lg a$, en la escala elegida. Como $\lg(10a) = 1+\lg a$, las marcas según la escala logarítmica en la parte desde 10 hasta 100 corresponderán exactamente a las marcas en la parte desde 1 hasta 10, para los números 10 veces menores. Este mismo razonamiento puede aplicarse también a otras partes de la escala. Por esto, una parte de la escala de longitud de una unidad de la escala puede

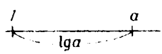



Fig. 66

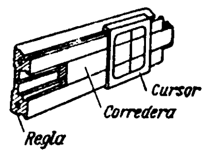



Fig. 67

servir para la representación de toda la escala logarítmica infinita. En esta parte de la escala a los números que tengan una misma constitución numérica, es decir que se diferencien en el factor $10^n$ (por ejemplo: 7,15; 0,0715; 71 500) les corresponderá una misma marca.

ESCALAS DE LA REGLA. La regla de cálculo está formada por *la regla*, *la corredera* que se desliza por las ranuras de la regla y por *el cursor*, que es un cuadro con un cristal en el cual están marcadas una o tres líneas visores (fig. 67). En la regla y en los dos lados de la corredera se han puesto escalas. Estas escalas las designaremos $A$, $B$, $C$, $D$, $I$, $K$, $L$ (fig. 68); en algunos tipos de reglas las escalas $I$ y $K$ no existen y la escala $L$ está en la parte opuesta de la corredera. Antes de calcular con la regla de cálculo, *es necesario estudiar sus escalas*.

Las escalas $A$, $B$, $C$, $D$, $I$, $K$ son logarítmicas. Para las escalas $C$, $D$ e $I$ la unidad de escala es igual a 25 cm; además, en contraposición con las escalas restantes, la dirección positiva de la escala $I$ se toma hacia la izquierda. Para las escalas $A$ y $B$ la unidad de escala es igual a 12,5 cm y para la escala $K$ es $8^1/_3$ cm, por lo cual estas escalas tienen en la regla dos ($A$ y $B$) o tres ($K$) partes idénticamente iguales. Las divisiones en todas las escalas logarítmicas no son uniformes y están dadas en diferentes partes con distinto grado de detalles. Para la ubicación en la escala de aquellos números, para los cuales no existen las marcas correspondientes, se supone que entre los límites de una de las divisiones de la escala logarítmica ésta es uniforme, es decir, por ejemplo, que la marca para el número 235 se encuentra en el medio entre las marcas 234 y 236.

La escala $L$ es una escala de graduación uniforme con divisiones que distan entre sí el 0,002 de la unidad (la longitud 25 cm se ha tomado por unidad).

En el lado opuesto de la corredera (fig. 69) se han puesto las escalas logarítmicas de las funciones trigonométricas: $T$ o $Tg$ (tangente), $S$ o $Sin$ (seno) y $S$ & $T$ (seno y tangente). En la escala $T$ la distancia desde el punto inicial hasta la marca $T°$ es igual a lg tg $T°$, además se toma por unidad de escala 25 cm. En el punto inicial yace la marca 45° (lg tg 45° = = 0). Como el lg tg $T° < 0$ para $T° < 45°$, las marcas correspondientes deben estar situadas a la izquierda del punto inicial (fig. 70). La parte de la escala $T$ colocada en la corredera corresponde a los valores del lg tg $T°$ comprendidos entre $-1$ y 0 que corresponden a los ángulos que se encuentran entre 5° 43′ (tg 5° 43′ = 0,1) y 45°. Análogamente, en la escala $S$ la distancia desde el punto inicial (con marca 90°) hasta la marca $S°$, es igual a lg sen $S°$. Para $S° < 90°$, las marcas correspondientes están situadas a la izquierda del punto inicial (fig. 71), ya que lg sen $S° < 0$. La parte de la escala $S°$ que hay en la corredera abarca los ángulos desde 5° 44′ hasta 90° (sen 5° 44′ = 0,1). Para los ángu-

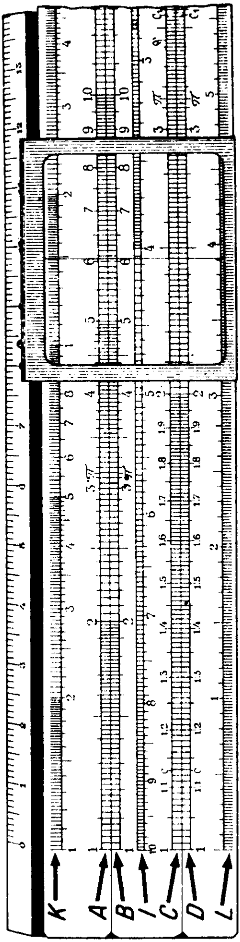



Fig. 68

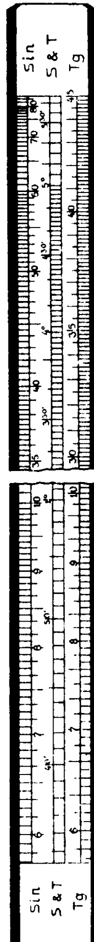



Fig. 69

los menores que 5° 44′ entre los límites de la exactitud de la regla, los valores del seno y de la tangente coinciden y la escala $S$ & $T$ representa la parte común de las escalas lg tg $T°$ y lg sen $S°$ para los ángulos comprendidos entre 0° 35′ y 5° 44′. Para estos ángulos el seno y la tangente varían desde 0,01 hasta 0,1 (en algunos tipos de reglas la escala $S$ está

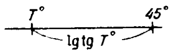



Fig. 70

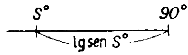



Fig. 71

puesta con una unidad de graduación igual a 12,5 cm; entonces la escala abarca los ángulos desde 0° 35′ hasta 90°; en este caso los esquemas de los cálculos con la escala $S$ dados más abajo deben ser rehechos.

Reglas de los cálculos. El proceso de los cálculos consiste en poner uno frente a otro, dos números de diferentes escalas de la regla y de la corredera y en leer el resultado en una escala frente a un cierto número de la otra. Estas operaciones se realizan mediante el cursor. Más abajo se dan unos esquemas en los cuales se efectúan cálculos muy sencillos con la regla de cálculo.

*Reglas generales*. 1) La regla de cálculo sólo da las cifras significativas del resultado, para el cual debe ser establecido además el orden decimal (el lugar de la coma). Para esto, lo mejor de todo es hacer un cálculo mental aproximado que evalúe el orden del resultado. 2) Al hacer cálculos complicados, los resultados intermedios no se leen, sino que se fijan solamente con la línea del visor del cursor. Por esto los esquemas se deben elegir de tal modo que el resultado de cada una de las operaciones o del grupo de operaciones se lea en la regla y no en la corredera. 3) Si el resultado del cálculo debe ser leído en la regla, frente a la marca *a* de la corredera, la cual ha salido fuera de los límites de la regla, se debe hacer un *desplazamiento* de la corredera; la línea de visor del cursor se pone frente al punto extremo de la corredera que yace en los límites de la regla y la corredera se desplaza de tal forma que frente a la línea del visor se sitúe el otro extremo de la misma escala de la corredera (fig. 72). Entonces la marca pedida *a* se encuentra en los límites de la regla y el resultado puede ser leído.

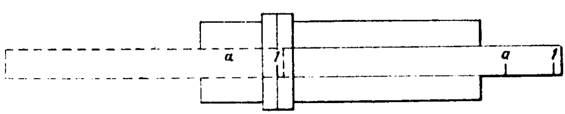
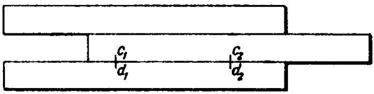



Fig. 72

ESQUEMAS. En los esquemas sólo tiene importancia la posición de las marcas una frente a otra, pero no la situación relativa de los diferentes pares de marcas. La corredera se puede deslizar tanto a la derecha como a la izquierda.

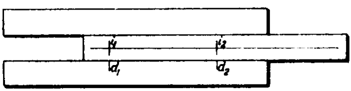
*Multiplicación, división, proporciones*

I



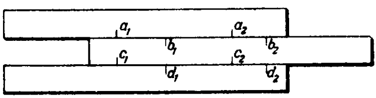

$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2}$.
Si $c_1 = 1$, entonces
$d_1 = \frac{d_2}{c_2}$.

II



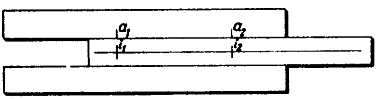

$i_1 d_1 = i_2 d_2$.
Si $i_1 = 1$, entonces
$d_1 = i_2 d_2$,

III



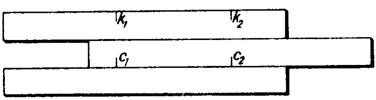

$$\frac{a_1}{c_1^2} = \frac{a_2}{c_2^2} = \frac{d_1^2}{b_1} = \frac{d_2^2}{b_2}.$$

IV



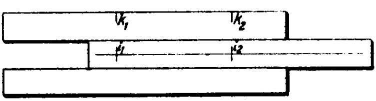

$a_1 i_1^2 = a_2 i_2^2$.

V



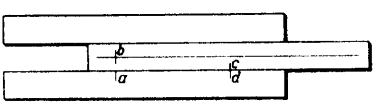

$$\frac{k_1}{c_1^3} = \frac{k_2}{c_2^3}.$$

VI



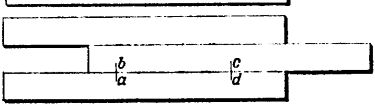

$k_1 i_1^3 = k_2 i_2^3$.

VII




$d = abc; \quad a = \frac{d}{bc}$.

VIII

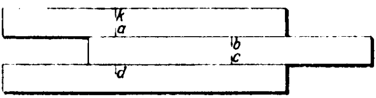



$d = \frac{ac}{b}$.

Para la multiplicación y división se emplean generalmente los esquemas I y II. Los esquemas III – VI permiten efectuar inmediatamente la multiplicación y la división por el cuadrado o el cubo de un número dado. Los esquemas VII y VIII se aplican para las operaciones combinadas. En los cálculos que contienen varias multiplicaciones y divisiones se deben aplicar varias veces los esquemas VII y VIII. Por ejemplo, el cálculo según la fórmula $\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e\cdot f\cdot g}$ se efectúa en tres etapas: dos veces por el esquema VIII y una vez por el esquema VII: $\frac{a\cdot b}{d}\cdot\frac{c}{e}\cdot\frac{1}{f\cdot g}$

*Elevación a potencia y extracción de raíz*

IX

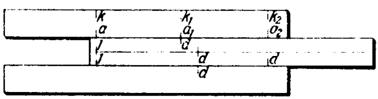



$a = d^2;\ b = c^2;\ k = d^3.$

$d = \sqrt{a};\ d = \sqrt[3]{k};$

$k = \sqrt{a^3}.$

X




$a = d^4;\ a_1 = d^5;\ k = d^6;$

$a_2 = d^6;\ k_1 = d^{7,5};$

$k_2 = d^9.$

Los cálculos según el esquema IX se efectúan sólo mediante el visor. Por este mismo esquema se efectúan la extracción de la raíz cuadrada y cúbica. En este caso, el subradical debe ser dividido desde la coma en grupos de dos o tres cifras (véase pág. 20) y según sea la cantidad de cifras significativas en el primer grupo de la izquierda no nulo se

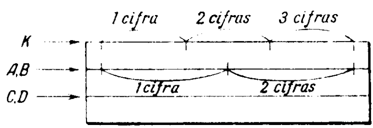
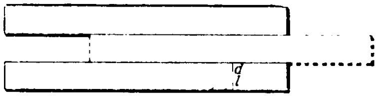



Fig. 73

determina la situación del subradical en la escala $A$ o $K$ (fig. 73). Por ejemplo, para el cálculo de $\sqrt{3'75}$ el número 3′ 75 se pone en la primera mitad de la escala A; para el cálculo de $\sqrt[3]{0{,}000'05}$, el número 0,000′050 se pone en la segunda parte de la escala K.

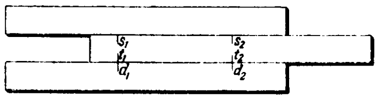
## *Cálculo de logaritmos*

XI 


$l = \lg d.$

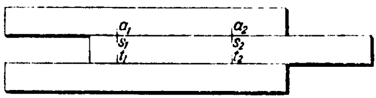
Los cálculos según el esquema XI se efectúan mediante el visor; la corredera no se emplea.

La escala $L$ da sólo la mantisa del logaritmo. La característica se halla según las reglas habituales (véase pág. 151).

XII 

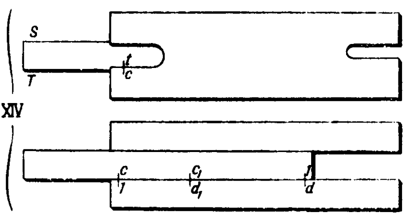

a) $\dfrac{\operatorname{tg} t_1^\circ}{d_1} = \dfrac{\operatorname{tg} t_2^\circ}{d_2}$;

b) $\dfrac{\operatorname{sen} s_1^\circ}{d_1} = \dfrac{\operatorname{sen} s_2^\circ}{d_2}$ *.

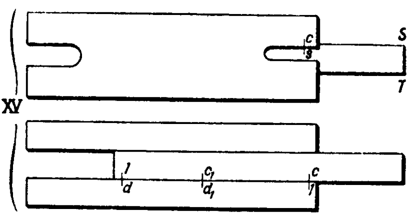
XIII 


a) $\dfrac{a_1}{\operatorname{tg}^2 t_1^\circ} = \dfrac{a_2}{\operatorname{tg}^2 t_2^\circ}$;

b) $\dfrac{a_1}{\operatorname{sen}^2 s_1^\circ} = \dfrac{a_2}{\operatorname{sen}^2 s_2^\circ}$ *.

XIV 


$$\begin{cases} c = \operatorname{tg} t^\circ; \quad d = \operatorname{ctg} t^\circ; \\ \dfrac{c_1}{d_1} = \operatorname{tg} t^\circ. \end{cases}$$

XV 

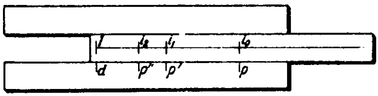

$$\begin{cases} c = \operatorname{sen} s^\circ; \quad d = \dfrac{1}{\operatorname{sen} s^\circ}\text{*}; \\ \dfrac{c_1}{d_1} = \operatorname{sen} s^\circ\text{*}. \end{cases}$$

* Este esquema no es válido para las reglas cuya graduación de la escala $S$ es igual a 12,5 cm. Véase la pág. 136.

Los cálculos según los esquemas XII y XIII se efectúan con la corredera puesta del lado inverso. Algunos cálculos con cantidades trigonométricas pueden ser efectuados sin dar la vuelta a la corredera. En este caso, las colocaciones de las marcas en las escalas $S$ y $T$ se efectúan mediante las rayitas que hay en las ranuras del lado inverso de la regla (esquemas XIV y XV).

### *Signos especiales*

Conversión de grados a radianes y viceversa:

XVI 

$\rho^\circ = 57{,}30;$
$\rho' = 3438;$
$\rho'' = 206265.$

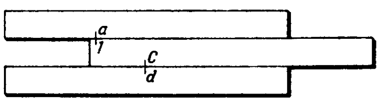
$$d^\circ = i_0 \text{ rad} \left(= \frac{d^\circ}{\rho^\circ} \text{ rad}\right); \qquad d' = i_1 \text{ rad} \left(= \frac{d'}{\rho'} \text{ rad}\right);$$

$$d'' = i_2 \text{ rad} \left(= \frac{d''}{\rho''} \text{ rad}\right)$$

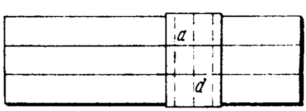
(por ejemplo: $15^\circ = 0{,}262$ radianes, $15' = 0{,}00436$ radianes, $15'' =$ $= 0{,}0000727$ radianes).

En lugar del esquema XVI se puede emplear también el esquema I.

Area del círculo (esquema XVII):

XVII 

$$C = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}1248; \qquad a = \left(\frac{d}{C}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

XVIII 

Si en el cursor están colocadas tres líneas visores, el área del círculo se halla sin ayuda de la corredera, según el esquema XVIII.

# II. ÁLGEBRA

## A. TRANSFORMACIONES DE IDENTIDADES

### *1. Conceptos fundamentales*

DEFINICIONES. Se llama *expresión algebraica* a una o varias cantidades algebraicas (números o letras) que están unidas entre sí por los signos de las operaciones algebraicas ($+, -, \cdot, \sqrt{}$, etc.) y por los signos del orden de sucesión de estas operaciones (diferentes tipos de paréntesis). Se llama *identidad* a la igualdad de dos expresiones algebraicas que es válida para **cualesquiera** valores que se pongan en lugar de las letras que figuran en ella; si la misma igualdad sólo es válida cuando se reemplazan algunos valores determinados, entonces se llama *ecuación.**

*Transformación de una identidad* es la obtención de una expresión algebraica de otra, idénticamente igual a ella; la cual puede realizarse de diferentes maneras, según sea el fin de la transformación y esto siempre se debe tener en cuenta. Por ejemplo, el dar a la expresión una forma más reducida y más cómoda para el reemplazo de las letras por sus valores numéricos o para las transformaciones posteriores: reducción de la expresión a una forma más cómoda para la resolución de ecuaciones, el cálculo de logaritmos, diferenciación, integración, etc.

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS. En cada uno de los casos se toman unas cantidades literales como *básicas* con respecto a las cuales se hace la clasificación; las cantidades no básicas (las letras restantes) se llaman *parámetros* de la expresión. La expresión pertenece a una u otra clase según sean las operaciones que se efectúan con las cantidades básicas contenidas en ella. En las expresiones *racionales enteras* sólo se efectúan con las cantidades básicas las operaciones de sumar, restar y multiplicar (incluyendo en ésta, la elevación a potencia entera positiva); en las expresiones *racionales fraccionarias* se incluye

---

* Véase en las págs. 152-178 lo referente a las ecuaciones.

(además de las operaciones consideradas) la división por cantidades básicas* (o la elevación a potencia de exponente negativo); en las expresiones *irracionales* se agrega la extracción de raíz de cantidades básicas** (elevación a potencia de exponente fraccionario); en las expresiones *exponenciales*, la elevación a una potencia que contiene cantidades básicas***; en *las logarítmicas*, el cálculo logarítmico de cantidades básicas***.

En los ejemplos que se dan a continuación las cantidades básicas están designadas con las últimas letras del alfabeto ($x$, $y$, $z$, ...) y los parámetros por las letras iniciales del mismo ($a$, $b$, $c$, ...) o por las intermedias ($m$, $n$, $p$, ...), donde las letras intermedias toman sólo valores enteros positivos.

## 2. *Expresiones racionales enteras*

EXPRESIÓN EN FORMA DE POLINOMIO. Toda función racional entera se puede expresar en forma de polinomio mediante transformaciones elementales (reducción de términos semejantes, suma, resta y multiplicación de monomios y polinomios).

*Ejemplo:*

$$(-a^3+2a^2x-x^3)(4a^2+8ax)+(a^3x^2+2a^2x^3-4ax^4)-$$
$$-(a^5+4a^3x^2-4ax^4) = -4a^5+8a^4x-4a^2x^3-8a^4x+16a^3x^2-8ax^4+$$
$$+a^3x^2+2a^2x^3-4ax^4-a^5-4a^3x^2+4ax^4 =$$
$$= -5a^5+13a^3x^2-2a^2x^3-8ax^4.$$

DESCOMPOSICIÓN DE UN POLINOMIO EN FACTORES. En muchos casos un polinomio se puede expresar como un producto de factores (de monomios y polinomios), ya sea sacando factor común, o mediante la agrupación, la aplicación de fórmulas de multiplicación y división abreviadas o la aplicación de las propiedades de la ecuación.

*Ejemplos:*

1) Extraer factor común:

$$8ax^2y-6bx^3y^2+4cx^5 = 2x^2(4ay-3bxy^2+2cx^3).$$

---

* Como también la división por expresiones racionales enteras de cantidades básicas.

** Como también de las expresiones racionales enteras o fraccionarias de cantidades básicas.

*** Como también las expresiones racionales e irracionales de cantidades básicas.

2) Agrupación:

$$6x^2+xy-y^2-10xz-5yz = \underline{6x^2+3xy}-\underline{2xy-y^2}-\underline{10xz-5yz} =$$

$$= 3x(2x+y)-y(2x+y)-5z(2x+y) = (2x+y)(3x-y-5z).$$

3) Utilización de las propiedades de las ecuaciones algebraicas*. $P(x) = x^6-2x^5+4x^4+2x^3-5x^2$. a) Sacamos el factor común $x^2$. b) Establecemos que los números $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -1$ son raíces de la ecuación $P(x) = 0$. Dividiendo $P(x)$ por $x^2(x-1)(x+1) = x^4-x^2$, obtenemos en el cociente $x^2-2x+5$. En esta expresión $p = -2$, $q = 5$, $(p/2)^2-q < 0$, por lo cual $P(x)$ no puede ser descompuesto en más factores reales. En consecuencia:

$$x^6-2x^5+4x^4+2x^3-5x^2 = x^2(x-1)(x+1)(x^2-2x+5).$$

Fórmulas de multiplicación y división abreviadas

$$(x\pm y)^2 = x^2\pm 2xy+y^2,$$

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz,$$

$$(x+y+z+\ \dots\ +t+u)^2 = x^2+y^2+z^2+\ \dots\ +t^2+u^2+$$
$$+2xy+2xz+\ \dots\ +2xu+2yz+\ \dots\ +2yu+\ \dots\ +2tu,$$

$$(x\pm y)^3 = x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3,$$

$(x\pm y)^n$ se calcula por la fórmula de Newton (véase pág. 187).

$$(x+y)(x-y) = x^2-y^2,$$

$$(x^n-y^n):(x-y) = x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ \dots\ +xy^{n-2}+y^{n-1},$$

$$(x^n+y^n):(x+y) = x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ \dots\ -xy^{n-2}+y^{n-1}$$

(¡sólo para $n$ impar!)

$$(x^n-y^n):(x+y) = x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ \dots\ +xy^{n-2}-y^{n-1}$$

(¡sólo para $n$ par!)

Determinación del máximo común divisor de dos polinomios. Dos polinomios $P(x)$ (de potencia $n$-ésima) y $Q(x)$ (de potencia $m$-ésima) ($n \geqslant m$) pueden tener factores comunes que contengan $x$; el producto de estos factores se llama *máximo común divisor* de los polinomios dados. Si $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, entonces éstos se llaman *primos entre sí* (su máximo común divisor = const).

---

* Véase pág. 158.

El máximo común divisor de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se puede encontrar, sin conocer su descomposición en factores de la siguiente manera *(algoritmo de Euclides)*:

1) Se divide $P(x)$ por $Q(x)$; el cociente es $T_1(x)$ y el resto es $R_1(x)$:

$$P(x) = Q(x)\cdot T_1(x)+R_1(x).$$

2) Se divide $Q(x)$ por $R_1(x)$; el cociente es $T_2(x)$ y el resto es $R_2(x)$:

$$Q(x) = R_1(x)\cdot T_2(x)+R_2(x)$$

etc. El último resto $R_k(x)$ que es distinto de cero, es el máximo común divisor de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

La determinación del máximo común divisor se aplica para la resolución de ecuaciones (véase en la pág. 160 la separación de las raíces múltiples; en la pág. 160 la aplicación del método de Sturm, en las págs. 394-396, la integración según el método de Ostrogradski y en algunos otros problemas).

## 3. *Expresiones racionales fraccionarias*

REDUCCIÓN A LA FORMA MÁS SIMPLE. Toda expresión racional fraccionaria se puede transformar en la razón de dos polinomios sin factores comunes mediante transformaciones elementales (sumas, restas, multiplicaciones de polinomios y fracciones y simplificación de fracciones).

*Ejemplo:* Transformar a la forma más simple:

$$\frac{3x+\dfrac{2x+y}{z}}{x\left(x^2+\dfrac{1}{z^2}\right)}-y^2+\frac{x+z}{z} = \frac{(3xz+2x+y)z^2}{(x^2z^2+x)z}+$$

$$+\frac{-y^2z+x+z}{z} = \frac{3xz^3+2xz^2+yz^2+(x^3z^2+x)(-y^2z+x+z)}{x^3z^3+xz} =$$

$$= \frac{3xz^3+2xz^2+yz^2-x^3y^2z^3-xy^2z+x^4z^2+x^2+x^3z^3+xz}{x^3z^3+xz}.$$

SEPARACIÓN DE LA PARTE ENTERA. La razón de dos polinomios con la cantidad básica común $x$ se llama *fracción algebraica propia*, si el grado $m$ del término superior* del numerador es menor que el grado $n$ del término superior del denominador, y se llama *impropia* si $m \geqslant n$. Toda fracción impropia se puede transformar en la suma de un polinomio y una fracción propia, mediante *la separación de la parte entera* (división de un polinomio por un polinomio).

---

* Es decir, del término que contiene la potencia superior de $x$.

*Ejemplo:* Separar la parte entera de

$$R(x) = \frac{3x^4 - 10ax^3 + 22a^2x^2 - 24a^3x + 10a^4}{x^2 - 2ax + 3a^2}$$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -10ax^3 & +22a^2x^2 & -24a^3x & +10a^4 & x^2 - 2ax + 3a^2 \\ \cline{6-6}
3x^4 & -6ax^3 & +9a^2x^2 & & & 3x^2 - 4ax + 5a^2 \\ \cline{1-5}
 & -4ax^3 & +13a^2x^2 & -24a^3x & & \\
 & -4ax^3 & +8a^2x^2 & -12a^3x & & \\ \cline{2-5}
 & & 5a^2x^2 & -12a^3x & +10a^4 & \\
 & & 5a^2x^2 & -10a^3x & +15a^4 & \\ \cline{3-5}
 & & & -2a^3x & -5a^4 &
\end{array}$$

$$R(x) = 3x^2 - 4ax + 5a^2 + \frac{-2a^3x - 5a^4}{x^2 - 2ax + 3a^2}.$$

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES. Toda fracción propia *irreductible**

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n},$$

donde los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_m, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son ciertos números **reales**, (el coeficiente del término superior del denominador se hace igual a 1 al dividir el numerador y el denominador por el mismo) puede ser transformada de una manera única en una suma de fracciones *simples* de la forma $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ o $\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^l}$, donde $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$. De este modo, pueden presentarse cuatro casos**:

1) El denominador $P(x)$ es tal que la ecuación $P(x) = 0$ tiene sólo las raíces reales simples*** $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. La descomposición se realiza mediante la fórmula:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m + \ldots + b_m}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)} = \frac{A}{x-\alpha_1} + \frac{B}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{C}{x-\alpha_n},$$

donde los coeficientes $A, B, \ldots, C$ se determinan por las fórmulas

$$A = \frac{Q(\alpha_1)}{P'(\alpha_1)}, \quad B = \frac{Q(\alpha_2)}{P'(\alpha_2)}, \ldots \quad C = \frac{Q(\alpha_n)}{P'(\alpha_n)}$$

---

* O sea, tal que su numerador y denominador no tienen factores comunes que contengan a $x$.

** Si no nos limitamos sólo a los números reales, entonces el caso 3) no se diferenciará del caso 1) y el caso 4) del caso 2). Desde este punto de vista, toda fracción $R(x)$ sólo se puede transformar en una suma de fracciones simples de la forma $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, siendo $A$ y $\alpha$ números complejos. Esto se emplea en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales (véase pág. 527).

*** Véase la pág. 158 lo referente a la multiplicidad de raíces.

(en los denominadores figuran los valores de la derivada $\frac{dP}{dx}$ para $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$, ...).

*Ejemplo:* $\frac{6x^2-x+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = +1$ y $\alpha_3 = -1$; $Q(x) = 6x^2-x+1$; $P'(x) = 3x^2-1$; $A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = -1$, $B = \frac{Q(1)}{P'(1)} = 3$ y $C = \frac{(Q-1)}{P'(-1)} = 4$; $\frac{Q(x)}{P(x)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1}$.

Otro procedimiento para la determinación de $A$, $B$, ..., $C$ es *el método de los coeficientes indeterminados* (que es aplicable a los cuatro casos).

*Ejemplo:*

$$\frac{6x^2-x+1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1)\;Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x^2-1)}.$$

Identificando los coeficientes de las potencias iguales de $x$ de los numeradores de ambos miembros de la igualdad, se obtiene el sistema de ecuaciones: $6 = A+B+C$, $-1 = B-C$, $1 = -A$; resolviéndolo, encontramos para $A$, $B$ y $C$ los mismos valores que hemos hallado anteriormente.

2) Las raíces del denominador son reales, pero entre ellas hay múltiples. La descomposición se efectúa según la fórmula:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_i)^{k_i}} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-\alpha_2} + \frac{B_2}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \ldots + \frac{L_{k_i}}{(x-\alpha_i)^{k_i}}.$$

*Ejemplo:* $\frac{x+1}{x(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}$; los coeficientes $A_1$, $B_1$, $B_2$ y $B_3$ se hallan por el método de los coeficientes indeterminados.

3) Entre las raíces del denominador hay complejas simples. La des composición se efectúa según la fórmula:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)(x^2+p_2x+q_2)\ldots} =$$
$$= \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{Dx+E}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{Fx+G}{x^2+p_2x+q_2} + \ldots$$

*Ejemplo:* $\frac{3x^2-2}{(x^2+x+1)(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$. Los coeficientes $A$, $D$, $E$ se hallan por el método de los coeficientes indeterminados.

4) Entre las raíces del denominador hay complejas múltiples. La descomposición se realiza mediante la fórmula:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}{(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots}=$$

$$=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{(x-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{D_1x+E_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{D_{l_1}x+E_{l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}+\frac{F_1x+G_1}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots+\frac{F_{l_2}x+G_{l_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}}+\ldots$$

*Ejemplo:* $\frac{5x^2-4x+16}{(x-3)(x^2-x+1)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{D_1x+E_1}{x^2-x+1}+\frac{D_2x+E_2}{(x^2-x+1)^2}$. $A$, $D_1$, $E_1$, $D_2$, $E_2$ se hallan por el método de los coeficientes indeterminados.

**Transformación de proporciones.** De la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, se deducen igualdades $ad=bc$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, y también *las proporciones derivadas:*

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\qquad \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c},\qquad \frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d},\qquad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

De la igualdad de varias razones $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ se deduce que

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}.$$

## 4. *Expresiones irracionales; transformación de potencias y raíces*

**Reducción a la forma normal.** Toda expresión irracional se puede reducir a la llamada forma *normal*: 1) reduciendo el índice de la raíz, 2) sacando fuera del signo de la raíz, 3) racionalizando el denominador.

*La reducción del índice de la raíz* se efectúa simplificando por el máximo común divisor del índice de la raíz y de los exponentes de **todos** los factores que yacen bajo el signo radical (previamente, la expresión subradical se descompone en factores).

*Ejemplo:* $\sqrt[6]{16(x^{12}-2x^{11}+x^{10})}=\sqrt[6]{4^2\cdot x^{5\cdot 2}(x-1)^2}=\sqrt[3]{4x^5(x-1)}$.

Se pueden *sacar fuera del signo de la raíz* aquellos factores $X$ cuyos exponentes $m$ son mayores o iguales al índice $n$ de la raíz. Entonces $m$ se divide por $n$ y $X$ se saca fuera de la raíz con el exponente **del cociente,** quedando la cantidad subradical con el exponente **del residuo** de esta división.

*Ejemplo:* $\sqrt[3]{32x^4y^6z^{10}u^2} = 2xy^2z^3\sqrt[3]{4xzu^2}$.

***La racionalización del denominador*** se efectúa de maneras distintas.

*Ejemplos:*

1) $\sqrt{\dfrac{x}{2y}} = \sqrt{\dfrac{2xy}{4y^2}} = \dfrac{\sqrt{2xy}}{2y}$;

2) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{4yz^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2xy^2z}{8y^3z^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{2xy^2z}}{2yz}$;

3) $\dfrac{1}{x+\sqrt{y}} = \dfrac{x-\sqrt{y}}{(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})} = \dfrac{x-\sqrt{y}}{x^2-y}$;

4) $\dfrac{1}{x+\sqrt[3]{y}} = \dfrac{x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{\left(x+\sqrt[3]{y}\right)\left(x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}\right)} = \dfrac{x^2-x\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}{x^3+y}$,

*Ejemplo:* Reducir a la forma normal

$$\sqrt[4]{\frac{81x^6}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^4}} = \sqrt{\frac{9x^3}{(\sqrt{2}-\sqrt{x})^2}} = \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} = \frac{3x\sqrt{x}(\sqrt{2}+\sqrt{x})}{2-x} =$$
$$= \frac{3x\sqrt{2x}+3x^2}{2-x}.$$

TRANSFORMACIÓN DE POTENCIAS Y RAÍCES.

$x^mx^n = x^{m+n}$; $\quad \dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$; $\quad (xy)^n = x^ny^n$; $\quad \left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$;

$(x^m)^n = x^{mn}$. $(\ast)$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}; \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{y}}{\sqrt[n]{y}};$$

$$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n]{x}.$$

GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE EXPONENTE. Por convención se considera que:

$$x^0 = 1, \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad x^{1/n} = \sqrt[n]{x}, \quad x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}, \quad x^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}.$$

Para los exponentes nulos negativos y fraccionarios son válidas las mismas fórmulas de transformaciones $(\ast)$ que para los exponentes positivos enteros; esto permite frecuentemente simplificar los cálculos.

*Ejemplo:*

$$(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[12]{x^7})(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}-\sqrt[12]{x^5}) =$$
$$= (x^{1/2}+x^{2/3}+x^{3/4}+x^{7/12})(x^{1/2}-x^{1/3}+x^{1/4}-x^{5/12}) =$$
$$= x+x^{7/6}+x^{5/4}+x^{13/12}-x^{5/6}-x-x^{13/12}-x^{11/12}+$$
$$+x^{3/4}+x^{11/12}+x+x^{5/6}-x^{11/12}-x^{13/12}-x^{7/6}-x =$$
$$= x^{5/4}-x^{13/12}-x^{11/12}+x^{3/4} = \sqrt[4]{x^5}-\sqrt[12]{x^{13}}-\sqrt[12]{x^{11}}+\sqrt[4]{x^3}.$$

## 5. Expresiones exponenciales y logarítmicas

La transformación de expresiones exponenciales de la forma $a^x$ se efectúa por fórmulas análogas a (∗):

$$a^x a^y = a^{x+y};\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};\quad (a^x)^y = a^{xy};\quad \sqrt[y]{a^x} = a^{x/y};$$

en este caso $x$ e $y$ pueden tomar cualesquiera valores numéricos. Las expresiones exponenciales en cuyas bases figuran cantidades distintas: $a^x$, $b^y$, $c^z$, . . ., se pueden transformar en expresiones con bases comunes, empleando la identidad $b = a^{\log_a b}$.

*Ejemplo:* Representar $(a^x b^y) : c^z$ en forma de una potencia de $a$.

$$\frac{a^x b^y}{c^z} = \frac{a^x a^{y \log_a b}}{a^{z \log_a c}} = a^{x+y\log_a b - z\log_a c}.$$

Toda expresión que no contenga suma ni resta de potencias se puede reducir a semejante forma.

La expresión $e^x$, en que $e$ es la base de los logaritmos naturales (véase más abajo), se designa a veces exp $(x)$.

LOGARITMOS. Logaritmo $A$ de base $a$ del número $N$ (se designa $A = \log_a N$) se llama el exponente de la potencia a que se debe elevar $a$ para obtener $N$. Por consiguiente, de la igualdad $a^A = N$ se deduce que $\log_a N = A$ y, recíprocamente, de la segunda igualdad se deduce la primera.

Todo número *positivo* tiene su logaritmo para cualquier base positiva (a excepción de la unidad); los logaritmos de los diferentes números para una misma base $a$, forman *un sistema de logaritmos* en esta base. Conociendo los logaritmos de los números en una cierta base $a$, se pueden determinar los logaritmos de estos números en otra base $b$ según la fórmula

$$\log_b N = M \cdot \log_a N, \quad \text{donde} \quad M = \frac{1}{\log_a b} \quad \textit{(módulo de conversión)}^*.$$

* Es conveniente emplear la siguiente fórmula, que es fácil de recordar: $\log_a N = \frac{\log N}{\log a}$, en que en el segundo miembro figuran los logaritmos en cualquier (en una misma) base.

*Propiedades fundamentales de los logaritmos* en una misma base $a$ ($a \neq 1$):

$$\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1; \quad \log_a 0 = \begin{cases} -\infty & \text{si } a > 1, \\ +\infty & \text{si } a < 1; \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \log(N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2; & \log \frac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2; \\ \log(N^n) = n \log N; & \log \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log N. \end{array}\right\} \quad (* \, *)$$

Se llama *logaritmación* de una cantidad dada a la búsqueda de su logaritmo*; la búsqueda de la cantidad por su logaritmo se llama *potenciación.*

*Sistemas de logaritmos empleados: los decimales o de Briggs* de base 10 se aplican generalmente en los cálculos (designación: $\log_{10} N = \lg N$), y *los naturales* o *neperianos (hiperbólicos)* de base $e = 2{,}71828 \ldots$** (la designación es: $\log_e N = \ln N$).

Módulo de conversión de los logaritmos naturales a decimales:

$$M = \lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43429; \quad \lg N = 0{,}43429 \ln N.$$

Módulo de conversión de los logaritmos decimales a naturales:

$$M_1 = \frac{1}{M} = \ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2{,}30259; \quad \ln N = 2{,}30259 \lg N.$$

*Propiedades de los logaritmos decimales.* Los logaritmos decimales se anotan en forma de fracciones decimales con exactitud hasta de una cifra decimal determinada; su parte entera se llama *característica* del logaritmo y la fraccionaria *mantisa*, por ejemplo: $\lg 324 = 2{,}5105$; la característica es igual a 2 y la mantisa es 0,5105. Los números que se obtienen del dado multiplicando o dividiendo por $10^n$ (por ejemplo: 3240; 324 000; 3,24; 0,0324 se obtienen de 324), tienen logaritmos decimales con igual mantisa (0,5105). La mantisa se busca en *la tabla de logaritmos****, sin atender a la posición de la coma y a la cantidad de ceros que tenga el número a la derecha y a la izquierda. La característica se determina por la regla: 1) si el número es $> 1$, la característica es

* Se llama logaritmación a la transformación de las expresiones logarítmicas según las fórmulas ($* \, *$), o sea, a la expresión del logaritmo de una expresión compleja mediante los logaritmos de las cantidades que figuran en dichas expresiones (véase pág. 151).

** Véanse en la pág. 324 la definición del número $e$.

*** Véanse en las págs. 49-50 las tablas de logaritmos decimales (más exactamente, las tablas de mantisas); véanse en las págs. 51-52 las tablas de antilogaritmos (es decir, de los números según las mantisas dadas); véanse en las págs. 63-65 las tablas de logaritmos naturales.

igual al número de sus cifras que yacen ante la coma menos una unidad, 2) si el número es $< 1$, la característica es negativa y es igual en valor absoluto al número de ceros que hay a la izquierda, incluyendo el cero de los enteros. *Por ejemplo:* lg 3240 = 3,5105; lg 324 000 = 5,5105; lg 3,24 = 0,5105; lg 0,0324 = $\bar{2}$,5105. El signo «–» se pone *sobre* la característica, puesto que la mantisa es positiva; tal forma *artificial* "incompleta" del logaritmo negativo se puede transformar en "completa" por las reglas: 1) el valor absoluto de la característica del logaritmo negativo incompleto es una unidad mayor que el valor absoluto de la característica del logaritmo negativo completo; 2) las cifras de la mantisa se completan hasta 9 y su última cifra significativa (que no es cero) hasta 10; los ceros del final quedan en el mismo lugar.

*Ejemplos:* $\bar{2},5105 = -1,4895$; $-3,2780 = \bar{4},7220$.

Frecuentemente (especialmente en las tablas), para evitar los signos diacríticos, se agrega el número 10 al logaritmo negativo incompleto. Por ejemplo, en lugar de $\bar{1}$,324 se escribe 9,324.

LA TRANSFORMACIÓN DE LAS EXPRESIONES LOGARÍTMICAS (LOGARITMACIÓN) se efectúa según las formulas( ✻ ✻ )*.

*Ejemplo:* Calcular el logaritmo de la expresión $\dfrac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}$.

$$\log\frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3} = \log(3x^2\sqrt[3]{y}) - \log(2zu^3) =$$
$$= \log 3 + 2\log x + 1/3\log y - \log 2 - \log z - 3\log u.$$

Frecuentemente se emplea la transformación inversa, es decir, la representación de una expresión que contiene varios logaritmos de diferentes cantidades en forma del logaritmo de una expresión.

*Ejemplo:*

$$\log 3 + 2\log x + \frac{1}{3}\log y - \log 2 - \log z - 3\log u = \log\frac{3x^2\sqrt[3]{y}}{2zu^3}.$$

Véase en las págs. 133-140 lo referente a la regla de cálculo.

* Para el cálculo logarítmico de expresiones que representan **una suma o una diferencia**, previamente se les debe transformar en expresiones más cómodas para la logaritmación (es decir, que contengan productos y cocientes).

# B. ECUACIONES

## 6. *Transformación de ecuaciones algebraicas a la forma canónica*

DEFINICIÓN. Se llama *ecuación* con una incógnita

$$F(x) = f(x)$$

a la igualdad de dos funciones de una misma cantidad variable, que sólo es válida para ciertos valores determinados de esta variable*. La variable que figura en la ecuación se llama *incógnita* y los valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que la satisfacen se llaman *raíces* o *soluciones* de la ecuación. Dos ecuaciones se llaman *equivalentes* si tienen las mismas raíces.

Una ecuación se llama *algebraica*, si cada una de las funciones contenidas en ella $F(x)$ y $f(x)$ es algebraica (racional o irracional). Una de estas funciones puede ser constante.

De toda ecuación algebraica mediante transformaciones algebraicas puede ser obtenida una ecuación en *forma canónica:*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0^{**}$$

($a_0$ se puede igualar a 1) que tiene las mismas raíces que la dada (y, posiblemente, algunas extrañas, véase más abajo).

El exponente $n$ se llama *grado de la ecuación.*

*Ejemplo:* Transformar a la forma canónica la ecuación

$$\frac{x-1+\sqrt{x^2-6}}{3(x-2)} = 1+\frac{x-3}{x}.$$

Las transformaciones sucesivas dan:

$$x(x-1+\sqrt{x^2-6}) = 3x(x-2)+3(x-2)(x-3);$$

$$x^2-x+x\sqrt{x^2-6} = 3x^2-6x+3x^2-15x+18;$$

$$x\sqrt{x^2-6} = 5x^2-20x+18;$$

$$x^2(x^2-6) = 25x^4-200x^3+580x^2-720x+324;$$

$$24x^4-200x^3+586x^2-720x+324 = 0 \text{ (forma canónica).}$$

Por lo tanto, la ecuación dada es de cuarto grado.

---

* Si la igualdad es válida para cualquier valor de la variable $x$, entonces se llama *identidad.*

** Aquí y en lo sucesivo, los coeficientes $a_0, a_1, \ldots$ se suponen **reales**, a excepción de los casos en que se haga mención especial.

UN SISTEMA DE $n$ ECUACIONES ALGEBRAICAS es un conjunto de $n$ igualdades que son válidas sólo para grupos determinados $(x_1, y_1, \ldots, z_1; x_2, y_2, \ldots, z_2; \ldots)$ de valores de las incógnitas $(x, y, \ldots, z)$; cada uno de tales grupos (todo el conjunto) se llama *solución* de este sistema. Todo sistema de ecuaciones algebraicas puede reducirse a la *forma canónica:*

$$\begin{gathered} P_1(x, y, \ldots) = 0, \\ P_2(x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n(x, y, \ldots) = 0, \end{gathered}$$

donde $P_i$ es un polinomio con respecto a $x, y, z, \ldots$

*Ejemplo:* Reducir a la forma canónica el sistema

$$1)\ \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{1}{z}, \quad 2)\ \frac{x-1}{y-1} = \sqrt{z}, \quad 3)\ xy = z.$$

La forma canónica es:

$$1)\ x^2z^2 - y = 0, \quad 2)\ x^2 - 2x + 1 - y^2z + 2yz - z = 0, \quad 3)\ xy - z = 0.$$

RAÍCES EXTRAÑAS. En la reducción de una ecuación algebraica a la forma canónica $P(x) = 0$ pueden presentarse casos en que $P(x) = 0$ tenga soluciones que no verifiquen a la ecuación inicial. Estos casos son de dos tipos:

I. *Anulación del denominador.* Si la ecuación tiene la forma de fracción

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0, \tag{1}$$

donde $P$ y $Q$ son polinomios, entonces multiplicando ambos miembros de la igualdad por el denominador, obtenemos la ecuación en forma canónica

$$P(x) = 0 \tag{2}$$

cuyas raíces son todas las mismas que la de la ecuación (1), a excepción del caso en que alguna raíz $x = \alpha$ de la ecuación $P(x) = 0$ sea también una raíz de la ecuación $Q(x) = 0$. Entonces la fracción se debe simplificar previamente por $x - \alpha$ [o por $(x - \alpha)^k$, si esto es posible]; en caso contrario, $P(x) = 0$ contendrá la raíz $x = \alpha$, que no es raíz de la ecuación (1) o que es raíz de la ecuación, pero de multiplicidad menor*.

*Ejemplos:*

$$1)\ \frac{x^3}{x-1} = \frac{1}{x-1} \quad \text{o sea} \quad \frac{x^3-1}{x-1} = 0; \tag{1'}$$

* Véanse en la pág 158 el orden de la multiplicidad de la raíz.

si no se simplifica por $x-1$ y se elimina el denominador, entonces resulta la ecuación $x^3-1=0$ cuya raíz $x_1=1$ no verifica la ecuación (1′), ya que su denominador se anula.

2) $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}=0;$ (2′)

si no se simplifica por $(x-1)^2$ y se elimina el denominador, entonces resulta la ecuación $(x-1)^3=0$, que tiene la raíz múltiple de orden tres $x_1=1$, mientras que (2′) tiene la raíz simple $x=1$.

II. *Ecuaciones irracionales*. Si la ecuación dada contiene la incógnita bajo el signo del radical, entonces reduciéndola a la forma canónica, obtenemos una segunda ecuación que a veces puede contener raíces que no verifiquen a la ecuación inicial. Por esto, después de resolver la segunda ecuación se debe hacer la prueba, reemplazando sus raíces en la ecuación inicial.

*Ejemplo:*

$$\sqrt{x+7}+1=2x \quad \text{ó} \quad \sqrt{x+7}=2x-1 \qquad (1'')$$

$$x+7=(2x-1)^2 \quad \text{ó} \quad 4x^2-5x-6=0. \qquad (2'')$$

Las raíces de la ecuación (2″) son: $x_1=2$, $x_2=-\frac{3}{4}$; $x_1$ verifica a la ecuación (1″) y $x_2$ no la verifica (en la ecuación (1″) la raíz se interpreta en el sentido aritmético).

## 7. *Ecuaciones de 1^er^, 2^do^, 3^er^ y 4^to^ grado*

ECUACIÓN DE PRIMER GRADO (ecuación *lineal*). La forma canónica es:

$$ax+b=0.$$

*Número de soluciones:* siempre tiene una solución real $x_1=-\frac{b}{a}$.

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO *(cuadrática)*. La forma canónica es: $ax^2+bx+c=0$ ó (después de dividir por $a$) $x^2+px+q=0$.

*El número de soluciones reales* depende del signo del *discriminante D*, que es igual a $4ac-b^2$ o $q-\frac{p^2}{4}$:

si $D<0$, se tienen dos soluciones (2 raíces reales),
si $D=0$, se tiene una solución (dos raíces iguales)
si $D>0$, se tienen cero soluciones (2 raíces imaginarias).

*Resolución de las ecuaciones cuadráticas. Primer procedimiento.* Es la descomposición en factores (si es posible) del primer miembro de la ecuación:

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) \quad \text{ó} \quad x^2+px+q = (x-\alpha)(x-\beta);$$

as raíces de la ecuación son: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$.

*Ejemplo:* $x^2+x-6 = 0, x^2+x-6 = (x+3)(x-2); x_1 = -3, x_2 = 2.$

*El segundo procedimiento* consiste en la aplicación de fórmulas.

a) Para la forma $ax^2+bx+c = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

(es conveniente emplear la última fórmula, cuando $b$ es par);

b) Para la forma $x^2+px+q = 0$;

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

*Propiedades de las raíces de la ecuación cuadrática:*

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = -p; \quad x_1\cdot x_2 = \frac{c}{a} = q.$$

ECUACIÓN DE TERCER GRADO *(cúbica)*. La forma canónica es:

$$ax^3+bx^2+cx+d = 0$$

o $\left(\text{dividiendo por } a \text{ y reemplazando } x \text{ por la nueva variable } y = x+\frac{b}{3a}\right)$:

$$y^3+3py+2q = 0, \tag{$*$}$$

donde

$$2q = \frac{2b^3}{27a^3}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{d}{a} \quad \text{y} \quad 3p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}.$$

*Número de soluciones reales* de la ecuación ($*$) depende del signo *del discriminante* $D = q^2+p^3$.

si $D > 0$ la ecuación tiene una solución (una real y dos imaginarias);

si $D < 0$ la ecuación tiene tres soluciones (tres raíces reales distintas);

si $D = 0$ la ecuación tiene una solución para $p = q = 0$ (tres raíces nulas iguales) y dos soluciones para $p^3 = -q^2 \neq 0$ (de las tres raíces reales dos son iguales).

*Resolución de las ecuaciones cúbicas. Primer procedimiento* es la descomposición en factores (si es posible) del primer miembro de la ecuación:

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma);$$

las raíces de la ecuación son: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \gamma$.

*Ejemplo:* $x^3+x^2-6x = 0$; $x^3+x^2-6x = x(x+3)(x-2)$; $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$.

*El segundo procedimiento* consiste en la aplicación de *la fórmula de Cardano* [para la forma (✳)]:

$$y_1 = u+v, \quad y_2 = \varepsilon_1 u+\varepsilon_2 v, \quad y_3 = \varepsilon_2 u+\varepsilon_1 v.$$

donde $u = \sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}$, $v = \sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$; $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$ son las raíces de la ecuación $x^2+x+1 = 0$, es decir $\varepsilon_{1,2} = -\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

En el caso $D = q^2+p^3 < 0$, las tres raíces reales de la ecuación se expresan mediante cantidades complejas y es más útil emplear *el tercer* procedimiento.

*Ejemplo:* $y^3+6y+2 = 0$. Aquí $p = 2$, $q = 1$; $q^2+p^3 = 9$; $u = \sqrt[3]{-1+3} = \sqrt[3]{2} = 1{,}2599$, $v = \sqrt[3]{-1-3} = \sqrt[3]{-4} = -1{,}5874$.

La raíz real es: $y_1 = u+v = -0{,}3275$; y las raíces complejas son:

$$y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u+v)\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) = 0{,}1638\pm i\cdot 2{,}4659.$$

*El tercer procedimiento* consiste en aplicar *valores auxiliares*, calculados mediante tablas. En la ecuación (✳) haremos $r = \pm\sqrt{|p|}$; el signo de $r$ debe coincidir con el signo de $q$. Entonces, el valor auxiliar $\varphi$ y mediante éste las raíces $y_1$, $y_2$ e $y_3$, se determinan en relación con los signos de $p$ y $D = q^2+p^3$ según la siguiente tabla:

| $p < 0$ | | $p > 0$ |
|---|---|---|
| $q^2+p^3 \leq 0$ | $q^2+p^3 > 0$ | |
| $\cos\varphi = \frac{q}{r^3}$ | $\operatorname{ch}\varphi = \frac{q}{r^3}$ | $\operatorname{sh}\varphi = \frac{q}{r^3}$ |
| $y_1 = -2r\cos\varphi/3$<br>$y_2 = +2r\cos(60°-\varphi/3)$<br>$y_3 = +2r\cos(60°+\varphi/3)$ | $y_1 = -2r\operatorname{ch}\varphi/3$<br>$y_2 = r\operatorname{ch}\varphi/3 + i\sqrt{3}r\operatorname{sh}\varphi/3$<br>$y_3 = r\operatorname{ch}\varphi/3 - i\sqrt{3}r\operatorname{sh}\varphi/3$ | $y_1 = -2r\operatorname{sh}\varphi/3$<br>$y_2 = r\operatorname{sh}\varphi/3 + i\sqrt{3}r\operatorname{ch}\varphi/3$<br>$y_3 = r\operatorname{sh}\varphi/3 - i\sqrt{3}r\operatorname{ch}\varphi/3$ |

*Ejemplo:* $y^3-9y+4=0.$

$p=-3,\quad q=2;\quad q^2+p^3<0;$

$r=\sqrt{3}=1{,}7321,\quad \cos\varphi=2:3\sqrt{3}=0{,}3849;\quad \varphi=67^\circ\,22';$

$y_1=-2\sqrt{3}\cos 22^\circ\,27'=-3{,}4641\cdot 0{,}9242=-3{,}201;$

$y_2=2\sqrt{3}\cos(60^\circ-22^\circ\,27')=3{,}4641\cdot 0{,}7929=2{,}747;$

$y_3=2\sqrt{3}\cos(60^\circ+22^\circ\,27')=3{,}4641\cdot 0{,}1314=0{,}455.$

*Comprobación* (véanse las propiedades de las raíces):

$$y_1+y_2+y_3=0{,}001 \quad \text{en vez de } 0.$$

*El cuarto procedimiento* es la resolución aproximada de la ecuación (véanse más abajo las págs. 163-165).

*Propiedades de las raíces de la ecuación cúbica:*

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a},\quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{c}{d},\quad x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.$$

ECUACIÓN DE CUARTO GRADO. La forma canónica es:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.$$

*El número de soluciones reales* (distintas) es desde 0 hasta 4.

Si $b=d=0$, las raíces de la ecuación $ax^4+cx^2+e=0$ (ecuación *bicuadrada*) se determinan según las fórmulas:

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{y},\quad y=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4ac}}{2a}.$$

Si $a=e$ y $b=d$, las raíces de la ecuación *(recíproca)*

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

se determinan según las fórmulas:

$$x_{1,2,3,4}=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4}}{2},\quad y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac+8a^2}}{2a}.$$

*Resolución de la ecuación de cuarto grado de tipo general: el primer procedimiento* es la descomposición (si es posible) en factores del primer miembro de la ecuación:

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta);$$

las raíces de la ecuación son: $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$, $x_3=\gamma$, $x_4=\delta$.

*Ejemplo:*

$x^4-2x^3-x^2+2x=0;\quad x(x^2-1)(x-2)=x(x-1)(x+1)(x-2);$

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=-1,\quad x_4=2.$$

*Segundo procedimiento.* Las raíces de la ecuación $x^4+bx^3+cx^2+dx+$ $+e=0$ $(a=1)$ coinciden con las raíces de las dos ecuaciones cuadráticas.

$$x^2+(b+A)\frac{x}{2}+\left(y+\frac{by-d}{A}\right)=0,$$

donde $A=\pm\sqrt{8y+b^2-4c}$ e $y$ es una raíz real cualquiera de la ecuación cúbica

$$8y^3-4cy^2+(2bd-8e)y+e(4c-b^2)-d^2=0.$$

*El tercer procedimiento* es la resolución aproximada de la ecuación (véanse las págs. 163-165).

LAS ECUACIONES DE QUINTO GRADO y de grado superior en el caso general no pueden ser resueltas por radicales.

## 8. *Ecuaciones de n-ésimo grado*

PROPIEDADES GENERALES DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS. El primer miembro de la ecuación

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_n=0^* \qquad (1)$$

lo designaremos por $P(x)$; la raíz de la ecuación $P(x)=0$ se llama *raíz del polinomio* $P(x)$. Si $\alpha$ es una raíz de $P(x)=0$, entonces $P(x)$ es divisible por $(x-\alpha)$; en general, el resto de la división de $P(x)$ por $(x-\alpha)$ es igual a $P(\alpha)$. Si $P(x)$ es divisible por $(x-\alpha)^k$ y no lo es por $(x-\alpha)^{k+1}$, entonces $\alpha$ se llama raíz *múltiple de orden k* de la ecuación $P(x)=0$; en este caso, $\alpha$ es una raíz común del polinomio $P(x)$ y de sus derivadas hasta el orden $(k-1)$ inclusive. La raíz múltiple de orden uno se llama también *raíz simple*. *Teorema fundamental del álgebra:* toda ecuación de $n$-ésimo grado, cuyos coeficientes son números reales o imaginarios, tiene $n$ raíces reales o complejas, si cada raíz $k$-ple se cuenta por $k$ raíces. Si las raíces de $P(x)$ son iguales a $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ y sus órdenes de multiplicidad respectivos son $k, l, m, \dots$, entonces

$$P(x)=(x-\alpha)^k(x-\beta)^l(x-\gamma)^m\ \dots \qquad (\ast)$$

Se puede simplificar la búsqueda de las raíces de la ecuación $P(x)=0$' reduciéndola a la resolución de una ecuación que tenga las mismas raíces que la dada, pero de orden uno. Esto se consigue descomponiendo el polinomio $P(x)$ en dos factores:

$$P(x)=Q(x)\,T(x),$$

* El coeficiente $a_0$ del término de grado superior lo hacemos igual a 1 (dividiendo toda la ecuación por este coeficiente).

donde $Q(x) = (x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots$, $T(x) = (x-\alpha)(x-\beta)\ldots$; $Q(x)$ se determina como el máximo común divisor (véase pág. 143) de los polinomios $P(x)$ y $P'(x)$ (la derivada) y $T(x)$ se obtiene dividiendo $P(x)$ por $Q(x)$.

*Relación entre las raíces de la ecuación y sus coeficientes.* Si $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ son todas las $n$ raíces de la ecuación (1), entonces

$$x_1+x_2+\ldots+x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = -a_1.$$

$$x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{n} x_ix_j = a_2,$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{\substack{i,j,k=1\\(i<j<k)}}^{n} x_ix_jx_k = -a_3.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n a_n.$$

Ecuación de coeficientes reales. Las raíces complejas de una ecuación de coeficientes reales sólo pueden ser **conjugadas dos a dos**,* es decir, si una ecuación tiene la raíz $\alpha = a+bi$, entonces también tiene la raíz $\beta = a-bi$ y, además, del mismo orden de multiplicidad. En este caso, el producto $(x-\alpha)(x-\beta)$ da

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2+px+q, \tag{1}$$

donde

$p = -(\alpha+\beta) = -2a$, $q = \alpha\beta = a^2+b^2$, de donde se deduce que $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$. Sustituyendo en la fórmula ($*$) el producto de cada par de tales factores según la fórmula (1), resulta la descomposición del polinomio de coeficientes reales en factores **reales:**

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\ldots, \tag{$**$}$$

en que todos los valores $\alpha_i$, $p_i$, $q_i$ son reales y $\left(\frac{p_i}{2}\right)^2-q_i<0$.

*Número de raíces reales de una ecuación de coeficientes reales.* De lo anterior se deduce que toda ecuación de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

El número de raíces reales de la ecuación $P(x) = 0$, comprendidas entre dos números cualesquiera $a$ y $b (a<b)$ que no sean raíces de la

* Véanse en la pág. 568 los números complejos conjugados.

ecuación dada, puede determinarse exactamente por el siguiente procedimiento:

1) Se separan las raíces múltiples de la ecuación $P(x) = 0$, es decir, se obtiene una ecuación que tenga las mismas raíces que la dada, pero simples*. En lo sucesivo, designaremos por $P(x)$ una ecuación que **no tenga raíces múltiples.**

2) Se forma la serie de funciones de Sturm:

$$P(x), \quad P'(x), \quad P_1(x), \quad P_2(x) \ldots P_m = \text{const.}$$

donde $P(x)$ es el primer miembro de la ecuación dada, $P'(x)$ es la derivada, $P_1(x)$ es el resto de la división de $P(x)$ por $P'(x)$, tomado con signo contrario; $P_2(x)$ es el resto de la división de $P'(x)$ por $P_1(x)$, tomado con signo contrario, etc.; $P_m$ es el último resto ($=$ const)**.

3) Se calcula el número $A$ de *variaciones de signos* (es decir, de los cambios de «+» por «−» y viceversa) en la serie de números

$$P(a), \quad P'(a), \quad P_1(a), \quad P_2(a), \ldots P_m$$

y el número $B$ de variaciones de signos que presenta la serie de números

$$P(b), \quad P'(b), \quad P_1(b), \quad P_2(b), \ldots, P_m \text{***}.$$

La diferencia $A-B$ es igual al número pedido de raíces reales de la ecuación $P(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$ *(teorema de Sturm).*

*Ejemplo:* Determinar el número de raíces de la ecuación $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$, comprendidas entre 0 y 2.

El cálculo de las funciones de Sturm nos da:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8; \quad P'(x) = 4x^3 - 10x + 8, \; P_1(x) = 5x^2 - 12x + 16.$$
$$P_2(x) = -3x + 284, \quad P_3 = -1.$$

La sustitución $x = 0$ da la serie de números: $-8$, $+8$, $+16$, $+284$, $-1$ (2 variaciones) la sustitución $x = 2$ da: $+4$, $+20$, $+12$, $+278$, $-1$ (1 variación). $A - B = 2 - 1 = 1$, es decir, entre 0 y 2 hay una raíz.

*El número de raíces positivas* de la ecuación $P(x) = 0$ no es mayor que el número de variaciones de signos que presenta la serie de coeficientes del polinomio $P(x)$ y puede diferenciarse de este número sólo en un número par *(regla de Descartes).*

---

* El procedimiento de obtención de tal ecuación está indicado más arriba. Prácticamente, se puede comenzar no con la separación de las raíces múltiples, sino con la búsqueda inmediata de las funciones de Sturm: si $P_m$ no es const., $P(x)$ tiene raíces múltiples y éstas deben separarse.

** Para simplificar los cálculos, los restos encontrados se deben multiplicar por factores *positivos* constantes, lo cual no varía el resultado.

*** Si algunos de estos números son iguales a cero, entonces, al calcular las variaciones de signos, éstos se omiten.

*Ejemplo:* La ecuación $x^4+2x^3-x^2+5x-1 = 0$. La sucesión de los coeficientes de esta ecuación tiene los signos: $+ + - + -$, es decir, el signo varía tres veces. Según la regla de Descartes esta ecuación tiene tres raíces positivas o una. Como al sustituir $x$ por $-x$ las raíces de la ecuación cambian su signo y al sustituir $x$ por $x+h$ disminuyen en $h$, mediante la regla de Descartes se puede acotar tanto el número de raíces negativas, como el número de raíces mayores que $h$. En nuestro ejemplo la sustitución de $x$ por $-x$ da $x^4-2x^3-x^2-5x-1 = 0$, es decir, la ecuación tiene una raíz negativa. La sustitución de $x$ por $x+1$ da $x^4+6x^3+11x^2+13x+6 = 0$, es decir, todas las raíces positivas de la ecuación (en total 1 ó 3) son menores que la unidad.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE $n$-ÉSIMO GRADO. Si $n > 4$, en el caso general la resolución sólo se puede efectuar aproximadamente; prácticamente, los métodos de aproximación se aplican para la resolución de ecuaciones de tercer grado y, especialmente, de cuarto grado. Para la búsqueda simultánea (aproximada) de todas las raíces de una ecuación algebraica de $n$-ésimo grado (incluyendo las complejas) puede aplicarse *el método de Lobatchewski.* Para el cálculo de algunas de las raíces reales, de las ecuaciones algebraicas pueden aplicarse los métodos generales de resolución aproximada de las ecuaciones transcendentes (véanse las págs. 163-165 más adelante).

## 9. *Ecuaciones transcendentes*

DEFINICIÓN. Una ecuación $F(x) = f(x)$ se llama *transcendente,* si por lo menos una de las funciones $F(x)$ o $f(x)$ no es algebraica.

*Ejemplos:*

1) $3^x = 4^{x-2}\cdot 2^x$
2) $2^{x-1} = 8^{x-2}-4^{x-2}$,
3) $2\log_5(3x-1)-\log_5(12x+1) = 0$,
4) $\operatorname{sen} x = \cos^2 x-\frac{1}{4}$,
5) $3\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x+9$,
6) $x\cos x = \operatorname{sen} x$.

En algunos casos la resolución de las ecuaciones transcendentes se reduce a la resolución de ecuaciones algebraicas con la ulterior aplicación de las tablas; en general, las ecuaciones transcendentes sólo pueden ser resueltas aproximadamente.

ALGUNOS CASOS DE ECUACIONES TRANSCENDENTES QUE SE REDUCEN A ALGEBRAICAS.

*Ecuaciones exponenciales.* La incógnita $x$ o $P(x)$ (polinomio) figura sólo en los exponentes de las potencias de ciertas bases $a$, $b$, $c$, .... Tales ecuaciones se reducen a algebraicas en los siguientes casos:

1) Si con las potencias $a^{P_1(x)}$, $b^{P_2(x)}$, ... no se efectúan sumas y restas, a la ecuación se le pueden aplicar logaritmos de cualquier base.

*Ejemplo:*

$$3^x = 4^{x-2} \cdot 2^x; \quad x \log 3 = (x-2) \log 4 + x \log 2;$$

$$x = \frac{2 \log 4}{\log 4 - \log 3 + \log 2}.$$

2) Si $a$, $b$, $c$, ... son potencias enteras o fraccionarias de un mismo numero $k$ ($a = k^\alpha$, $b = k^\beta$, $c = k^\gamma$, ...), entonces haciendo $y = k^x$ resulta en ciertos casos una ecuación algebraica con respecto a $y$; resolviéndola se determina $x$ por las tablas: $x = \frac{\lg y}{\lg k}$.

*Ejemplo:* $2^{x-1} = 8^{x-2} - 4^{x-2}$; $\frac{2^x}{2} = \frac{2^{3x}}{64} - \frac{2^{2x}}{16}$, haciendo $2^x = y$, resulta $y^3 - 4y^2 - 32y = 0$ y $y_1 = 8, y_2 = -4, y_3 = 0; 2^{x_1} = 8, 2^{x_2} = -4$ $2^{x_3} = 0$, de donde $x_1 = 3$; no existen otras soluciones reales.

*Ecuaciones logarítmicas.* La incógnita $x$ o $P(x)$ (polinomio) figura sólo bajo el signo del logaritmo. Tales ecuaciones se reducen a algebraicas en los siguientes casos:

1) Si la ecuación contiene el logaritmo de una misma expresión; tomando en este caso este logaritmo como una nueva incógnita, se resuelve la ecuación algebraica obtenida y se eleva a potencia la solución hallada.

*Ejemplo:* $m [\log_a P(x)]^2 + n = a \sqrt{[\log_a P(x)]^2 + b}$. El reemplazo de $\log_a P(x)$ por $y$ da la ecuación $my^2 + n = a\sqrt{y^2 + b}$; hallando aquí $y$, resulta una ecuación para la determinación de $x$: $P(x) = a^y$.

2) Si la ecuación contiene una combinación lineal (de coeficientes enteros) de logaritmos en una misma base de las expresiones que representan polinomios en $x$:

$$m \log_a P_1(x) + n \log_a P_2(x) + \ldots = 0.$$

En este caso las expresiones de ambos miembros de la igualdad se reducen (cada una) al logaritmo de una sola expresión; la igualdad obtenida se eleva a potencia.

*Ejemplo:* $2 \log_5 (3x-1) - \log_5 (12x+1) = 0$, $\log_5 \frac{(3x-1)^2}{12x+1} = \log_5 1$; $\frac{(3x-1)^2}{12x+1} = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; la solución $x_1 = 0$, al reemplazarla en la expresión dada, da el logaritmo de un número negativo (imaginario) y por esto no se considera.

*Ecuaciones trigonométricas* (reducibles a algebraicas). La incógnita $x$ o $nx + a$ ($n$ es entero) figura sólo bajo el signo de las funciones trigonométricas. Entonces, empleando las fórmulas trigonométricas, se reduce la expresión sólo a una cierta función de $x$, al reemplazar esta función por $y$ resulta una ecuación algebraica. Resolviéndola, se determina generalmente $x$ por las tablas. Hay que tener presente que la solución suele ser multiforme.

*Ejemplo:* $\operatorname{sen} x = \cos^2 x - \frac{1}{4}$; en otra forma $\operatorname{sen} x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \frac{1}{4}$; haciendo $\operatorname{sen} x = y$, obtenemos $y^2 + y - \frac{3}{4} = 0$ y $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. La solución $y_2$ no da soluciones reales de la ecuación dada ($|\operatorname{sen} x| \leq 1$); $y_1 = \frac{1}{2}$ da $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ y $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ($k$ son números enteros).

*Ecuaciones hiperbólicas.** La incógnita $x$ figura sólo bajo el signo de las funciones hiperbólicas. Reemplazando las expresiones de las funciones hiperbólicas mediante las exponenciales y designando $e^x = y$, $e^{-x} = \frac{1}{y}$, la ecuación se reduce a una algebraica con respecto a $y$; por las tablas se halla $x = \ln y$.

*Ejemplo:* $3 \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + 9$; $\frac{3(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + 9$; $e^x + 2e^{-x} - 9 = 0$; $y + \frac{2}{y} - 9 = 0$, $y^2 - 9y + 2 = 0$; $y_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{73}}{2}$; $x_1 = \ln \frac{9 + \sqrt{73}}{2} \approx$ $\approx 2{,}1716$, $x_2 = \ln \frac{9 - \sqrt{73}}{2} \approx -1{,}4784$.

RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES. Los métodos indicados aquí para la resolución aproximada de ecuaciones son aplicables tanto a las ecuaciones algebraicas como a las transcendentes. El proceso del cálculo de las raíces se divide en dos partes: 1) búsqueda de valores aproximados groseros de las raíces y 2) precisión de las aproximaciones groseras encontradas.

ACOTACIÓN GROSERA DE LAS RAÍCES. Si $f(x)$ es una función continua** y $f(a)$, $f(b)$ tienen signos diferentes, entonces entre $a$ y $b$ hay por lo menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Dando a $a$ y $b$ diferentes valores siempre se puede obtener un intervalo suficientemente pequeño en el que habrá una sola raíz de la ecuación considerada. *El método gráfico* es aplicable si la ecuación se puede representar en la forma $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, y si las gráficas de las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ pueden construirse fácilmente. Entonces las raíces de la ecuación son iguales a las abscisas de los puntos de intersección de las curvas $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$.

*Ejemplo.* Las raíces de la ecuación $x \cos x = \operatorname{sen} x$ (además de la raíz evidente $x = 0$) son aproximadamente $(2k+1)\,\frac{\pi}{2}$ (donde $k = \pm 1$,

* Esta denominación no está generalmente admitida.

** Véanse las págs. 327-329.

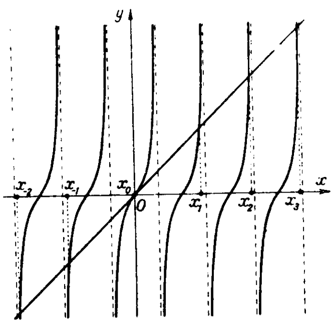



Fig. 74

$\pm 2, \ldots$); pues dicha ecuación puede escribirse en la forma $x = \operatorname{tg} x$ y sus raíces corresponden a los puntos de intersección de la recta $y = x$ con la tangentoide $y = \operatorname{tg} x$ (fig. 74).

*Métodos de precisión de las aproximaciones groseras.*

*1) Método de Newton.*

Si $x_0$ es un valor aproximado de la raíz $\alpha$ de la ecuación $f(x) = 0$, entonces como una aproximación más exacta se toma

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Sustituyendo $x_0$ por $x_1$ puede obtenerse la siguiente aproximación $x_2$, etc. El proceso de las aproximaciones sucesivas siempre es convergente, si la raíz $\alpha$ no es múltiple (es decir, si $f'(\alpha) \neq 0$) y la primera aproximación se ha tomado suficientemente próxima. Por consiguiente la raíz puede hallarse con cualquier grado de exactitud. *Ejemplo*, véase más abajo.

2) *Interpolación lineal* (Regula falsi). Si la raíz $\alpha$ de la ecuación $f(x) = 0$ está comprendida entre $a$ y $b$, entonces como valor aproximado de la raíz se puede tomar la cantidad

$$\tilde{x}_1 = a - f(a)\,\frac{b-a}{f(b)-f(a)}.$$

Si $f''(x)$ no cambia de signo entre $a$ y $b$, entonces los valores aproximados obtenidos por este método y por el método de Newton estarán situados a distintos lados de la raíz [por $x_0$ en el método de Newton se debe tomar aquel valor (de $a$ y $b$) para el cual $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$]. Por esto, una aplicación simultánea de ambos métodos permite juzgar de la exactitud alcanzada.

Geométricamente el método de Newton representa la sustitución de la gráfica de la función $f(x)$ por la tangente en el punto $x_0$ mientras que el método de interpolación lineal significa el reemplazo de dicha gráfica por la cuerda que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$ (fig. 75). *Ejemplo*, véase más abajo.

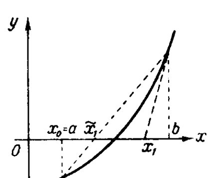



Fig. 75

3) *Método de iteraciones*. La ecuación considerada se representa en la forma $x = \varphi(x)$ y se halla un valor más exacto de la raíz $x_1$, partiendo de la primera aproximación $x_0$, me-

diante la fórmula $x_1 = \varphi(x_0)$. Reiterando este proceso (o "iterando") varias veces, se puede obtener el valor de la raíz con cualquier grado de exactitud, si en el intervalo entre la raíz de la ecuación y la primera aproximación, se cumple $|\varphi'(x)| < 1$. Si no se cumple esta condición, entonces debe transformarse la ecuación (aunque sea pasando a la función inversa). *Por ejemplo:* el método de iteración no es aplicable a la ecuación $x = \operatorname{tg} x$, pero es aplicable a la ecuación $x = \operatorname{arctg} x$.

Si $\varphi'(x) < 0$, los dos valores aproximados contiguos de la raíz, obtenidos mediante la iteración, serán alternadamente mayor y menor que la raíz, lo que permite acotar el grado de exactitud alcanzado.

*Ejemplo:* Hallar la menor raíz positiva de la ecuación $\operatorname{sen} x - x \cos x = 0$. Reemplazando esta ecuación por su equivalente $x = \operatorname{tg} x$, hallamos gráficamente (véase pág. 164) que la raíz buscada es aproximadamente igual a $\frac{3\pi}{2} = 4{,}71 \ldots$ Un valor más exacto lo encontraremos mediante las aproximaciones sucesivas:

a) Por el método de Newton y el de interpolación lineal. Para la función $f(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x$, tenemos que $f'(x) = x \operatorname{sen} x$. Tomando $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ resulta $f(x_0) = -1$, $f'(x_0) = -4{,}71$ y $x_1 = 4{,}71 - \frac{1}{4{,}71} = 4{,}50$.

Como $f(x_1) = -0{,}029$ es del mismo signo que $f(x_0)$, no es aplicable la interpolación lineal. El cálculo muestra que $f(4{,}45) = 0{,}189$ y, por consiguiente, la raíz buscada se halla entre 4,45 y 4,50.
Aplicando la interpolación lineal obtendremos la siguiente aproximación:

$$\tilde{x}_1 = 4{,}50 - \frac{-0{,}029}{-0{,}029 - 0{,}189}(4{,}50 - 4{,}45) = 4{,}4930.$$

El cálculo según la fórmula de Newton de la aproximación que sigue a $x_1$ [el signo de $f''(x_1)$ coincide con el signo de $f(x_1)$] da

$$x_2 = 4{,}50 - \frac{-0{,}029}{-4{,}399} = 4{,}4934.$$

Como las aproximaciones por el método de Newton y por el método de interpolación lineal están situados a distintos lados de la raíz, el error de $x_2$ no es superior a 0,0004.

b) Por el método de iteraciones: la ecuación $x = \operatorname{tg} x$ no es válido para la iteración, puesto que $(\operatorname{tg} x)' > 1$; al pasar a la función inversa resulta la ecuación $x = \operatorname{Arctg} x$, la cual se puede iterar. Tomando $x_0 = 4{,}7$ obtendremos sucesivamente:

$$x_1 = \operatorname{Arctg} x_0 = 258° = 4{,}503; \quad x_2 = \operatorname{Arctg} x_1 = 257°29' = 4{,}4942;$$
$$x_3 = \operatorname{Arctg} x_2 = 257°27{,}'3 = 4{,}4934; \quad x_4 = \operatorname{Arctg} x_3 = 257°27{,}'2 = 4{,}4934.$$

Evidentemente, todas las cifras de $x_4$ se pueden considerar exactas.

## *10. Determinantes*

DEFINICIONES. Se llama *determinante* de orden $n$ al número $D$ formado de los $n^2$ números $a_{ij}$ *(los elementos)*, situados en una tabla cuadrada de $n$ líneas y $n$ columnas en la siguiente forma*:

$$D = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma(-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega},$$

donde $\alpha$, $\beta$, ..., $\omega$ recorren todas las $n!$ permutaciones** posibles de los números 1, 2, ..., $n$; el signo «+» o «−» delante de cada *término* del determinante (es decir delante de cada sumando) se determina por el número $k$ de *inversiones* ("desórdenes") de cada permutación. Por ejemplo, el término $a_{13}\, a_{21}\, a_{34}\, a_{42}$ del determinante de cuarto orden tiene el signo "menos", ya que *la disposición* 3,1,4,2, de los segundos subíndices de las letras tiene tres inversiones, las cuales están señalada por arcos.

Se llama *menor* del elemento $a_{ij}$ al determinante de $(n-1)$-ésimo orden formado del determinante dado por eliminación de la línea $i$-ésima y de la columna $j$-ésima. Se llama *complemento algebraico**** $A_{ij}$ del elemento $a_{ij}$ al menor tomado con signo "más" o "menos" según la fórmula

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} \dots & a_{1j} \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} \dots & a_{ij} \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots & a_{nj} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

---

* El primer índice $i$ del elemento $a_{ij}$ del determinante indica que el elemento está tomado de la línea $i$-ésima del determinante; el segundo índice $j$ denota que el elemento está tomado de la columna $j$-ésima ($i$ es el número de la línea, contando desde arriba; $j$ es el número de la columna, contando desde la izquierda).

** Véanse en la pág. 187 las permutaciones.

*** También se llama adjunto o cofactor. *(Nota de la Edit.)*

Se llama *combinación lineal* de varias filas (columnas) del determinante a la fila (columna) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, cuyos elementos son combinaciones lineales de los elementos correspondientes de estas filas (columnas); por ejemplo, la combinación lineal $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ de los elementos de las filas $i$-ésima, $j$-ésima y $k$-ésima del determinante, se forma así:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \alpha a_{i1}+\beta a_{j1}+\gamma a_{k1}, \\ \bar{a}_2 &= \alpha a_{i2}+\beta a_{j2}+\gamma a_{k2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{a}_n &= \alpha a_{in}+\beta a_{jn}+\gamma a_{kn}; \end{aligned}$$

los números $\alpha, \beta, \gamma$ son *los coeficientes* de la combinación lineal.

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES:

1) El valor de un determinante no varía si *se cambian sus filas por sus columnas* y viceversa (por esto, todas las propiedades consideradas más adelante y que se refieren a las filas, son aplicables también a las columnas).

2) Un determinante es nulo, si *los elementos* de dos de sus filas son *iguales* o *proporcionales* o si una de las filas es *una combinación lineal* de cualquiera de las filas restantes.

3) *Un factor* común a todos los elementos de cualquier fila se puede sacar como factor del determinante.

4) *Al sumar* entre sí los determinantes que se diferencian sólo por los elementos de una fila ($i$-ésima) cualquiera, resulta un determinante cuyos elementos de la $i$-ésima fila son las sumas de los elementos correspondientes de las $i$-ésimas filas de los determinantes sumandos y los elementos restantes son los mismos que los de los sumandos.

5) El valor de un determinante *no varía* al sumar (o restar) a cualquier fila los elementos de otra fila o la combinación lineal de otras filas.

6) Un determinante se puede *descomponer por los elementos de una fila* ($i$-ésima) *cualquiera* de acuerdo a la fórmula $D = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+ + \ldots +a_{in}A_{in}$, en que $A_{ij}$ son los complementos algebraicos de los elementos correspondientes.

7) La suma de los productos de todos los elementos $a_{ik}$ de una fila ($i$-ésima) cualquiera de un determinante por los complementos algebraicos $A_{jk}$ de los elementos correspondientes a *otra* fila ($j$-ésima) es igual a Cero:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+ \ldots +a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$$

CÁLCULO DE DETERMINANTES:

*De segundo orden*, según la fórmula

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

*De tercer orden, según la "regla de Sarrus"* (se agregan las dos primeras columnas):

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix}$$

*De n-ésimo orden*, según la propiedad 6, se reduce al $(n-1)$-ésimo; previamente se transforma el determinante, empleando las propiedades restantes para anular el mayor número posible de elementos.

*Ejemplo:*

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & 12 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 \end{vmatrix} = \underset{\text{(propiedad 5)}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 & 4 \\ 2 & -7 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}} = 3 \underset{\text{(propiedad 3)}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}} =$$

$$= 3 \underset{\text{(propiedad 6)}}{\left\{ -5 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \right\}} = 0 - 21 \underset{\text{(propiedad 2)}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}} =$$

$$= -21 \underset{\text{(propiedad 5)}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = -21 \underset{\text{(propiedad 6)}}{\left\{ \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \right\}} =$$

$$= -21\,\{(4+10)-(16+5)\} = +147.$$

## 11. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

CASO EN QUE EL NÚMERO DE INCÓGNITAS ES IGUAL AL NÚMERO DE ECUACIONES.

*El sistema canónico es:*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \ldots\ +a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \ldots\ +a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ \ldots\ +a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Notaciones: $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *(determinante del sistema)*, $D_j$ es el determinante obtenido de $D$ al reemplazar la columna formada por los coeficientes $a_{kj}$ de la incógnita $x_j$ por la columna formada por los términos independientes $b_k$; por ejemplo $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$. El sistema $(*)$ se llama *homogéneo* si todos los $b_k = 0$ (y por consiguiente, todos los $D_j = 0$) y *no homogéneo* si al menos uno de los $b_k$ es distinto de cero.

*Resolución del sistema* $(*)$. Si el determinante del sistema $D \neq 0$, el sistema $(*)$ es *determinado;* tiene una solución y las raíces $x_j$ se expresan por las fórmulas de Cramer:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots\ x_n = \frac{D_n}{D}.$$

Si $D = 0$ y no todos los $D_j = 0$, el sistema $(*)$ es *incompatible:* o sea no tiene ninguna solución (para un sistema homogéneo es imposible tal caso).

El caso en que $D = 0$ y todos los $D_j = 0$, será estudiado después. (véase el caso general en la pág. 174 el ejemplo 4 y en la pág. 176 ejemplo 2).

*Ejemplos:*

1) $\begin{array}{l} 2x+\ y+3z = \ \ 9, \\ \ x-2y+\ z = -2, \\ 3x+2y+2z = \ \ 7; \end{array} \qquad D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 13,$

$$D_x = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 26,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 39,$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{13}{13} = -1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{26}{13} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{39}{13} = 3$$

(el sistema es determinado, no homogéneo).

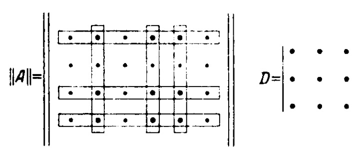
2) $$\begin{aligned} 2x+3y-z &= 1 \\ x-y+z &= 2 \\ 3x+2y &= 5; \end{aligned} \quad D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

(el sistema es incompatible).

MATRIZ Y SJ RANGO. Se llama *matriz* a un sistema de $mn$ números dispuestos en un cuadro rectangular de $m$ filas y $n$ columnas. Se designa:

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Se llama *menor* de orden $k$-ésimo de la matriz $\|A\|$ ($k \leqslant m$, $\kappa \leqslant n$) al determinante $D$ formado (conservando el orden) por $k^2$ elementos de la matriz que yacen en la intersección de algunas de sus $k$ filas y de sus $k$ columnas (véase el esquema)




(menor de tercer orden)

Se llama *rango de la matriz* $\|A\|$ al mayor orden que pueden tener sus menores que no se anulan. Para determinar el rango de una matriz se deben examinar todos sus menores de orden $l$ ($l$ es el menor de los números $m, n$ si $m \neq n$, o bien, $l = m = n$); si por lo menos uno de dichos números es distinto de cero, entonces el rango de $\|A\|$ es igual a $l$; si todos son iguales a cero, entonces se deben examinar todos los menores de orden $l-1$, etc. En la práctica es útil proceder a la inversa: pasando de los menores de menor orden a los de mayor orden, empleando la siguiente regla. Si ya se ha encontrado un menor $D_k$ de $k$-ésimo orden que es distinto de cero, entonces sólo resta calcular aquellos menores de $(k+1)$-ésimo orden que "orlan" a $D_k$, por ejemplo:

$$\left|\begin{array}{c:c} D_k & \\ \hdashline & \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c:c} & D_k \\ \hdashline & \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c:c} & \\ \hdashline D_k & \end{array}\right|, \quad \left|\begin{array}{c:c} & \\ \hdashline & D_k \end{array}\right|.$$

Si *todos* estos menores de $(k+1)$-ésimo orden son iguales a cero, el rango de la matriz es igual a $k$.

*Ejemplo:* Calcular el rango de la matriz $\|A\| = \begin{Vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$

El menor de segundo orden que yace en el extremo superior de la izquierda es: $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Pero en la matriz $\|A\|$ hay un menor de segundo orden distinto de cero: $D_2' = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Lo orlamos por la izquierda y por debajo: $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Orlando $D_3$ (esto se puede hacer sólo de dos maneras) encontramos:

$$D_4 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad D_4' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

En consecuencia, el rango de la matriz $\|A\| = 3$.

CASO GENERAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

*Ecuaciones no homogéneas.* Un sistema de ecuaciones no homogéneas

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (**)$$

se llama *compatible* si existe por lo menos una solución $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$* que transforma todas las ecuaciones ($*\,*$) en identidades, e *incompatible* si no existe solución alguna. *Criterio de compatibilidad:* el sistema ($*\,*$) es compatible si, y sólo si, el rango de la matriz

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

es igual al rango de la matriz "ampliada"

$$\|B\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{matrix} \right\|.$$

Un sistema compatible de ecuaciones se llama *determinado,* si tiene una solución única e *indeterminado* si tiene un conjunto infinito de soluciones.

Un sistema compatible de ecuaciones ($*\,*$) se resuelve de la siguiente manera. Se determina el rango $r$ de la matriz $\|A\|$, se transponen las ecuaciones ($*\,*$), así como las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, de tal modo que el menor no nulo de la matriz $\|A\|$ que tenga el orden $r$ ocupe la posición del extremo superior de la izquierda de la matriz (esta permutación no es necesaria si el menor del extremo superior de la izquierda de la matriz, de orden $r$, es distinto de cero).

Pueden presentarse dos casos:

1) $r = n$, $r \leqslant m$. Resolviendo el sistema de **las primeras** $n$ ecuaciones con $n$ incógnitas obtenemos una solución única $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, ya que el determinante de este sistema es $\neq 0$ (véase pág. 169). Si $n < m$, esta misma solución verifica a las $m-n$ ecuaciones restantes que son consecuencia de las primeras. El sistema dado ($*\,*$) es determinado.

2) $r < n$, $r \leqslant m$. Se resuelve el sistema de **las primeras** $r$ ecuaciones con respecto a las primeras $r$ incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_r$ expresando estas incógnitas en función de las $n-r$ incógnitas restantes $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Se obtiene una solución única en forma de funciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ x_2 &= x_2(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= x_r(x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

* Con esta expresión entre llaves se designa posteriormente la solución

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n.$$

pues el determinante del sistema de las ecuaciones es $\neq 0$. A las incógnitas $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ se les puede asignar **cualesquiera** valores y de este modo las incógnitas $x_1, \ldots, x_r$ se determinan por las fórmulas (1). Estas mismas soluciones verifican a las $m-r$ ecuaciones restantes (si $r < m$), las cuales son consecuencias de las primeras. El sistema dado ($**$) es indeterminado.

*Ejemplos:*

1)
$$\begin{aligned} x-2y+3z-u+2v &= 2,\\ 3x-y+5z-3u-v &= 6,\\ 2x+y+2z-2u-3v &= 8. \end{aligned}$$

El rango de la matriz $\|A\|$ es igual a 2 y el rango de la matriz $\|B\|$ es igual a 3. El sistema es incompatible y no tiene soluciones.

2)
$$\begin{aligned} x-y+2z &= 1,\\ x-2y-z &= 2,\\ 3x-y+5z &= 3,\\ -2x+2y+3z &= -4. \end{aligned}$$

Los rangos de las matrices $\|A\|$ y $\|B\|$ son iguales a 3; el sistema es compatible. El determinante de tercer orden del extremo superior de la izquierda $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & -1\\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$; no son necesarias permutaciones, $r=n$; el sistema es determinado. Resolvemos el sistema de las tres primeras ecuaciones: $x = \frac{10}{7}$; $y = -\frac{1}{7}$; $z = -\frac{2}{7}$; estas mismas soluciones verifican a la cuarta ecuación.

3)
$$\begin{aligned} x-y+z-u &= 1,\\ x-y-z+u &= 0,\\ x-y-2z+2u &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Los rangos de las matrices $\|A\|$ y $\|B\|$ son iguales a 2; el sistema es compatible, $r < n$; el sistema es indeterminado. El determinante de segundo orden del extremo superior de la izquierda es $D = 0$; transponemos al cuarto lugar la columna que contiene $x$:

$$\begin{aligned} -y+z-u+x &= 1,\\ -y-z+u+x &= 0,\\ -y-2z+2u+x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema de las dos primeras ecuaciones con respecto a las incógnitas $y$ y $z$:

$$-y+z = 1-x+u,$$
$$-y-z = \quad -x-u.$$

Las soluciones $y = x-\frac{1}{2}$, $z = u+\frac{1}{2}$ verifican a todas las ecuaciones para cualesquiera valores de $x$ y $u$.

4) $$\begin{aligned} x+2y-z+u &= 1,\\ 2x-y+2z+2u &= 2,\\ 3x+y+z+3u &= 3,\\ x-3y+3z+u &= 0. \end{aligned}$$

En este caso, el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, $D = 0$ así como $D_x = D_y = D_z = D_u = 0$. El rango de la matriz $\|A\|$ es igual a 2 y el rango de la matriz $\|B\|$ es igual a 3. El sistema es incompatible y no tiene soluciones.

*Ecuaciones homogéneas.* Un sistema de ecuaciones homogéneas

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n &= 0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ \dots\ +a_{2n}x_n &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ \dots\ +a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\ast\ast\ast)$$

siempre tiene *la solución nula* $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Si el sistema tiene una solución no nula $\{\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n\}$*, entonces tiene un conjunto infinito de soluciones de la forma $\{k\alpha_1, k\alpha_2, \dots k\alpha_n\}$, donde $k$ es un número arbitrario. Si el sistema $(\ast\ast\ast)$ tiene $p$ soluciones no nulas.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n\}, \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}, \dots, \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}, \qquad (1)$$

entonces tiene un conjunto infinito de soluciones de la forma

$$\{k_1\alpha_1+k_2\beta_1+\ \dots\ +k_p\mu_1, k_1\alpha_2+k_2\beta_2+\ \dots\ +k_p\mu_2, \dots, k_1\alpha_n+ \\ +k_2\beta_n+\ \dots\ +k_p\mu_n\}, \qquad (2)$$

en que $k_1, k_2, \dots, k_p$ son números arbitrarios (no son todos iguales a cero). La solución (2) se llama *combinación lineal* de las soluciones (1).

Las soluciones (1) del sistema de ecuaciones $(\ast\ast\ast)$ se llaman *linealmente independientes* si ninguna de ellas es combinación lineal de las restantes; $p$ soluciones linealmente independientes forman un *sistema*

---

* Véase la nota de la pág. 172.

*fundamental de soluciones*, si una solución cualquiera del sistema de ecuaciones ($* * *$) es combinación lineal de estas $p$ soluciones*.

Si el rango $r$ de la matriz $\|A\|$ de los coeficientes de las ecuaciones ($* * *$) es menor que el número $n$ de incógnitas, entonces las ecuaciones ($* * *$) tienen un sistema fundamental de soluciones; si $r = n$ el sistema fundamental no existe y las ecuaciones tienen sólo la solución nula. Si $r < n$ el sistema fundamental está formado por $n-r$ soluciones linealmente independientes. Para buscar los sistemas fundamentales, ponemos en el sistema ($* * *$) las ecuaciones y las incógnitas en un orden tal que resulte en el extremo superior de la izquierda de la matriz $\|A\|$ un menor de orden $r$-ésimo, distinto de cero. (Para esto es necesario a veces transponer las ecuaciones y las incógnitas; véanse ejemplos). Después resolvemos el sistema ($* * *$) con respecto a las primeras $r$ incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_r$ expresándolas en función de las incógnitas restantes:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x_1(x_{r+1}, \quad x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ x_2 = x_2(x_{r+1}, \quad x_{r+2}, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = x_r(x_{r+1}, \quad x_{r+2}, \ldots, x_n). \end{array}\right\} \tag{3}$$

Se pueden dar valores arbitrarios a las incógnitas $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ formando junto con los valores correspondientes $x_1, x_2, \ldots, x_r$, determinados por las fórmulas (3), una de las soluciones del sistema de ecuaciones ($* * *$). Habiendo elegido estos valores $n-r$ veces:

| | $x_{r+1}$ | $x_{r+2}$ | $\ldots$ $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 1) | $b_{11}$ | $b_{12}$ | $\ldots$ $b_{1,n-r}$ |
| 2) | $b_{21}$ | $b_{22}$ | $\ldots$ $b_{2,n-r}$ |
| ... | ... | ... | ... |
| $n-r$) | $b_{n-r,1}$ | $b_{n-r,2}$ | $\ldots$ $b_{n-r,n-r}$ |

de tal manera que el determinante $B = |b_{ik}|$ no sea igual a cero, obtenemos uno de los sistemas fundamentales de soluciones de las ecuaciones ($* * *$). En particular se puede hacer $b_{ik} = 1$ para $i = k$ y $b_{ik} = 0$ para $i \neq k$; entonces $B = 1$ y las soluciones

| | $x_{r+1}$ | $x_{r+2}$ | $\ldots$ $x_n$ |
|---|---|---|---|
| 1) | 1 | 0 | $\ldots$ 0 |
| 2) | 0 | 1 | $\ldots$ 0 |
| ... | ... | ... | ... |
| $n-r$) | 0 | 0 | $\ldots$ 1 |

---

* Puede haber un conjunto infinito de sistemas fundamentales (véase más adelante).

determinan de una manera simple junto con (3) un sistema fundamental de soluciones de las ecuaciones ($***$).

*Ejemplos:* Hallar los sistemas fundamentales de soluciones de las ecuaciones

1) $$\begin{aligned} x-y+5z-u&=0,\\ x+y-2z+3u&=0,\\ 3x-y+8z+u&=0,\\ x+3y-9z+7u&=0. \end{aligned}$$

El rango de la matriz $\|A\|$ es igual a 2; el determinante $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} \neq 0$; no es necesario hacer permutaciones. Resolvemos el sistema con respecto a las incógnitas $x$ e $y$. Haciendo $z=1$, $u=0$ obtenemos la primera solución fundamental:

$$x=-\frac{3}{2},\quad y=\frac{7}{2},\quad z=1,\quad u=0 \quad \text{o sea,}$$

$$\left\{-\frac{3}{2},\ \frac{7}{2},\ 1,\ 0\right\}.$$

Haciendo $z=0$, $u=1$ obtenemos la segunda solución fundamental:

$$x=-1,\quad y=-2,\quad z=0,\quad u=1 \quad \text{o sea,}\quad \{-1,\ -2,\ 0,\ 1\}.$$

En consecuencia, cualquier solución del sistema dado se puede expresar en la forma

$$\left\{-\frac{3}{2}k_1-k_2,\ \frac{7}{2}k_1-2k_2,\ k_1,\ k_2\right\}.$$

2) $$\begin{aligned} 2x+3y-z&=0,\\ x-y+z&=0,\\ 3x+2y&=0. \end{aligned}$$

El número de ecuaciones es igual al número de incógnitas, $D = D_x = D_y = D_z = 0$. El rango de la matriz $\|A\|$ es igual a 2; el determinante $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix} \neq 0$, no es necesario hacer permutaciones.

Resolvemos el sistema con respecto a $x$ e $y$. Haciendo $z=1$, obtenemos una solución fundamental única linealmente independiente: $x=-\frac{2}{5}$, $y=\frac{3}{5}$. En consecuencia, toda solución del sistema dado se puede expresar en la forma:

$$x=-\frac{2}{5}k,\quad y=\frac{3}{5}k,\quad z=k \quad \text{o sea,}\quad x=-2k,\quad y=3k,\quad z=5k.$$

## *12. Sistema de ecuaciones de grado superior*

CONDICIÓN DE INDEPENDENCIA DE LAS ECUACIONES. Dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$f(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(x, y) = 0$$

son independientes, si su jacobiano (véase pág. 338)

$$\frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

no es idénticamente nulo; en caso contrario, una ecuación es consecuencia de la otra y éstas tienen un conjunto infinito de soluciones.

Para tres ecuaciones con tres incógnitas la condición de independencia es análoga:

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)} \neq 0,$$

etc.

Estas condiciones se refieren tanto a los sistemas de ecuaciones algebraicas como a los de ecuaciones transcendentes.

*Número de soluciones* de un sistema de dos ecuaciones algebraicas $P_1(x, y) = 0$ y $P_2(x, y) = 0$. Si $P_1$ es un polinomio de $m$-ésimo grado y $P_2$ es un polinomio de $n$-ésimo grado con respecto a $x$ e $y$*, entonces el sistema tiene $m \cdot n$ pares de soluciones reales o complejas. Un sistema de tres ecuaciones de grado $m$-ésimo, $n$-ésimo y $p$-ésimo tiene $m \cdot n \cdot p$ ternas de soluciones, etc.

*La búsqueda de las soluciones* de un sistema de dos ecuaciones algebraicas se reduce en el caso general a la obtención de una ecuación de $m \cdot n$-ésimo grado *(la resolvente* del sistema) con una incógnita (por ejemplo $x$), mediante la eliminación de la otra incógnita ($y$) en el sistema; después de haber hallado las raíces de la resolvente éstas se reemplazan en una de las ecuaciones del sistema para determinar la otra incógnita. Un sistema de ecuaciones se resuelve más fácilmente, si una de las ecuaciones es lineal y la otra de $n$-ésimo grado; despejando $y$ en la ecuación lineal y reemplázandola en la otra ecuación obtenemos una resolvente de $n$-ésimo grado con respecto a $x$. En el caso de un sistema de dos ecuaciones, cada una de las cuales es de segundo grado, obtenemos una resolvente de cuarto grado; a veces se consigue resolver tal sistema por *métodos artificiales*.

* Se entiende por grado de un polinomio de dos variables a la suma mayor de las potencias de $x$ e $y$ de sus términos. Por ejemplo, el polinomio $x^3 + x^2y^2 + y^3$ es de cuarto grado.

*Ejemplo:* $x^2+y^2 = a$, $xy = b$. Resulta $(x+y)^2 = a+2b$; $(x-y)^2 = = a-2b$; $x+y = \pm\sqrt{a+2b}$, $x-y = \pm\sqrt{a-2b}$, de donde encontramos 4 pares de valores de $x$ e $y$.

EL MÉTODO GRÁFICO de resolución de un sistema de dos ecuaciones se reduce a la búsqueda de los puntos de intersección de las curvas dadas por las ecuaciones $f(x, y) = 0$ y $\varphi(x, y) = 0$.

# C. CAPÍTULOS COMPLEMENTARIOS DEL ÁLGEBRA

## *13. Desigualdades*

DEFINICIONES. Desigualdad es la unión de dos expresiones numéricas o literales mediante alguno de los siguientes signos:

1) $>$ ("mayor")
2) $<$ ("menor")
3) $\neq$ ("desigual")
3a) $\gtrless$ ("mayor o menor")
4) $\geqslant$ ("mayor o igual")
4a) $\nless$ ("no es menor")
5) $\leqslant$ ("menor o igual")
5a) $\ngtr$ ("no es mayor").

Las anotaciones 3) y 3a), 4) y 4a), 5) y 5a) tienen un mismo significado y pueden ser reemplazadas una por otra*.

Las desigualdades de los tipos 1, 2 y 3 se llaman *estrictas* y las del tipo 4 y 5 no estrictas.

Una desigualdad se llama *identidad*, si es válida para todos los valores de las letras que figuran en ella. Una desigualdad válida que contiene sólo números, también se llama identidad.

Las desigualdades, al igual que las ecuaciones, pueden contener cantidades incógnitas** (generalmente, estas últimas se designan por las últimas letras del alfabeto). *Resolver una inecuación* (o un sistema de inecuaciones), significa determinar entre qué límites deben estar comprendidos los valores de las incógnitas para que la desigualdad (o todas las desigualdades contenidas en el sistema) sea válida. Se puede buscar la solución para desigualdades de los tipos de 1 al 5; más frecuentemente se suelen resolver desigualdades estrictas de los tipos 1 y 2. Si dos

---

* Si la anotación 3) se refiere a aquellos valores, para los cuales no están definidos los conceptos de "mayor" y "menor", por ejemplo, a los números complejos (pág. 567) y a los vectores (pág. 596), entonces la anotación 3) no puede ser reemplazada por la anotación 3a). Todo este párrafo se refiere sólo a los números reales.

** Entonces se llaman inecuaciones. *(Nota de la Edit).*

desigualdades pertenecen ambas al tipo 1 o ambas al tipo 2, entonces son *desigualdades en un mismo sentido;* si una de ellas pertenece al tipo 1 y la otra al tipo 2, entonces son *desigualdades de sentido contrario.* Dos inecuaciones que contengan las mismas incógnitas se llaman *equivalentes* si ambas son válidas para los mismos valores de las incógnitas.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS DESIGUALDADES DE LOS TIPOS 1 Y 2.

1) *Cambio del signo de la desigualdad.* Si $a > b$, entonces $b < a$; si $a < b$, entonces $b > a$.

2) *Propiedades transitivas.* Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$; si $a < b$, $b < c$, entonces $a < c$.

3) *Suma y resta de una desigualdad y una cierta cantidad.* Si $a > b$, entonces $a \pm c > b \pm c$; si $a < b$, entonces $a \pm c < b \pm c$: al sumar una misma cantidad a ambos miembros de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no varía.

4) *Suma de desigualdades.* Si $a > b$, $c > d$, entonces $a+c > b+d$; si $a < b$, $c < d$, entonces $a+c < b+d$: dos desigualdades de un mismo sentido se pueden sumar miembro a miembro.

5) *Sustracción de desigualdades.* Si $a > b$, $c < d$, entonces $a-c > b-d$; si $a < b$, $c > d$, entonces $a-c < b-d$: de una desigualdad se puede restar miembro a miembro otra desigualdad de sentido contrario, sin que por ello varíe el signo de la primera desigualdad. (¡No se pueden restar miembro a miembro desigualdades de un mismo sentido!).

6) *Multiplicación y división de desigualdades.*

$$\text{Si}\quad a > b \quad \text{y} \quad c > 0, \quad \text{entonces} \quad ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c},$$
$$\text{Si}\quad a < b \quad \text{y} \quad c > 0, \quad \text{entonces} \quad ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c},$$
$$\text{Si}\quad a > b \quad \text{y} \quad c < 0, \quad \text{entonces} \quad ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c},$$
$$\text{Si}\quad a < b \quad \text{y} \quad c < 0, \quad \text{entonces} \quad ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

(al multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo resulta una desigualdad del mismo sentido; al multiplicar o dividir ambos miembros de una desigualdad por un mismo número negativo, resulta una desigualdad de sentido contrario).

ALGUNAS DESIGUALDADES FUNDAMENTALES.

1) $|a+b| \leqslant |a|+|b|, \quad |a+b+ \dots +k| \leqslant |a|+|b|+ \dots +|k|$

(el valor absoluto de la suma de dos o varios números es menor o igual a la suma de los valores absolutos de estos números).

Se cumple la igualdad sólo en el caso en que todos los números tengan los mismos signos.

2) $|a|+|b| \geqslant |a-b| \geqslant |a|-|b|$

(el valor absoluto de la diferencia de dos números es menor o igual a la suma de los valores absolutos de estos números y es mayor o igual a su diferencia).

3) $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ siendo $a_i > 0$

(*"desigualdad de Cauchy"*: la media aritmética de $n$ números positivos es mayor o igual a la raíz $n$-ésima de los productos de estos números)*.

Se cumple la igualdad sólo en el caso en que los números $n$ sean iguales.

4) $\left|\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right| \leqslant \sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$

(el valor absoluto de la media aritmética de varios números es menor o igual a la media cuadrática de estos números, véase más abajo pág.184).

Se cumple la igualdad sólo en el caso en que todos los números $n$ sean iguales.

5) $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leqslant \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$

ó

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

(*"desigualdad de Buniakovski-Cauchy"*: si se tienen dos series finitas de números $n$, entonces la suma de los productos de estos números tomados dos a dos, es menor o igual al producto de las raíces cuadradas de la suma de los cuadrados de estos números**. Se cumple la igualdad sólo en el caso en que $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n$).

---

* Véanse en la pág. 184 el caso particular de esta desigualdad, para $n = 2$.

** Si $n=3$ y $\{a_1, a_2, a_3\}$ y $\{b_1, b_2, b_3\}$ se consideran coordenadas cartesianas rectangulares de un vector, entonces la desigualdad de Buniakovski-Cauchy muestra que el producto escalar de los vectores es menor o igual al producto de sus módulos (véase pág. 600). Para $n > 3$ esta formulación se extiende a los vectores del espacio $n$-dimensional.

He aquí una analogía de la desigualdad de Buniakovski-Cauchy para las series infinitas convergentes:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n\right)^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2;$$

una analogía de la misma desigualdad para las integrales definidas es:

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx.$$

6) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números positivos, entonces

6₁) $$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\leqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}$$

para $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ y $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$
ó $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$ y $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$.

6₂) $$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}\geqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n}$$

para $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ y $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$;

es *la desigualdad de Chébichev:* si se tienen dos series finitas de $n$ números positivos, entonces el producto de las medias aritméticas de estas series es menor o igual (correspondientemente, mayor o igual) a la media aritmética de los productos si ambas series son crecientes o decrecientes (correspondientemente, una de ellas crece y la otra decrece).

7) Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números positivos, entonces

7₁) $$\sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}}\cdot\sqrt[k]{\frac{b_1^k+b_2^k+\ldots+b_n^k}{n}}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k+(a_2b_2)^k+\ldots+(a_nb_n)^k}{n}}$$

para $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ y $b_1\leqslant b_2\leqslant\ldots\leqslant b_n$
ó $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$ y $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$,

7₂) $$\sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}}\cdot\sqrt[k]{\frac{b_1^k+b_2^k+\ldots+b_n^k}{n}}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt[k]{\frac{(a_1b_1)^k+(a_2b_2)^k+\ldots+(a_nb_n)^k}{n}}$$

para $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ y $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$

(generalización de la desigualdad de Chébichev).

*Resolución de inecuaciones de primero y segundo grado.* La resolución de inecuaciones se reduce al reemplazo sucesivo de una inecuación por otra equivalente a ella. Igual que en la resolución de ecuaciones, en las inecuaciones los sumandos se pasan de un miembro a otro con signo contrario y se multiplican o dividen ambos miembros de la inecuación por un mismo número (distinto de cero; si el factor es positivo, se conserva el signo de la desigualdad y si es negativo, se cambia por el contrario). Mediante tales transformaciones siempre se puede reducir una inecuación de primer grado a la forma $ax > b$, y una inecuación de segundo grado, en el caso más simple, a la forma $x^2 < m$ o $x^2 > m$ y en el caso general, a la forma $ax^2+bx+c<0$ ó $ax^2+bx+c>0$.

*La inecuación de primer grado* $ax > b$ tiene la solución:

$$x > \frac{b}{a} \text{ para } a > 0 \text{ y } x < \frac{b}{a} \text{ para } a < 0.$$

*Ejemplo:*

$$5x+3 < 8x+1; \quad 5x-8x < 1-3; \quad -3x < -2, \quad x > \frac{2}{3}.$$

*Las inecuaciones elementales de segundo grado* $x^2 < m$ y $x^2 > m$ tienen las soluciones:

a) $x^2 < m$. Para $m > 0$ la solución es: $-\sqrt{m} < x < +\sqrt{m}(|x| < \sqrt{m})$;

Para $m \leq 0$ no tiene solución;

b) $x^2 > m$. Para $m > 0$ la solución es: $x > \sqrt{m}$ y $x < -\sqrt{m}(|x| > \sqrt{m})$;

Para $m = 0$ la solución es: $x > 0$ y $x < 0$ $(x \neq 0)$;

Para $m < 0$ la desigualdad es una identidad.

*Caso general de una inecuación de segundo grado* $ax^2+bx+c < 0$ ó $ax^2+bx+c > 0$. Se divide la inecuación por $a$ (cambiando el signo de la inecuación en el caso $a < 0$) y se reduce a la forma $x^2+px+q < 0$ ó $x^2+px+q > 0$. La última inecuación se transforma a la forma

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

o, respectivamente, a la forma

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 > \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Designando $x+\frac{p}{2}$ por $z$ y $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ por $m$ resulta la inecuación $z^2 < m$ o $z^2 > m$; resolviéndola se halla $x$.

*Ejemplos:*

1) $-2x^2+14x-20 > 0$; $x^2-7x+10 < 0$; $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 < \frac{9}{4}$; $-\frac{3}{2} < x-\frac{7}{2} < \frac{3}{2}$; $-\frac{3}{2}+\frac{7}{2} < x < \frac{3}{2}+\frac{7}{2}$. Solución: $2 < x < 5$.

2) $x^2+6x+15 > 0$; $(x+3)^2 > -6$; inecuación idéntica.

3) $-2x^2+14x-20 < 0$; $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 > \frac{9}{4}$, $x-\frac{7}{2} > \frac{3}{2}$ y $x-\frac{7}{2} < -\frac{3}{2}$.

La solución es: $x > 5$ y $x < 2$.

## *14. Progresiones, series finitas y valores medios*

Se llama **progresión aritmética** a una sucesión de números $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ (*términos* de la progresión) tal, que cada número siguiente se obtiene del anterior agregando un número determinado $r$ (*la diferencia* de la progresión). Si $r > 0$, la progresión se llama *creciente* y si $r < 0$, *decreciente.*

*Fórmulas de la progresión aritmética:*

$$a_n = a_1+(n-1)r \quad \text{y} \quad s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

($s_n$ es la suma de los $n$ primeros términos).

Se llama PROGRESIÓN GEOMÉTRICA a una sucesión de números $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ (*términos* de la progresión) tal, que cada término siguiente se obtiene del anterior multiplicando éste por un número determinado $q$ (*razón* de la progresión). Si $q > 1$ la progresión es *creciente* y si $|q| < 1$, es *decreciente.*

*Fórmulas de la progresión geométrica:*

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{y} \quad s_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

Para la suma de la progresión geométrica decreciente es más cómodo emplear la fórmula $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. Si el número $n$ de términos de la progresión geométrica decreciente crece indefinidamente, entonces $q^n \to 0$ y $s_n$ tiende al límite

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \frac{a_1}{1-q}$$

(*suma de la progresión geométrica indefinida decreciente*).

*Ejemplo:* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+ \dots +\frac{1}{2^n}+ \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

ALGUNAS SERIES NUMÉRICAS (finitas*):

1) $1+2+3+ \dots +(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$;

2) $p+(p+1)+(p+2)+ \dots +(q-1)+q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$;

3) $1+3+5+ \dots +(2n-3)+(2n-1) = n^2$;

4) $2+4+6+ \dots +(2n-2)+2n = n(n+1)$;

---

* Véanse en las págs. 346-347 la tabla de series numéricas infinitas.

5) $1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6) $1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +(n-1)^3+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

7) $1^2+3^2+5^2+\ \dots\ +(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;

8) $1^3+3^3+5^3+\ \dots\ +(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

9) $1^4+2^4+3^4+\ \dots\ +n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

VALORES MEDIOS. Se llama *media aritmética* de dos cantidades $a$ y $b$ a la semi-suma $x = \frac{a+b}{2}$; los valores $a$, $x$ y $b$ forman una progresión aritmética.

La media aritmética de $n$ valores $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ es:

$$x = \frac{a_1+a_2+\ \dots\ +a_n}{n}.$$

Se llama *media cuadrática* de $n$ valores $a_1, a_2, \dots, a_n$ (positivos o negativos) al valor

$$+\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\ \dots\ +a_n^2)},$$

que tiene un gran significado en la teoría de errores (véase la pág. 652).

Se llama *media geométrica (media proporcional)* de dos valores positivos $a$ y $b$ al valor $x = \sqrt{ab}$; los valores $a$, $x$ y $b$ forman una progresión geométrica. La media geométrica de dos valores desiguales es siempre menor que su media aritmética. Si $a$ y $b$ son longitudes de segmentos, entonces el segmento de longitud $x = \sqrt{ab}$ se determina por la construcción dada en la fig. 76 ($a$ ó $b$).

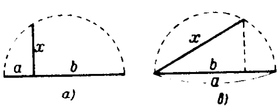



Fig. 76

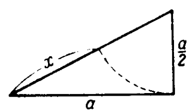



Fig. 77

Se llama *sección áurea* (o *división en la razón extrema y media*) del valor $a$ a su división en dos partes $x$ y $a-x$, tales que $x$ sea la media geométrica entre $a$ y $a-x$.

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a \approx 0{,}618a.$$

Si $a$ es la longitud de un segmento, entonces el segmento de longitud $x$ se determina por la construcción dada en la fig. 77. El valor $x$ es la longitud del lado de un decágono regular, inscrito en un círculo de radio $a$.

## *15. Factorial y función Gamma*

Se llama FACTORIAL de un número entero positivo $n$ [se designa $n!$ o $\Pi(n)$] al producto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$.

Una propiedad fundamental del factorial es que: $n! = n(n-1)!$.

Véanse en la pág. 46 *los factoriales de los primeros números* y sus valores recíprocos.

Los factoriales de los números grandes pueden expresarse aproximadamente por *la fórmula de Stirling:*

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\ldots\right),$$

$$\ln(n!) \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}.$$

Esta fórmula se cumple aunque $n$ no sea entero (véase más adelante la función $\Gamma$).

FUNCIÓN GAMMA. El concepto de factorial se extiende a cualquier número $x$*, mediante *la función Gamma* $\Gamma(x)$, definida de las dos maneras siguientes:

$$\Gamma(x)\begin{cases} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt & \textit{(integral de Euler)} \text{ (sólo para } x > 0^{**}) \\ = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)} & \text{(para todo } x). \end{cases}$$

*Propiedades fundamentales de la función Gamma:*

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n$ entero y positivo.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x},$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x).$$

GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE FACTORIAL ($\Pi x$). El concepto de factorial $n!$, primeramente definido para los $n$ positivos enteros, se generaliza para todo $n$ real en forma de la función $\Pi(x) = \Gamma(x+1)$.

* Incluso a los complejos.

** Para los $x$ complejos, es para $\operatorname{Re} x > 0$.

Para $x$ positivo entero: $\Pi(x) = x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x$,
Para $x = 0$: $\Pi(0) = \Gamma(1) = 1$,
Para $x$ negativo entero: $\Pi(x) = \pm \infty$,
Para $x = \frac{1}{2}$: $\Pi\left(\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
Para $x = -\frac{1}{2}$: $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
Para $x = -\frac{3}{2}$: $\Pi\left(-\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

Véanse en la fig. 78 las gráficas de las funciones $\Gamma(x)$ y $\Pi(x)$. Véanse en la pág. 81 las tablas de la función $\Gamma(x)$.

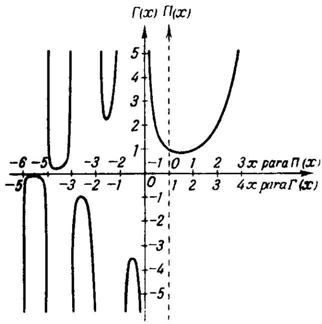



Fig. 78

## 16. Combinatoria

Se llaman VARIACIONES de orden $m$ (o $m$-arias) de $n$ elementos a las ordenaciones de los mismos que se diferencian una de otra por sus propios elementos o por el orden de sucesión de ellos. Por ejemplo: las variaciones binarias de tres elementos $a$, $b$, $c$ son: $ab$, $ac$, $bc$, $ba$, $ca$, $cb$. El número total de variaciones $m$-arias de $n$ elementos distintos (se designa $A_n^m$) es:

$$A_n^m = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}_{\text{en total son } m \text{ factores}} = \frac{n!}{(n-m)!}\,*.$$

*Ejemplo:* $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

* Sobre el símbolo $n!$ (factorial de $n$) véase en la pág. 185.

Se llaman PERMUTACIONES de $n$ elementos a las ordenaciones que sólo se diferencian unas de otras por el orden de sucesión de los elementos contenidos en ellas. Por ejemplo: las permutaciones de los tres elementos $a$, $b$, y $c$ son: $abc$, $bca$, $cab$, $cba$, $bac$, $acb$. El número total de permutaciones de los $n$ elementos distintos (se designa $P_n$) es:

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = n! = A_n^n.$$

Si entre $n$ elementos $a$, $b$, $c$, ... los hay iguales (o sea $a$ se repite $\alpha$ veces; $b$, $\beta$ veces; $c$, $\gamma$ veces; etc.), entonces

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\ldots}.$$

Se llaman COMBINACIONES de orden $m$ (o $m$-arias) de $n$ elementos a las ordenaciones que sólo se diferencian una de otra por sus propios elementos. Por ejemplo: las combinaciones binarias de tres elementos $a$, $b$, $c$ son: $ab$, $ac$, $bc$. El número total de combinaciones de $n$ elementos distintos $\left[\text{se designa } C_n^m \text{ o } \binom{n}{m}^*\right]$ es:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m} = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

$$C_n^1 = n, \quad C_n^n = C_n^0 = 1.$$

Una de las propiedades fundamentales de las combinaciones es que:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

## 17. Binomio de Newton

FÓRMULA DE NEWTON:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + \ldots + nab^{n-1} + b^n \qquad (*)$$

ó

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 +$$
$$+ C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

---

* La notación $\binom{n}{m}$ se lee, $n$ sobre $m$. *(Nota de la Edit).*

LOS COEFICIENTES BINOMIALES $C_n$ * se pueden determinar mediante el llamado *triángulo de Pascal:***)

| $n$ | Coeficientes |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 1 |
| 2 | 1 2 1 |
| 3 | 1 3 3 1 |
| 4 | 1 4 6 4 1 |
| 5 | 1 5 10 10 5 1 |
| 6 | 1 6 15 20 15 6 1 |
| 7 | 1 7 21 35 35 21 7 1 |
| ... | ... |

Cada coeficiente se forma sumando los dos que yacen encima de él (a la izquierda y a la derecha).

*Propiedades de los coeficientes binomiales:*

1) Los coeficientes en la fórmula de Newton crecen hasta la mitad de la fórmula y después decrecen,

2) los coeficientes equidistantes del comienzo y del extremo son iguales,

3) la suma de los coeficientes del binomio de $n$-ésimo grado es igual a $2^n$,

4) la suma de los coeficientes que yacen en los lugares impares, es igual a la suma de los coeficientes que yacen en los lugares pares.

POTENCIA DE LA DIFERENCIA:

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$$
$$\dots + (-1)^m \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + \dots (-1)^n b^n.$$

GENERALIZACIÓN A CUALQUIER POTENCIA. La fórmula (✻) se puede extender a un exponente negativo o fraccionario $n$; en este caso $(a+b)^n$ para $|b| < a$ se representa en forma de una serie infinita (véanse las págs. 379-380):

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots$$

---

* Se llaman también números combinatorios. *(N. de la Edit).*

** Algunos autores lo llaman triángulo de Tartaglia. *(N. de la Edit).*

# III. GEOMETRÍA

## A. PLANIMETRÍA

### *1. Figuras planas*

EL TRIÁNGULO. La suma de dos lados de un triángulo siempre es mayor que el tercero: $b+c > a$ (fig. 79). La suma de los ángulos de un triángulo $\alpha+\beta+\gamma = 180°$. Un triángulo está completamente determinado si se dan: 1) tres lados, o 2) dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, o 3) un lado y los dos ángulos adyacentes a él. Si se dan dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, entonces con estos datos se pueden determinar dos triángulos, uno o ninguno (véase fig. 80, sobre esto véase más detalladamente en la pág. 216).

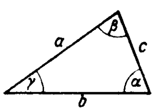



Fig. 79

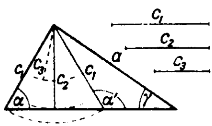



Fig. 80

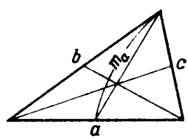



Fig. 81

Se llama *mediana* de un triángulo a la recta que une un vértice con el punto medio del lado opuesto del triángulo. Las medianas de un triángulo concurren en un punto llamado centro de gravedad del triángulo*, (fig. 81) y están divididas por este punto en la razón 2 : 1 (contando desde el vértice del ángulo). La longitud de la mediana trazada en el lado $a$ es: $m_a\ \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$ (véase también la pág. 216).

Se llama *bisectriz* de un triángulo a la recta que divide a un ángulo interior del mismo en dos partes iguales. Las bisectrices del triángulo

* También se llama baricentro. *(N. de la Red.)*

concurren en un punto que es el centro de la circunferencia inscrita* (fig. 82); respecto del radio $r$ de la circunferencia inscrita, véase la pág. 216. La longitud de la bisectriz del ángulo $\alpha$ (véase también la pág. 216) es: $l_\alpha = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^2-a^2]}}{b+c}$. Si la bisectriz divide el lado $a$ en los segmentos $m$ y $n$, entonces $m : n = c : b$.

El centro de la circunferencia circunscrita se encuentra en el punto de intersección de las perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados del triángulo (fig. 83). Respecto del radio de la circunferencia circunscrita $R$, véase pág. 216.

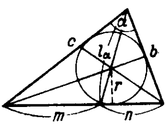



Fig. 82

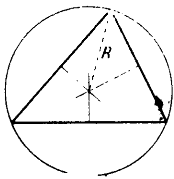



Fig. 83

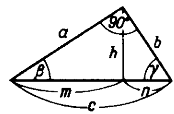



Fig. 84

Se llama *altura* de un triángulo a la perpendicular bajada desde un vértice del triángulo al lado opuesto. Las alturas del triángulo concurren en un punto llamado *ortocentro*. La longitud de la altura, véase en la pág. 216.

Si dos lados de un triángulo son iguales (triángulo *isósceles*), la altura, la mediana y la bisectriz trazadas en el otro lado coinciden. La coincidencia de dos de estas líneas es condición suficiente para que el triángulo sea isósceles.

En un triángulo *equilátero* ($a = b = c$) los centros de las circunferencias inscrita y circunscrita, el centro de gravedad y el ortocentro coinciden.

*Línea media* es la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralela al tercer lado e igual a la mitad de él.

*El área* del triángulo es: $S = {}^1/_2 bh_b^{**} = {}^1/_2 ab \operatorname{sen} \gamma = {}^1/_2 r(a+b+c) = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, donde $p = {}^1/_2(a+b+c)$.

TRIÁNGULO RECTÁNGULO (fig. 84): $c$ es la hipotenusa, $a$ y $b$ son los catetos, $a^2+b^2 = c^2$ (teorema de Pitágoras). $h^2 = mn$, $a^2 = mc$, $b^2 = nc$. El área $S = {}^1/_2 ab = {}^1/_2 a^2 \operatorname{tg} \beta = {}^1/_4 c^2 \operatorname{sen} 2\beta$.

* Este punto se llama incentro. *(N. de la Red.)*
** Por $h_b$ se designa la altura bajada al lado $b$.

Véanse en las págs. 215-216 las fórmulas trigonométricas referentes al triángulo.

Los triángulos (como también los polígonos con igual número de lados) son *semejantes* si tienen los ángulos correspondientes iguales y los lados homólogos proporcionales. Para la semejanza de los triángulos es suficiente que se cumpla una de las siguientes condiciones: 1) los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los tres lados del otro; 2) dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos del otro triángulo; 3) dos lados de un triángulo son proporcionales a dos lados del otro triángulo y los ángulos comprendidos entre ellos son iguales.

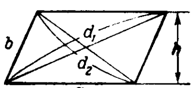


Fig. 85

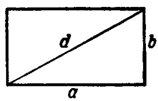


Fig. 86

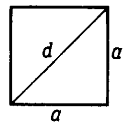


Fig. 87

Las áreas de las figuras semejantes son proporcionales a los cuadrados de los elementos lineales homólogos (los lados, las alturas, las diagonales, etc.).

Paralelogramos (fig. 85). Las propiedades fundamentales son: 1) los lados opuestos son iguales, 2) los lados opuestos son paralelos, 3) las diagonales se cortan por la mitad en el punto de intersección, 4) los ángulos opuestos son iguales. Si un cuadrilátero tiene una de estas propiedades o si un par de sus lados opuestos son iguales y paralelos, entonces todas las propiedades restantes se obtienen como corolarios.

La relación entre las diagonales y los lados es: $d_1^2+d_2^2 = 2(a^2+b^2)$. *El área* es $S = ah$.

El rectángulo y el cuadrado. Un paralelogramo es *un rectángulo* (fig. 86) si tiene: 1) todos los ángulos rectos o 2) las diagonales iguales (una de estas propiedades es consecuencia de la otra). El área es $S = ab$.

Un rectángulo es *un cuadrado* (fig. 87), si $a = b$; $d = \sqrt{2}\,a \approx 1{,}414a$; $a = \frac{\sqrt{2}}{2}\,d \approx 0{,}707d$. *El área* es $S = a^2 = \frac{1}{2}\,d^2$.

Rombo. Un paralelogramo es *un rombo* (fig. 88) si tiene: 1) todos los lados iguales, 2) las diagonales respectivamente perpendiculares, 3) las diagonales dividen por la mitad los ángulos del paralelogramo (el cumplimiento de una de estas propiedades da como corolario las dos restantes). $d_1 = 2a \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$; $d_2 = 2a \cos \frac{\alpha}{2}$; $d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$. *El área es* $S = ah = a^2 \operatorname{sen} \alpha = {}^1/_2 d_1 d_2$.

EL TRAPECIO es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos (fig. 89), $a$ y $b$ son *las bases* del trapecio, $h$ es *la altura*, $m$ es *la línea media* (o sea, la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos y es paralela a las bases): $m = \frac{1}{2}(a+b)$.

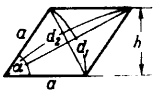



Fig. 88

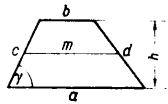



Fig. 89

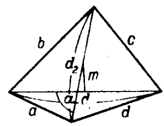
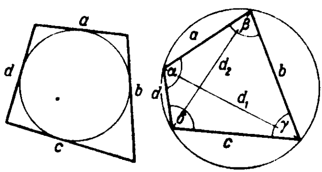



Fig. 90




a) b)

Fig. 91

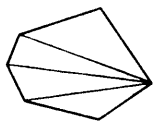


Fig. 92

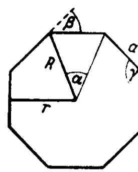



Fig. 93

*El área* es: $S = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$. Un trapecio es *isósceles* si $d = c$. En este caso $S = (a - c\cos\gamma)c \operatorname{sen}\gamma = (b + c\cos\gamma)c \operatorname{sen}\gamma$.

CUADRILÁTERO (fig. 90). La suma de los ángulos interiores de todo cuadrilátero convexo es igual a 360°. $a^2+b^2+c^2+d^2 = d_1^2+d_2^2+4m^2$, $m$ es el segmento que une los puntos medios de las diagonales. *El área* es $S = {}^1/_2 d_1 d_2 \operatorname{sen}\alpha$.

En un cuadrilátero se puede inscribir una circunferencia (fig. 91, $a$) si, y sólo si $a+c = b+d$. Se puede circunscribir una circunferencia a un cuadrilátero (fig. 91, $b$) si, y sólo si $\alpha+\gamma = \beta+\delta = 180°$. Para un cuadrilátero inscrito se cumple que: $ac+bd = d_1 d_2$. El área del cuadrilátero inscrito es $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, donde $p = {}^1/_2(a+b+c+d)$.

POLÍGONO (fig. 92). Si el número de lados es igual a $n$, la suma de los ángulos interiores es igual a $180°(n-2)$. La suma de los ángulos exteriores es igual a 360°. *El área* se determina dividiendo el polígono en triángulos.

Un polígono es *regular* si tiene todos sus lados y sus ángulos iguales entre sí. Para los polígonos regulares que tienen $n$ lados (fig. 93) se tiene que: el ángulo central $\alpha = 360°: n$, el ángulo exterior $\beta = 360°: n$, el ángulo interior $\gamma = 180° - \beta$. Si $R$ es el radio de la circunferencia circunscrita y $r$ el radio de la circunferencia inscrita *(apotema)*, entonces el lado $a = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = 2r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. *El área* $S = {}^1/_2 nar = nr^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = {}^1/_2 nR^2 \operatorname{sen} \alpha = {}^1/_4 na^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. En la tabla abajo véanse los datos de cada polígono regular.

## Elementos de los polígonos regulares

Notaciones: $n$ es el número de lados, $a$ es el lado, $R$ es el radio de la circunferencia circunscrita, $r$ es el apotema (radio de la circunferencia inscrita).

| $n$ | $\frac{S}{a^2}$ | $\frac{S}{R^2}$ | $\frac{S}{r^2}$ | $\frac{R}{a}$ | $\frac{R}{r}$ | $\frac{a}{R}$ | $\frac{a}{r}$ | $\frac{r}{R}$ | $\frac{r}{a}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0,4330 | 1,2990 | 5,1962 | 0,5774 | 2,0000 | 1,7321 | 3,4641 | 0,5000 | 0,2887 |
| 4 | 1,0000 | 2,0000 | 4,0000 | 0,7071 | 1,4142 | 1,4142 | 2,0000 | 0,7071 | 0,5000 |
| 5 | 1,7205 | 2,3776 | 3,6327 | 0,8507 | 1,2361 | 1,1756 | 1,4531 | 0,8090 | 0,6882 |
| 6 | 2,5981 | 2,5981 | 3,4641 | 1,0000 | 1,1547 | 1,0000 | 1,1547 | 0,8660 | 0,8660 |
| 7 | 3,6339 | 2,7364 | 3,3710 | 1,1524 | 1,1099 | 0,8678 | 0,9631 | 0,9010 | 1,0383 |
| 8 | 4,8284 | 2,8284 | 3,3137 | 1,3066 | 1,0824 | 0,7654 | 0,8284 | 0,9239 | 1,2071 |
| 9 | 6,1818 | 2,8925 | 3,2757 | 1,4619 | 1,0642 | 0,6840 | 0,7279 | 0,9397 | 1,3737 |
| 10 | 7,6942 | 2,9389 | 3,2492 | 1,6180 | 1,0515 | 0,6180 | 0,6498 | 0,9511 | 1,5388 |
| 12 | 11,196 | 3,0000 | 3,2154 | 1,9319 | 1,0353 | 0,5176 | 0,5359 | 0,9659 | 1,8660 |
| 15 | 17,642 | 3,0505 | 3,1883 | 2,4049 | 1,0223 | 0,4158 | 0,4251 | 0,9781 | 2,3523 |
| 16 | 20,109 | 3,0615 | 3,1826 | 2,5629 | 1,0196 | 0,3902 | 0,3978 | 0,9808 | 2,5137 |
| 20 | 31,569 | 3,0902 | 3,1677 | 3,1962 | 1,0125 | 0,3129 | 0,3168 | 0,9877 | 3,1569 |
| 24 | 45,575 | 3,1058 | 3,1597 | 3,8306 | 1,0086 | 0,2611 | 0,2633 | 0,9914 | 3,7979 |
| 32 | 81,225 | 3,1214 | 3,1517 | 5,1012 | 1,0048 | 0,1960 | 0,1970 | 0,9952 | 5,0766 |
| 48 | 183,08 | 3,1326 | 3,1461 | 7,6449 | 1,0021 | 0,1308 | 0,1311 | 0,9979 | 7,6285 |
| 64 | 325,69 | 3,1366 | 3,1441 | 10,190 | 1,0012 | 0,0981 | 0,0983 | 0,9988 | 10,178 |

Circunferencia. El radio es $r$ y el diámetro es $d$. *Ángulos relacionados con la circunferencia** (fig. 94): el ángulo inscrito es $\alpha = {}^1/_2 \overset{\frown}{BC}$, el ángulo entre la cuerda y la tangente es $\beta = {}^1/_2 \overset{\frown}{AC}$; el ángulo entre las cuerdas (fig. 95) es $\gamma = {}^1/_2(\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{ED})$; el ángulo entre las secantes (fig. 96) es $\alpha = {}^1/_2(\overset{\frown}{DE} - \overset{\frown}{BC})$; el ángulo entre la tangente y la secante

* En estas igualdades no figura la longitud del arco, sino su medida angular, la cual coincide con la medida del ángulo central correspondiente.

es $\beta = {}^1/_2(\overset{\frown}{TE}-\overset{\frown}{TB})$; el ángulo entre las tangentes (fig. 97) es $\alpha = {}^1/_2(\overset{\frown}{BDC}-\overset{\frown}{BEC})$.

Para *las cuerdas que se cortan* (fig. 95) se cumple que: $AC \cdot AD = AB \cdot AE = r^2 - m^2$.

Para *las secantes* se cumple que (fig. 96): $AB \cdot AE = AC \cdot AD = AT^2 = m^2 - r^2$.

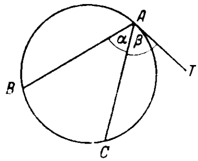



Fig. 94

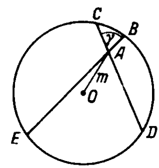



Fig. 95

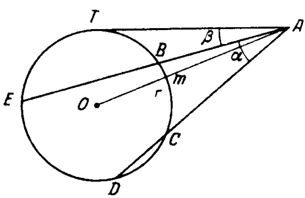



Fig. 96

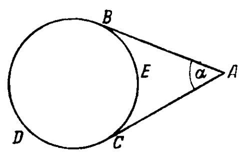



Fig. 97

*La longitud de la circunferencia* es $C$ y *el área del círculo* es $S$ ($r$ es el radio, $d$ es el diámetro)

$$\pi = \frac{C}{d} = 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ \ldots$$

$$C = 2\pi r \approx 6{,}283\, r, \qquad C = \pi d \approx 3{,}142\, d, \qquad C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3{,}545\sqrt{S}.$$

$$S = \pi r^2 \approx 3{,}142\, r^2, \qquad S = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}785\, d^2, \qquad S = \frac{Cd}{4} = 0{,}25\, Cd.$$

$$r = \frac{C}{2\pi} \approx 0{,}159\, C, \qquad d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 1{,}128\sqrt{S};$$

véase también la tabla en las págs. 68-71.

SEGMENTO Y SECTOR (fig. 98). $r$ es el radio, $l$ es la longitud del arco, $a$ es la cuerda, $\alpha$ es el ángulo central (en grados), $h$ es la flecha del segmento.

$$a = 2\sqrt{2hr-h^2} = 2r\,\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2};$$

$$h = r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}} = r\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{a}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{4};\quad l = \frac{2\pi r\alpha}{360} \approx 0{,}01745r\alpha.$$

Aproximadamente es:

1) $l = \frac{8b-a}{3}$

o

2) $l = \sqrt{a^2+\frac{16}{3}h^2}$.

*El área del sector* es

$$S = \frac{\pi r^2\alpha}{360} \approx 0{,}00873r^2a.$$

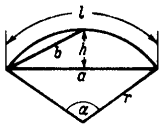


Fig. 98

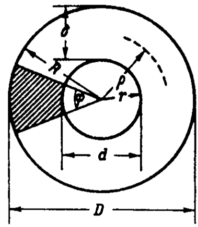


Fig. 99

*El área del segmento* es $S_1 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\mathrm{sen}\,a\right) = \frac{1}{2}\,[lr-a(r-h)]$.

Aproximadamente es $S_1 = \frac{h}{15}\,(6a+8b)$. Véanse en las págs. 72-76 las tablas para $S_1$, $l$, $h$ y $a$.

ANILLO CIRCULAR (fig. 99). $D = 2R$ es el diámetro exterior, $d = 2r$ es el diámetro interior, $\rho = \frac{(R+r)}{2}$ es el radio medio, $\delta = R-r$ es el grosor del anillo.

*El área del anillo* es $S = \pi(R^2-r^2) = \frac{\pi}{4}\,(D^2-d^2) = 2\pi\rho\delta$.

El área de la parte del anillo (sombreada en la fig. 99) de ángulo central $\varphi$ (en grados) es:

$$S = \frac{\varphi\pi}{360}\,(R^2-r^2) = \frac{\varphi\pi}{90}\,(D^2-d^2) = \frac{\varphi\pi}{180}\,\rho\delta.$$

## B. ESTEREOMETRÍA

### 2. *Rectas y planos en el espacio*

DOS RECTAS pertenecientes a un mismo plano o tienen un punto común o no tienen ninguno. En el último caso las rectas son *paralelas*. Si por dos rectas no se puede trazar un plano, entonces se dice que *se cruzan*.

EL ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN se mide por el ángulo formado por las rectas que parten de un mismo punto y son paralelas a ellas (fig. 100). La distancia entre dos rectas que se cruzan se mide por el segmento de recta que es perpendicular a ambas rectas.

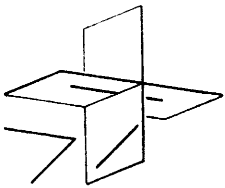


Fig. 100

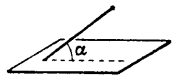


Fig. 101

DOS PLANOS se cortan en una recta o no tienen ningún punto común. En el último caso los planos son *paralelos*. Si dos planos son perpendiculares a una misma recta o si en cada uno de ellos hay dos rectas concurrentes que son, respectivamente, paralelas entre sí, entonces estos planos son paralelos entre sí.

LA RECTA Y EL PLANO. Una recta puede estar situada totalmente en un plano dado, puede tener un punto común con él o no tener ninguno. En el último caso la recta es *paralela* al plano. El ángulo entre una recta y un plano se mide por el ángulo entre la recta y su proyección sobre el plano (fig. 101). Si una recta es perpendicular a dos rectas concurrentes del plano, entonces ella es perpendicular a cualquier recta del plano (es decir, es *perpendicular al plano*).

## 3. *Angulos del espacio*

ANGULO DIEDRO es la figura formada por dos semiplanos que parten de una misma recta. El ángulo diedro se mide por su *ángulo lineal ABC* (fig. 102), es decir, por el ángulo formado por las perpendiculares a *la arista DE* del ángulo diedro y trazadas desde un mismo punto *B* en ambos planos *(caras)*.

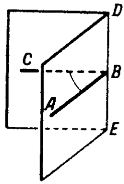


Fig. 102

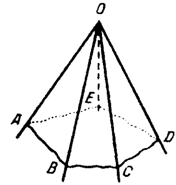


Fig. 103

EL ÁNGULO POLIEDRO *OABCDE* (fig. 103) está formado por varios planos *(caras)* que tienen un punto común *(el vértice)* y que se cortan respectivamente en las rectas *OA*, *OB*, ... *(las aristas)*. Dos aristas pertenecientes a una misma cara forman *un ángulo plano* del ángulo poliedro y dos caras adyacentes, un ángulo diedro. Dos ángulos poliedros son *iguales* si, al ser superpuestos, coinciden; para esto deben ser respectivamente iguales los elementos de los ángulos poliedros (los ángulos diedros y los planos). Si los elementos correspondientemente iguales del ángulo poliedro están situados en orden inverso, entonces los ángulos poliedros, al ser superpuestos, no coinciden; en este caso son *simétricos*, es decir, pueden ser reducidos a la posición representada en la fig. 104.

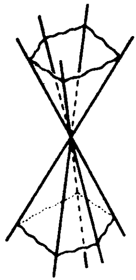


Fig. 104

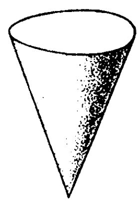


Fig. 105

El ángulo poliedro *convexo* está totalmente situado hacia un lado de cada una de sus caras. *La suma de los ángulos planos* $AOB + BOC + + \ldots + EOA$ (fig. 103) de cualquier ángulo poliedro convexo es menor que 360°.

Los ángulos triedros son iguales si: 1) son iguales los ángulos diedros comprendidos entre dos ángulos planos correspondientemente iguales y con la misma ubicación o 2) son iguales los ángulos planos comprendidos entre dos ángulos diedros correspondientemente iguales y con la misma ubicación o 3) son correspondientemente iguales tres ángulos planos y con la misma ubicación, o 4) son correspondientemente iguales tres ángulos diedros y con la misma ubicación.

Angulo sólido es la parte del espacio limitada por rectas que están trazadas desde un mismo punto (vértice) a todos los puntos de alguna curva cerrada (fig. 105). Este caracteriza *el ángulo visual* bajo el cual se ve la curva dada desde el vértice. La medida del ángulo sólido es el área que recorta el ángulo sólido en la esfera de radio uno con centro en el vértice. Por ejemplo, para el cono con el ángulo en el vértice de 120°, el ángulo sólido es igual a $\pi$ (véanse las fórmulas en la pág. 203).

## 4. *Poliedros*

*Notaciones:* $V$ es el volumen, $S$ es la superficie total, $M$ es la superficie lateral, $h$ es la altura, $F$ es el área de la base.

Un poliedro es un cuerpo limitado por planos.

Prisma (fig. 106). Las bases son polígonos iguales; las caras laterales son paralelogramos. Un prisma es *recto* si las aristas son perpendiculares al plano de la base. Un prisma es *regular* si es recto y sus bases son polígonos regulares.

$M = pl$, donde $l$ es la arista, $p$ es el perímetro de la sección del prisma mediante un plano perpendicular a la arista. $S = M+2F$; $V = F \cdot h$.

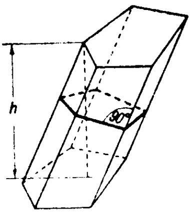



Fig. 106

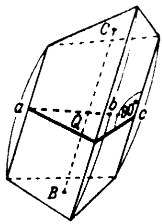



Fig. 107

Para un prisma triangular truncado por un plano no paralelo a la base, $V = \frac{1}{3}(a+b+c)Q$ (fig. 107), donde $a$, $b$, y $c$ son las longitudes de las aristas paralelas y $Q$ el área de la sección perpendicular. Para un prisma de $n$ caras truncado por un plano no paralelo a la base, $V = lQ$, donde $l$ es la longitud de la línea $BC$ que une los centros de gravedad de las bases y $Q$ el área de la sección perpendicular a esta línea.

El paralelepípedo (fig. 108) es un prisma cuyas bases son paralelogramos. En un paralelepípedo todas las diagonales concurren en un mismo punto, en el cual se dividen por la mitad. Un paralelepípedo es *rectangular*, si es recto y sus bases son rectángulos. En un paralelepípedo rectangular (fig. 109) todas las diagonales son iguales. Si $a$, $b$ y $c$ son las aristas de un paralelepípedo rectangular y $d$ es su diagonal, entonces $d^2 = a^2+b^2+c^2$, $V = abc$, $S = 2(ab+bc+ca)$.

*El cubo* es un paralelepípedo rectangular con aristas iguales:

$$a = b = c, \quad d^2 = 3a^2,$$

$$V = a^3, \qquad S = 6a^2.$$

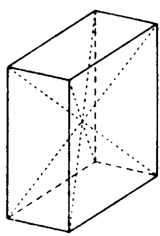


Fig. 108

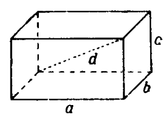



Fig. 109

Pirámide (fig. 110). La base es un polígono cualquiera, las caras laterales son triángulos que parten de un mismo vértice. La pirámide se llama $n$-angular, si tiene $n$ caras *laterales* (y junto con la base tiene $n+1$ caras). $V = \frac{1}{3} Fh$.

Si la pirámide está cortada por un plano paralelo a la base, entonces

$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \frac{SC_1}{C_1C} = \ldots = \frac{SO_1}{O_1O};$$

$$\frac{\text{el área } ABCDEF}{\text{el área } A_1B_1C_1D_1E_1F_1} = \left(\frac{SO}{SO_1}\right)^2,$$

*SO* es la *altura* de la pirámide, que es la perpendicular bajada desde el vértice hasta la base.

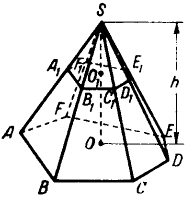


Fig. 110

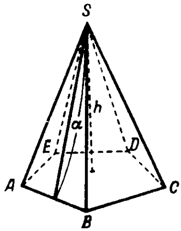


Fig. 111

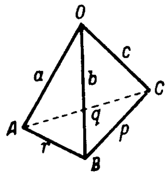


Fig. 112

Una pirámide es *regular* (fig. 111) si la base es un polígono regular y la altura pasa por su centro.

Para la pirámide regular $M = {}^1/_2 p\alpha$ [$p$ es el perímetro de la base, $\alpha$ es la apotema de la pirámide regular (la altura de cualquiera de sus caras laterales)].

El tetraedro es una pirámide triangular (fig. 112). Si $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $BC = p$, $CA = q$, $AB = r$, entonces*

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & r^2 & q^2 & a^2 & 1 \\ r^2 & 0 & p^2 & b^2 & 1 \\ q^2 & p^2 & 0 & c^2 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Tronco de pirámide (el plano de intersección es paralelo a la base (fig. 113). Si $F$ y $f$ son las áreas de las bases, $h$ es la altura (la distancia entre las bases), $A$ y $a$ son dos lados de las bases correspondientes, entonces

$$V = \frac{1}{3}h\left|F + f + \sqrt{Ff}\right| = \frac{1}{3}hF\left[1 + \frac{a}{A} + \left(\frac{a}{A}\right)^2\right].$$

* Véanse los determinantes en la pág. 166.

Para el tronco de pirámide regular $M = \frac{P+p}{2}\alpha$ donde $P$ y $p$ son los perímetros de las bases, $\alpha$ es la apotema.

OBELISCO. Las bases son rectángulos situados en planos paralelos, las caras laterales opuestas tienen igual inclinación con la base, pero no se cortan en un punto (fig. 114). Si $a$, $b$ y $a_1$, $b_1$ son los lados de la base y $h$ es la altura, entonces

$$V = \frac{h}{6}\,[(2a+a_1)b+(2a_1+a)b_1] = \frac{h}{6}\,[ab+(a+a_1)\,(b+b_1)+a_1b_1].$$

CUÑA. La base es un rectángulo, las caras laterales son triángulos isósceles y trapecios isósceles (fig. 115). $V = \frac{1}{6}(2a+a_1)bh.$

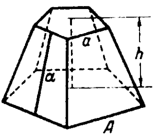


Fig. 113

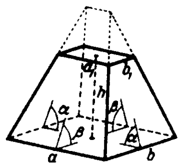


Fig. 114

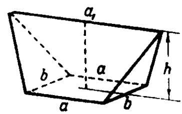


Fig. 115

POLIEDROS REGULARES. Son los poliedros cuyas caras son todas, polígonos regulares y los ángulos poliedros son todos iguales.
Existen cinco poliedros regulares (fig. 116), cuyos datos se exponen en la tabla.

*Elementos de los polígonos regulares* ($a$ es la longitud de la arista).

| Denominación | Número de caras y sus formas | Número de | | Superficie total | Volumen |
|---|---|---|---|---|---|
| | | aristas | vértices | | |
| Tetraedro | 4 triángulos | 6 | 4 | $1{,}7321\cdot a^2$ | $0{,}1179\cdot a^3$ |
| Cubo | 6 cuadrados | 12 | 8 | $6\cdot a^2$ | $a^3$ |
| Octaedro | 8 triángulos | 12 | 6 | $3{,}4641\cdot a^2$ | $0{,}4714\cdot a^3$ |
| Dodecaedro | 12 pentágonos | 30 | 20 | $20{,}6457\cdot a^2$ | $7{,}6631\cdot a^3$ |
| Icosaedro | 20 triángulos | 30 | 12 | $8{,}6603\cdot a^2$ | $2{,}1817\cdot a^3$ |

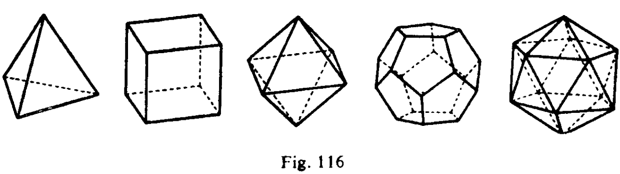


Fig. 116

*Teorema de Euler*. Si $e$ es el número de vértices del poliedro, $f$ es el número de caras y $k$ es el número de aristas, entonces $e-k+f=2$ (con la condición de que el poliedro sea convexo o se pueda transformar en convexo mediante una deformación continua). Véanse en la tabla *los ejemplos* de poliedros regulares.

## 5. *Cuerpos redondos*

*Notaciones:* $V$ es el volumen, $S$ es la superficie total, $M$ es la superficie lateral, $h$ es la altura, $F$ es la superficie de la base.

SUPERFICIE CILÍNDRICA (fig. 117). Es la superficie generada por *una línea recta (generatriz)* que se desplaza paralelamente a una dirección dada a lo largo de una curva *(directriz)*.

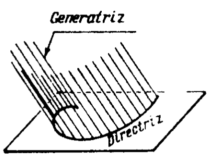


Fig. 117

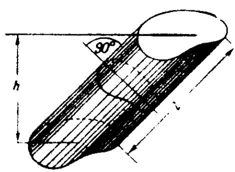


Fig. 118

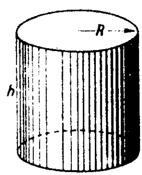


Fig. 119

CILINDRO es un cuerpo limitado por una superficie cilíndrica cuya directriz es cerrada y por dos planos paralelos, que son las bases del cilindro. Para todo cilindro (fig. 118) ($p$ es el perímetro de la base, $s$ es el perímetro de la sección perpendicular a la generatriz, $Q$ es su área, $l$ es la longitud de la generatriz) se cumple que:

$$M = ph = sl;\quad V = Fh = Ql.$$

EL CILINDRO CIRCULAR RECTO tiene por base un círculo y sus generatrices son perpendiculares al plano de la base (fig. 119); $R$ es el radio de la base;

$$M = 2\pi Rh;\quad S = 2\pi R(R+h);\quad V = \pi R^2 h.$$

CILINDRO TRUNCADO CIRCULAR (fig. 120):

$$M = \pi R(h_1+h_2),\quad S = \pi R\left[h_1+h_2+R+\sqrt{R^2+\left(\frac{h_2-h_1}{2}\right)^2}\right];$$

$$V = \pi R^2\,\frac{h_1+h_2}{2}.$$

**Segmento cilíndrico** (las designaciones, véanse en la fig. 121; $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ está expresado en radianes):

$$V = \frac{h}{3b}\,[a(3R^2 - a^2) + 3R^2(b-R)\alpha] = \frac{hR^3}{b}\left(\operatorname{sen}\alpha - \frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{3} - \alpha\cos\alpha\right).$$

$$M = \frac{2Rh}{b}\,[(b-R)\alpha + a]$$

(las fórmulas son válidas para el caso $b > R$, $\varphi > \pi$).

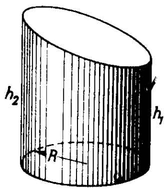


Fig. 120

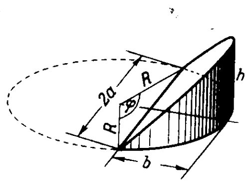


Fig. 121

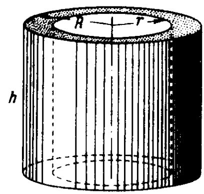


Fig. 122

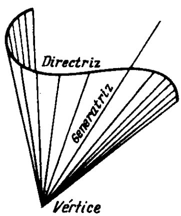


Fig. 123

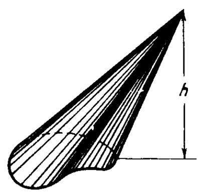


Fig. 124

**Tubo cilíndrico** (fig. 122). $R$ y $r$ son los radios exterior e interior; $\delta = R - r$, $\rho = \frac{R+r}{2}$ (el radio medio):

$$V = \pi h(R^2 - r^2) = \pi h\delta(2R - \delta) = \pi h\delta(2r + \delta) = 2\pi h\delta\rho.$$

**La superficie cónica** (fig. 123) está engendrada por una línea recta *(generatriz)* que se desplaza a lo largo de una línea curva *(directriz)* y tiene un punto fijo *(vértice)*.

**El cono** (fig. 124) está limitado por una superficie cónica cuya directriz es cerrada y por un plano que forma la base. Para cualquier cono $V = \frac{1}{3}\,hF$.

El cono recto circular (fig. 125) tiene por base una circunferencia y su altura pasa por el centro de la circunferencia de la base ($l$ es la longitud de la generatriz y $R$, el radio de la base):

$$M = \pi R l = \pi R\sqrt{R^2+h^2}; \quad S = \pi R(R+1); \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Para *el cono truncado recto* (fig. 126) se tiene que:

$$l = \sqrt{h^2+(R-r)^2}; \quad M = \pi l(R+r); \quad V = \frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr);$$

$$H = h + \frac{hr}{R-r}.$$

Las secciones cónicas véanse en la pág. 244.

Esfera. $S$ es la superficie esférica, $R$ es el radio de la esfera, $D = 2R$ es el diámetro de la esfera (fig. 127). Toda sección de la esfera por un

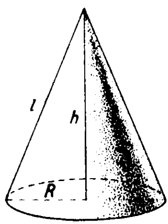


Fig. 125

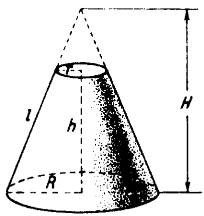


Fig. 126

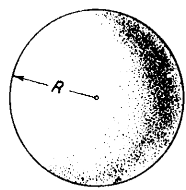


Fig. 127

plano, es un círculo. *Círculo máximo* es el círculo de radio $R$ que se obtiene de la intersección de la esfera por un plano que pasa por su centro. Por dos puntos cualesquiera de la esfera (que no sean los extremos opuestos de un diámetro) siempre se puede trazar un círculo máximo y sólo uno. El arco menor de este círculo mayor es la distancia más corta entre los puntos dados en la esfera.

Véase en las págs. 220-221 la geometría en la esfera.

El área de la esfera y el volumen son:

$$S = 4\pi R^2 \approx 12{,}57R^2, \quad S = \pi D^2 \approx 3{,}142D^2, \quad S = \sqrt[3]{36\pi V^2} \approx$$

$$\approx 4{,}836\sqrt[3]{V^2};$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \approx 4{,}189R^3, \quad V = \frac{\pi D^3}{6} \approx 0{,}5236D^3,$$

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{S^3}{\pi}} \approx 0{,}09403\sqrt{S^3};$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 0{,}2821\sqrt{S}; \quad R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 0{,}6204\sqrt[3]{V}.$$

SECTOR ESFÉRICO (fig. 128):

$$S = \pi R(2h+a); \quad V = \frac{2\pi R^2 h}{3}.$$

SEGMENTO ESFÉRICO (fig. 129):

$$a^2 = h(2R-h); \quad M = 2\pi Rh = \pi(a^2+h^2); \quad S = \pi(2Rh+a^2) =$$

$$= \pi(h^2+2a^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2+h^2) = \frac{1}{2}\pi h^2(3R-h).$$

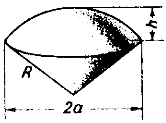


Fig. 128

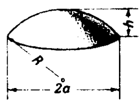


Fig. 129

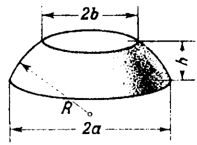


Fig. 130

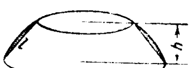


Fig. 131

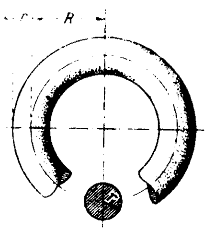


Fig. 132

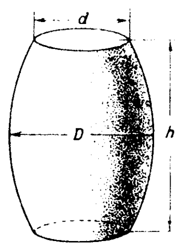


Fig. 133

ZONA ESFÉRICA (fig. 130):

$$R^2 = a^2 + \frac{(a^2-b^2-h^2)^2}{2h}; \quad M = 2\pi Rh;$$

$$S = \pi(2Rh+a^2+b^2); \quad V = \frac{1}{6}\pi h(3a^2+3b^2+h^2).$$

Si $V_1$ es el volumen del cono truncado inscrito en una zona esférica (fig. 131) y $l$ es su generatriz, entonces $V - V_1 = \frac{1}{6}\pi hl^2$.

EL TORO (fig. 132) es la superficie formada por la revolución de una circunferencia alrededor de un eje que yace en el plano de la circunferencia y no la corta.

$$S = 4\pi^2 Rr \approx 39{,}48Rr, \qquad S = \pi^2 Dd \approx 9{,}870Dd,$$
$$V = 2\pi^2 Rr^2 \approx 19{,}74Rr^2, \qquad V = {}^1/_4\pi^2 Dd^2 \approx 2{,}467Dd^2.$$

TONEL (fig. 133). Para el tonel circular (la generatriz es un arco de circunferencia), aproximadamente, se tiene:

$$V = 0{,}262h(2D^2+d^2) \quad \text{o} \quad V = 0{,}0873h(2D+d)^2.$$

Para el tonel parabólico, se tiene:

$$V = \frac{\pi h}{15}\left(2D^2+Dd+\frac{3}{4}d^2\right) = 0{,}05236h(8D^2+4Dd+3d^2).$$

# IV. TRIGONOMETRÍA

## A. TRIGONOMETRÍA PLANA

### *1. Funciones trigonométricas*

SISTEMA RADIAL DE MEDICIÓN DE LOS ÁNGULOS. En los problemas teóricos, además de las medidas de ángulos en grados que se practica, suele emplearse la medición en radianes: para toda circunferencia el valor de un ángulo central $\alpha$, se mide por la razón entre la longitud del arco $l$ correspondiente a este ángulo y la longitud del radio $r$ de esta circunferencia: $\alpha = \frac{l}{r}$.

En esta medición se toma por unidad el *radián*, que es el ángulo central correspondiente a un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia. 1 radián es igual a $57°\,17'\,44'',8$ o $57°, 2958$; $1° =$ $= 0{,}017453$ de radián. La conversión de un sistema de medida a otro se efectúa mediante las fórmulas:

$$\alpha° = \frac{180}{\pi}\,\alpha\ (\text{radianes})^*, \quad \alpha\ (\text{radianes}) = \frac{\pi}{180}\,\alpha° .$$

En particular, $360° = 2\pi$, $180° = \pi$, $90° = \frac{\pi}{2}$, $270° = \frac{3\pi}{2}$, etc. Véanse en la pág. 77 las tablas de conversión de grados a radianes.

DEFINICIONES. ***Las funciones trigonométricas*** de un ángulo $\alpha$ se definen mediante el círculo trigonométrico** (el radio $R=1$) o también mediante el triángulo rectángulo (para los ángulos agudos) (fig. 134, *a* y *b*).

---

* El radián no tiene una designación especial; un ángulo que mide $\alpha$ radianes se designa simplemente por "$\alpha$".

** El ángulo $\alpha$ se mide desde el radio *fijo OA* hasta el radio móvil *OC* en sentido contrario al de las agujas de un reloj (dirección positiva).

*seno:* $\operatorname{sen}\ \alpha = BC = \dfrac{a}{c}$,

*coseno:* $\cos\alpha = OB = \dfrac{b}{c}$,

*tangente:* $\operatorname{tg}\alpha = AD = \dfrac{a}{b}$,

*cotangente:* $\operatorname{ctg}\alpha = EF = \dfrac{b}{a}$,

*secante:* $\sec\alpha = OD = \dfrac{c}{b}$,

*cosecante:* $\operatorname{cosec}\alpha = OF = \dfrac{c}{a}$.

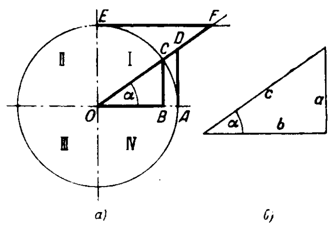



Fig. 134

Los signos. A las funciones se les anota un signo determinado en relación con el cuadrante del círculo trigonométrico (fig. 134, *a*) en que esté situado el radio *móvil OC*, de acuerdo a la siguiente tabla:

| Cuadrante | Valor del ángulo | sen | cos | tg | ctg | sec | cosec |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | desde 0° hasta 90° | + | + | + | + | + | + |
| II | desde 90° hasta 180° | + | − | − | − | − | + |
| III | desde 180° hasta 270° | − | − | + | + | − | − |
| IV | desde 270° hasta 360° | − | + | − | − | + | − |

*Límites de variación:*

el seno y el coseno: desde $-1$ hasta $+1$
la tangente y la cotangente: desde $-\infty$ hasta $+\infty$
la secante y la cosecante: desde $-\infty$ hasta $-1$ y desde $+1$ hasta $+\infty$.

**Los valores de las funciones** de los ángulos que sean múltiplos de 30°, 45°, están dados en la tabla de la pág. 209.

La naturaleza de la variación de las funciones trigonométricas cuando el ángulo crece desde 0° hasta 360° se determina por las gráficas representadas en la fig. 135*.

Los valores de las funciones trigonométricas de *cualquier* ángulo se hallan por las siguientes reglas:

1) Si el ángulo es mayor que 360°, las funciones se reducen a funciones de un ángulo situado entre 0° y 360° (la tangente y la cotangente al

---

* La gráfica del seno es la sinusoide ordinaria; sobre sinusoides más generales véase la pág. 104.

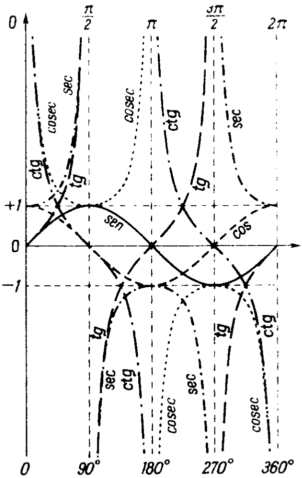



Fig. 135

ángulo entre 0° y 180°) según las fórmulas ($n$ es un número entero):

$$\begin{aligned} \text{sen } (360^\circ \cdot n+\alpha) &= \text{sen } \alpha, \\ \cos (360^\circ \cdot n+\alpha) &= \cos \alpha, \\ \text{tg } (180^\circ \cdot n+\alpha) &= \text{tg } \alpha, \\ \text{ctg } (180^\circ \cdot n+\alpha) &= \text{ctg } \alpha. \end{aligned}$$

2) Si el ángulo es negativo, la función se reduce a la función de un ángulo positivo según las fórmulas:

$$\begin{aligned} \text{sen } (-\alpha) &= \text{sen } \alpha, \\ \cos (-\alpha) &= \cos \alpha, \\ \text{tg } (-\alpha) &= -\text{tg } \alpha, \\ \text{ctg } (-\alpha) &= -\text{ctg } \alpha, \end{aligned}$$

3) Si $90^\circ < \alpha < 360^\circ$, la función se reduce a la función de un ángulo agudo según las fórmulas de reducción dadas abajo.

4) Si el ángulo es agudo: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, entonces la función se halla mediante las tablas (págs. 53-56).

Por ejemplo, $\text{sen } (-1000^\circ) = -\text{sen } 1000^\circ = -\text{sen } (360^\circ \cdot 2+280^\circ) = -\text{sen } 280^\circ = +\cos 10^\circ = +0{,}9848$*.

FÓRMULAS DE REDUCCIÓN

| Función | $\beta = 90^\circ \pm \alpha$ | $\beta = 180^\circ \pm \alpha$ | $\beta = 270^\circ \pm \alpha$ | $\beta = 360^\circ - \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| sen $\beta$ | $+\cos \alpha$ | $\mp$ sen $\alpha$ | $-\cos \alpha$ | $-$ sen $\alpha$ |
| cos $\beta$ | $\mp$ sen $\alpha$ | $-\cos \alpha$ | $\pm$ sen $\alpha$ | $+\cos \alpha$ |
| tg $\beta$ | $\mp$ ctg $\alpha$ | $\pm$ tg $\alpha$ | $\mp$ ctg $\alpha$ | $-$ tg $\alpha$ |
| ctg $\beta$ | $\mp$ tg $\alpha$ | $\pm$ ctg $\alpha$ | $\mp$ tg $\alpha$ | $-$ ctg $\alpha$ |

* Los valores de las funciones de los ángulos dados **en radianes se** encuentran en las tablas de las págs. 57-60, compuestas para los valores de los argumentos desde 0 hasta 1,60. Si el ángulo dado excede los límites de la tabla, entonces se emplean las mismas reglas y fórmulas de reducción que para los ángulos dados en grados [por ejemplo, $\text{sen } (2\pi+x) = \text{sen } x$, $\text{sen } (2\pi-x) = -\text{sen } x$, etc.].

## VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA LOS ÁNGULOS MÚLTIPLES DE 30° Y 45° $\left(\frac{\pi}{6} \text{ Y } \frac{\pi}{4}\right)$

| Función | Angulos; Ier cuadrante | | | | Angulos; IIo cuadrante | | | | | Angulos; IIIer cuadrante | | | | Angulos; IVo cuadrante | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 210° | 225° | 240° | 270° | 300° | 315° | 330° | 360° |
| | $0$ | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $1\frac{1}{6}\pi$ | $1\frac{1}{4}\pi$ | $1\frac{1}{3}\pi$ | $1\frac{1}{2}\pi$ | $1\frac{2}{3}\pi$ | $1\frac{3}{4}\pi$ | $1\frac{5}{6}\pi$ | $2\pi$ |
| sen | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| tg | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\pm\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |
| ctg | $\mp\infty$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $\mp\infty$ | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | $\mp\infty$ |
| sec | $1$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | $\pm\infty$ | $-2$ | $-\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{2}$ | $-2$ | $\mp\infty$ | $2$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $1$ |
| cosec | $\mp\infty$ | $2$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | $2$ | $\pm\infty$ | $-2$ | $-\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $-\sqrt{2}$ | $-2$ | $\mp\infty$ |

## 2. *Fórmulas fundamentales de la trigonometría*

FUNCIONES DE UN ÁNGULO:

$$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha = 1, \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha = 1,$$

$$\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha = 1, \qquad \cos\alpha\cdot\sec\alpha = 1,$$

$$\operatorname{cosec}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha = 1, \qquad \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha, \qquad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE OTRA (del mismo ángulo)*:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \sqrt{\sec^2\alpha-1} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}} = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}.$$

FUNCIONES DE LA SUMA Y DE LA DIFERENCIA DE ÁNGULOS:

$$\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\operatorname{sen}\beta, \qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\mp$$
$$\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma+$$
$$+\cos\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma,$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma-$$
$$-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\operatorname{sen}\gamma-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma.$$

FUNCIONES DE LOS ÁNGULOS MÚLTIPLES:

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha, \qquad \operatorname{sen}3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha-4\operatorname{sen}^3\alpha,$$

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha; \qquad \cos3\alpha = 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{sen}4\alpha = 8\cos^3\alpha\operatorname{sen}\alpha-4\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha,$$

$$\cos4\alpha = 8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1;$$

* En estas fórmulas delante del signo de la raíz deben ponerse los signos «+» o «−», según en que cuadrante se encuentre el ángulo.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1-3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1-6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}.$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}; \quad \operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4 \alpha - 6 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 \alpha - 4 \operatorname{ctg} \alpha},$$

para determinar el sen $n\alpha$ y el cos $n\alpha$ cuando $n$ es muy grande es conveniente emplear la fórmula de Moivre para los números complejos (pág. 570)*

$$\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos^n \alpha + in \cos^{n-1} \alpha \operatorname{sen} \alpha -$$
$$- C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha - iC_n^3 \cos^{n-3} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha + \ldots,$$

de donde

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha -$$
$$- C_n^6 \cos^{n-6} \alpha \operatorname{sen}^6 \alpha + \ldots,$$

$$\operatorname{sen} n\alpha = n \cos^{n-1} \alpha \operatorname{sen} \alpha - C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \operatorname{sen}^3 \alpha +$$
$$+ C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \operatorname{sen}^5 \alpha - \ldots,$$

FUNCIONES DEL ÁNGULO MITAD**:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{{}^1/_2(1-\cos \alpha)}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} = \frac{1-\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1+\cos \alpha},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{{}^1/_2(1+\cos \alpha)}, \qquad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} = \frac{1+\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1-\cos \alpha}.$$

SUMA Y DIFERENCIA DE FUNCIONES:

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta},$$

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\operatorname{sen} (\alpha \pm \beta)}{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}.$$

---

* $C_n^m$ son los coeficientes binominales (véanse las págs. 187-188).

** Véase la nota en la pág. anterior.

PRODUCTO DE FUNCIONES:

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)].$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma = \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta-\gamma)+\operatorname{sen}(\beta+\gamma-\alpha)+ +\operatorname{sen}(\gamma+\alpha-\beta)-\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta-\gamma)-\operatorname{sen}(\beta+\gamma-\alpha)+ +\operatorname{sen}(\gamma+\alpha-\beta)-\operatorname{sen}(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+ +\cos(\gamma+\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+ +\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)].$$

POTENCIAS DE FUNCIONES:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha), \qquad \operatorname{sen}^3\alpha = \frac{1}{4}(3\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}3\alpha),$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha), \qquad \cos^3\alpha = \frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha).$$

$$\operatorname{sen}^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3),$$

$$\cos^4\alpha = \frac{1}{8}(\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3).$$

Para calcular $\operatorname{sen}^n\alpha$ y $\cos^n\alpha$ para valores grandes de $n$, se pueden emplear sucesivamente las fórmulas del $\cos n\alpha$ y el $\operatorname{sen} n\alpha$ de la pág. 211.

## *3. Cantidades sinusoidales*

DEFINICIONES. En muchos problemas de la mecánica y de la física se consideran cantidades que dependen del tiempo $t$ y que se expresan por la fórmula

$$u = A\operatorname{sen}(\omega t+\varphi); \qquad (*)$$

tales cantidades se llaman *sinusoidales*, sus variaciones en dependencia del tiempo se llaman *vibraciones u oscilaciones armónicas*. La gráfica de la función (✳) es la sinusoide general (fig. 136), que se diferencia de la sinusoide ordinaria ($y = \text{sen}\, x$) en lo siguiente: 1) su *amplitud*, es decir, su máxima separación del eje $t$ es igual a $A$, 2) su *período* $T$("*la longitud de la onda*") es igual a $\frac{2\pi}{\omega}$ ($\omega$ es la *frecuencia de oscilación*)*, 3) su "*fase inicial*" es el ángulo $\varphi$.

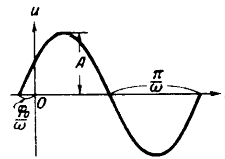


Fig. 136

La cantidad (✳) se puede expresar en la forma

$$u = a \,\text{sen}\, \omega t + b \cos \omega t, \qquad (✳✳)$$

siendo $A = \sqrt{a^2+b^2}$, $\text{tg}\, \varphi = \frac{b}{a}$; los valores $a$, $b$, $A$ y $\varphi$ pueden representarse como los elementos de un triángulo rectángulo (fig. 137).

Operaciones con cantidades sinusoidales. La suma de dos cantidades sinusoidales de una misma frecuencia $\omega$ es también una cantidad sinusoidal de la misma frecuencia:

$$A_1 \,\text{sen}\, (\omega t+\varphi_1)+A_2 \,\text{sen}\, (\omega t+\varphi_2) = A \,\text{sen}\, (\omega t+\varphi),$$

siendo

$$A = \sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2 \cos (\varphi_2-\varphi_1)},$$

$$\text{tg}\, \varphi = \frac{A_1 \,\text{sen}\, \varphi_1+A_2 \,\text{sen}\, \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1+A_2 \cos \varphi_2};$$

*la combinación lineal* de varias cantidades sinusoidales de una misma frecuencia es una cantidad sinusoidal de la misma frecuencia:

$$\Sigma c_i A_i \,\text{sen}\, (\omega t+\varphi_i) = A \,\text{sen}\, (\omega t+\varphi);$$

a búsqueda de $A$ y $\varphi$ se efectúa gráficamente por el diagrama vectorial.

Diagrama vectorial de las cantidades sinusoidales. Es convenien-e representar la cantidad sinusoidal (✳) o (✳✳) en el plano en forma de un radio vector $u$ con las coordenadas polares $\rho = A$, $\varphi$ y con las coordenadas cartesianas $x = a$, $y = b$ (véanse las págs. 228-229); la suma de dos cantidades sinusoidales se expresa como la suma de los vectores que representan a los sumandos separados (fig. 138) y la combinación lineal de varias cantidades sinusoidales se expresa como la combinación lineal correspondiente de los vectores. Generalmente, tal expresión de las cantidades sinusoidales se llama *diagrama vectorial*.

---

* En la teoría de las oscilaciones, generalmente, este valor se llama *frecuencia cíclica* o *circular*.

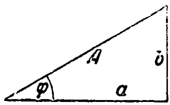



Fig. 137

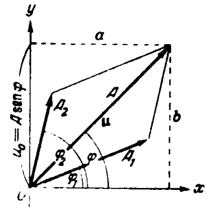



Fig. 138

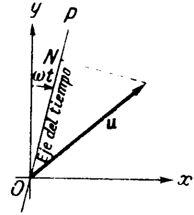



Fig. 139

El valor $u$ que corresponde al valor dado $t$ en el diagrama vectorial se obtiene de la siguiente manera: Por el origen $O$ (fig. 139) se hace pasar "*el eje del tiempo*", un eje $OP$ que gira alrededor de $O$, en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, con una velocidad angular constante $\omega$; en el momento inicial ($t=0$) este eje coincide con el eje $Oy$. Entonces, la proyección $ON$ del vector considerado $\mathbf{u}$ sobre el eje del tiempo es igual para todo instante $t$ al valor de la cantidad sinusoidal $u = A \operatorname{sen}(\omega t+\varphi)$ (para $t = 0$, $u_0 = A \operatorname{sen} \varphi$ es la proyección de $\mathbf{u}$ sobre el eje $Oy$, fig. 138).

## 4. *Resolución de triángulos*

TRIÁNGULO RECTÁNGULO: $a$ y $b$ son los catetos, $c$ es la hipotenusa; $A$ y $B$ son los ángulos opuestos a los lados $a$ y $b$. *Relaciones fundamentales:* $a = c \operatorname{sen} A = c \cos B$, $a = b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B$.

| Es dado | Fórmulas para hallar los elementos restantes | | |
|---|---|---|---|
| $c, A$ | $B = 90° - A$, | $a = c \operatorname{sen} A$, | $b = c \cos A$, |
| $a, A$ | $B = 90° - A$, | $b = a \operatorname{ctg} A$, | $c = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A}$, |
| $a, c$ | $\operatorname{sen} A = \dfrac{a}{c}$, | $b = c \cos A$, | $B = 90° - A$, |
| $a, b$ | $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$, | $c = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A}$, | $B = 90° - A$ |

TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO: $a$, $b$ y $c$ son los lados; $A$, $B$ y $C$, los ángulos opuestos a estos lados; $S$, el área; $R$ es el radio de la circunferencia circunscrita; $r$, el radio de la circunferencia inscrita; $p$, el semiperímetro $\left[p = \frac{1}{2}(a+b+c)\right]$.

*Relaciones fundamentales:*

1) $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R$ ("teorema de los senos"),

2) $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ ("teorema de los cosenos"),

3) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} {}^1/_2(A+B)}{\operatorname{tg} {}^1/_2(A-B)}$ ("teorema de las tangentes"),

4) $S = {}^1/_2 ab \operatorname{sen} C = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C = rp =$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

*Relaciones complementarias:*

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \operatorname{sen} B}{c-a\cos B},$$

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos[{}^1/_2(A-B)]}{\cos[{}^1/_2(A+B)]} = \frac{\cos[{}^1/_2(A-B)]}{\operatorname{sen} {}^1/_2 C},$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}[{}^1/_2(A-B)]}{\operatorname{sen}[{}^1/_2(A+B)]} = \frac{\operatorname{sen}[{}^1/_2(A-B)]}{\cos {}^1/_2 C}.$$

*Cálculo de las líneas relacionadas con el triángulo:*

La altura sobre el lado $a$: $h_a = b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B$.

La mediana sobre el lado $a$: $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$.

La bisectriz del ángulo $A$: $l_A = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$.

El radio de la circunferencia circunscrita: $R = \frac{a}{2\operatorname{sen} A} = \frac{b}{2\operatorname{sen} B} =$

$$= \frac{c}{2\operatorname{sen} C}.$$

El radio de la circunferencia inscrita:

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} = p \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} =$$

$$= 4R\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}.$$

| Se conocen | Fórmulas para hallar los elementos restantes |
|---|---|
| 1) 1 lado y 2 ángulos $(a, A, B)$ | $C = 180° - A - B, \quad b = \dfrac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}.$ <br> $c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}, \quad S = \dfrac{1}{2} ab \text{ sen } C$ |
| 2) 2 lados y el ángulo comprendido entre ellos $(a, b, C)$ | $\text{tg } \dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{a+b} \text{ ctg } \dfrac{C}{2}, \quad \dfrac{A+B}{2} = 90° - {}^1/_2 C,$ <br> una vez obtenidos $A+B$ y $A-B$, se hallan $A$ y $B$, <br> $c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}, \quad S = \dfrac{1}{2} ab \text{ sen } C$ |
| 3) 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ellos $(a, b, A)$ | $\text{sen } B = \dfrac{b \text{ sen } A}{a},$ <br> si $a \geqslant b$, entonces $B < 90°$ y sólo tiene un valor; <br> si $a < b$, entonces: <br> 1) $B$ tiene dos valores, para $b \text{ sen } A < a$ <br> $(B_2 = 180° - B_1)$, <br> 2) $B$ tiene un valor (90°), para $b \text{ sen } A = a$, <br> 3) el triángulo no tiene solución, para $b \text{ sen } A > a$; <br> $C = 180° - (A+B), \quad c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}, \quad S = \dfrac{1}{2} ab \text{ sen } C$ |
| 4) los 3 lados $(a, b, c)$ | $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$ <br> $\text{tg } \dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{p-a}, \quad \text{tg } \dfrac{B}{2} = \dfrac{r}{p-b}, \quad \text{tg } \dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{p-c},$ <br> $S = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ |

## 5. *Funciones circulares (trigonométricas) inversas**

**Definiciones.** Se llaman funciones *circulares* (trigonométricas) inversas de $x$ a las cantidades $y$ determinadas por las igualdades:

$y = \text{Arcsen } x$ *(arco seno)* si $x = \text{sen } y$,
$y = \text{Arccos } x$ *(arco coseno)* si $x = \cos y$,
$y = \text{Arctg } x$ *(arco tangente)* si $x = \text{tg } y$,
$y = \text{Arcctg } x$ *(arco cotangente)* si $x = \text{ctg } y$,

$y$ se mide en **radianes.**

* También se llaman funciones ciclométricas. *(Nota de la Edit.)*

*Ejemplos:*

Arcsen $0 = 0$ ó $\pi$ ó $2\pi$, en general, Arcsen $0 = k\pi$.

Arccos $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ ó $-\frac{\pi}{3}$ ó $\frac{\pi}{3}+2\pi$, en general, Arccos $\frac{1}{2} = \pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

Arctg $1 = \frac{\pi}{4}$ ó $\frac{5\pi}{4}$, en general, Arctg $1 = \frac{\pi}{4}+k\pi$.

VALORES PRINCIPALES. Las funciones circulares inversas son *multiformes* y los *valores principales* (se designan: arcsen $x$, arccos $x$, arctg $x$ arcctg $x$) están acotados por los límites:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{arcsen } x \leqslant +\frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \text{arccos } x \leqslant +\pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arctg } x < +\frac{\pi}{2}, \quad 0 < \text{arc ctg } x < +\pi.$$

Véanse en las págs. 107-108 las gráficas de las funciones circulares inversas; en la fig. 140 están representadas las gráficas de sus valores principales.

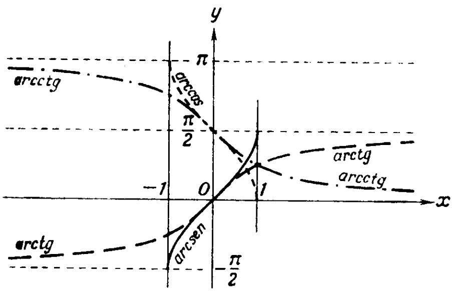



Fig. 140

EXPRESIÓN DE UNAS FUNCIONES CIRCULARES INVERSAS MEDIANTE OTRAS*:

$$\text{arcsen } x = -\text{arcsen } (-x) = \frac{\pi}{2} - \text{arccos } x = \left[\text{arccos } \sqrt{1-x^2}\right] =$$

$$= \text{arctg } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\text{arcctg } \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right],$$

* Estas fórmulas son válidas sólo para los valores principales de las funciones circulares inversas mientras que las fórmulas que están entre corchetes sólo son válidas para valores positivos de $x$ (ya que los límites de los valores principales para las diferentes funciones están definidos de distinta manera).

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x =$$
$$= \left[\operatorname{arcsen} \sqrt{1-x^2}\right] = \left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right] = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= \left[\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \left[\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}\right],$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x =$$
$$= \left[\operatorname{arcsen} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right] = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right].$$

**Relaciones fundamentales entre las funciones circulares inversas:**

$$\operatorname{arcsen} x + \operatorname{arcsen} y = \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad [xy \leqslant 0 \text{ ó } x^2+y^2 \leqslant 1]$$
$$= \pi - \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad [x > 0,\ y > 0 \text{ y } x^2+y^2 > 1]$$
$$= -\pi - \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) \quad [x < 0,\ y < 0 \text{ y } x^2+y^2 > 1],$$

$$\operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} y = \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad [xy \geqslant 0 \text{ ó } x^2+y^2 \leqslant 1]$$
$$= \pi - \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad [x > 0,\ y < 0 \text{ y } x^2+y^2 > 1]$$
$$= -\pi - \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \quad [x < 0,\ y > 0 \text{ y } x^2+y^2 > 1]$$

$$\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad [x+y \geqslant 0]$$
$$= 2\pi - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \quad [x+y < 0],$$

$$\arccos x - \arccos y = -\arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x \geqslant y]$$
$$= \arccos\left(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \qquad [x < y].$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \qquad [xy < 1]$$
$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \qquad [x > 0,\ xy > 1]$$
$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \qquad [x < 0,\ xy > 1],$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \qquad [xy > -1]$$
$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \qquad [x > 0,\ xy < -1]$$
$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \qquad [x < 0,\ xy < -1],$$

$$2 \operatorname{arcsen} x = \operatorname{arcsen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \left[|x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$
$$= \pi - \operatorname{arcsen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \left[\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1\right]$$
$$= -\pi - \operatorname{arcsen}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) \qquad \left[-1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right],$$

$$2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1) \qquad [0 \leqslant x \leqslant 1]$$
$$= 2\pi - \arccos(2x^2 - 1) \qquad [-1 \leqslant x < 0],$$

$$2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \qquad [|x| < 1]$$
$$= \pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \qquad [x > 1]$$
$$= -\pi + \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} \qquad [x < -1],$$

$$\cos(n \arccos x) = 2^{n-1} T_n(x) \qquad (n \geqslant 1^{*}),$$

donde $T_n(x)$ se determina por la igualdad:

$$T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n}{2^n}.$$

Para $n$ entero, $T_n(x)$ es un polinomio en $x$ *(polinomio de Chébichev)*.

---

* La fórmula también es válida cuando $n$ no es entero.

# B. TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

## *6. Geometría de la esfera*

LÍNEAS GEODÉSICAS EN LA ESFERA. Al cortar la esfera por un plano que pase por su centro, obtenemos en la superficie de la *esfera* el llamado *círculo máximo* cuyo radio es igual al de la esfera. Por cada dos puntos $A$ y $B$ de la esfera (a excepción de los extremos opuestos del diámetro de la misma) se puede trazar sólo un círculo máximo; su arco menor $AaB$ (fig. 141) es la línea más corta entre todas las líneas (por ejemplo, $AbB$) de la esfera que unen estos puntos (la llamada *línea geodésica** de la esfera), y desempeña en la superficie de la esfera la misma función que la recta en el plano.

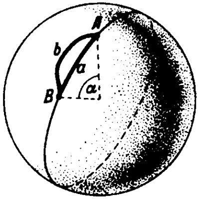



Fig. 141

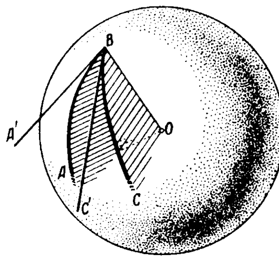



Fig. 142

MEDICIÓN DE LOS ARCOS Y DE LOS ÁNGULOS EN LA ESFERA. La longitud de un arco de la circunferencia máxima, $\smile a$, con ángulo central $\alpha$ (en radianes) es igual a $R\alpha$, donde $R$ es el radio de la esfera; para una misma esfera es conveniente tomar por unidad de medición de arcos, el radio $R$; entonces $\smile a = \alpha$. En las fórmulas siguientes se ha tomado esta unidad de medida.

El ángulo $ABC$ formado por dos arcos de dos circunferencias máximas de la esfera (fig. 142) se mide por el ángulo lineal $A'BC'$ formado por las tangentes en el punto $B$ a los arcos correspondientes o, lo que es lo mismo, por el ángulo diedro formado por los planos $OBA$ y $OBC$.

TRIÁNGULOS ESFÉRICOS. Tres circunferencias máximas forman en la esfera varios triángulos esféricos. Entre ellos examinaremos aquél cuyos

---

* Véase la pág. 306.

lados y ángulos son menores que 180°. Los lados del triángulo $a$, $b$ y $c$, se miden por los ángulos planos del ángulo triedro $OABC$ (fig. 143; $O$ es el centro de la esfera) y los ángulos del triángulo $A$, $B$ y $C$ se miden por los ángulos diedros de este mismo ángulo triedro.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL del triángulo esférico: la suma de sus ángulos $A+B+C$ es siempre mayor que 180°. La diferencia $(A+B+C)-\pi = \delta$ expresada en radianes, se llama *exceso esférico* del triángulo esférico dado.

EL ÁREA DEL TRIÁNGULO ESFÉRICO es $S = R^2\delta$, donde $R$ es el radio de la esfera y $\delta$ es el exceso esférico. *El área de un biángulo* formado por dos arcos de circunferencias máximas (fig. 144) es $S = 2R^2A$ ($\angle A$ está expresado en radianes).

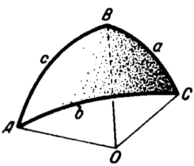



Fig. 143

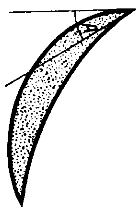


Fig. 144

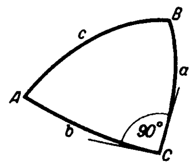



Fig. 145

## 7. *Resolución de triángulos esféricos*

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS ($a$, $b$ son los catetos; $c$ es la hipotenusa; $A$ y $B$ son los ángulos opuestos a los lados $a$, $b$; fig. 145).

*Relaciones fundamentales:*

| | |
|---|---|
| 1) $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A$, | 6) $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos B$, |
| 2) $\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} B$, | 7) $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A$, |
| 3) $\operatorname{tg} a = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} A$, | 8) $\cos B = \cos b \operatorname{sen} A$, |
| 4) $\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} a \operatorname{tg} B$, | 9) $\cos A = \cos a \operatorname{sen} B$, |
| 5) $\cos c = \cos a \cos b$, | 10) $\cos c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B$. |

| Son dados | Número de la fórmula para los elementos restantes |
|---|---|
| La hipotenusa y el ángulo: $c$, $A$ | $a$ (1), $b$ (7), $B$ (10) |
| El cateto y el ángulo opuesto: $a$, $A$ | $b$ (3), $c$ (1), $B$ (9) |
| El cateto y el ángulo adyacente: $a$, $B$ | $b$ (4), $c$ (6), $A$ (9) |
| Los dos catetos: $a$, $b$ | $c$ (5), $A$ (3), $B$ (4) |
| Los dos ángulos: $A$ y $B$ | $a$ (9), $b$ (8), $c$ (10) |

Las fórmulas 1 – 10 pueden obtenerse por la siguiente *regla de Neper*: al disponer cinco elementos de un triángulo rectángulo (omitiendo el ángulo recto) en un círculo en el mismo orden que ellos tienen en el triángulo y al reemplazar, en este caso, los catetos $a$ y $b$ por sus complementos hasta 90° (fig. 146), entonces

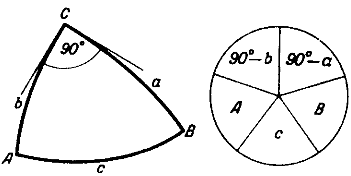


Fig. 146

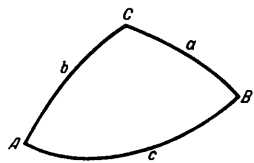


Fig. 147

1) el coseno de cada elemento es igual al producto de las cotangentes de los dos elementos adyacentes a él.

2) el coseno de cada elemento es igual al producto de los senos de los dos elementos no adyacentes.

Por ejemplo: $\cos A = \operatorname{ctg}(90° - b) \operatorname{ctg} c$, $\cos(90° - a) = \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A$.

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS ($A$, $B$, $C$ son los ángulos del triángulo; $a$, $b$, $c$ son los lados opuestos, fig. 147).

*Relaciones fundamentales:*

1) $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$ ("teorema de los senos")

2) $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$,

3) $\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$

(2, 3 son los "teoremas de los cosenos",)

4) $\operatorname{sen} a \operatorname{ctg} b = \operatorname{ctg} B \operatorname{sen} C + \cos a \cos C$,

5) $\operatorname{sen} A \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} b \operatorname{sen} c - \cos A \cos c$.

| Son dados | Número de la fórmula para hallar los elementos restantes |
|---|---|
| Los tres lados: $a, b, c$ | $A$ (2), $B$ y $C$ (1) |
| Los tres ángulos: $A, B, C$ | $a$ (3), y $c$ (1) |
| Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos: $a, b, C$ | $B$ (4) $A$ y $c$ (1) |
| Dos ángulos y el lado que los contiene: $A, B, c$ | $b$ (5), $a$ y $C$ (1) |
| Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos: $a, b, B$ | $A$ (1), $c$ (5), $C$ (1) |
| Dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos: $A, B, b$ | $a$ (1), $C$ (4), $c$ (1) |

# C. TRIGONOMETRÍA HIPERBÓLICA*

## 8. *Funciones hiperbólicas*

DEFINICIONES DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS.

*El seno hiperbólico* (abreviadamente se escribe sh), *el coseno hiperbólico* (o ch) y *la tangente hiperbólica* (o th) se definen por las fórmulas:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

La definición geométrica de las funciones hiperbólicas es análoga a la definición de las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente), véanse más adelante (las págs. 226-227).

*La cotangente hiperbólica, la secante hiperbólica* y *la cosecante hiperbólica* se definen como cantidades inversas:

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

EL CARÁCTER DE VARIACIÓN de las funciones hiperbólicas se determina por las gráficas representadas en la fig. 148. Véase también el texto de la pág. 109.

Véanse en las págs. 57-60 las **tablas** de las funciones hiperbólicas.

---

* Con esta denominación están reunidas unas nociones elementales de las funciones hiperbólicas, análogas a las nociones de las funciones trigonométricas.

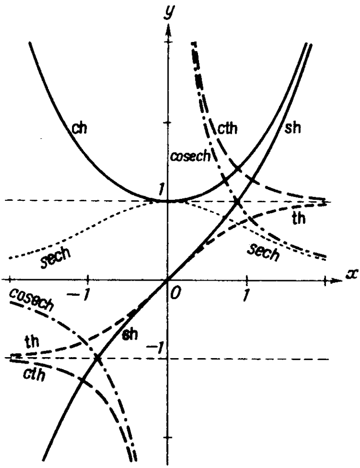



Fig. 148

## 9. *Fórmulas fundamentales de la trigonometría hiperbólica*

Para las funciones hiperbólicas se cumplen unas fórmulas análogas a las de las funciones trigonométricas (págs. 210-211)*.

FUNCIONES DE UN ARGUMENTO:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sech}^2 x + \operatorname{th}^2 x = 1, \quad \operatorname{cth}^2 x - \operatorname{cosech}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1, \quad \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x, \quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{cth} x.$$

* Estas fórmulas pueden obtenerse de las fórmulas correspondientes para las funciones trigonométricas mediante una regla simple, véase más adelante la pág. 225.

EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE OTRA (del mismo argumento)

$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}} = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2 x}}{\operatorname{sech} x} = \frac{1}{\operatorname{cosech} x},$$

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} = \frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{sech} x} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{cosech}^2 x}}{\operatorname{cosech} x},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x} = \sqrt{1-\operatorname{sech}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cosech}^2 x}},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sech}^2 x}} = \sqrt{\operatorname{cosech}^2 x - 1}.$$

FUNCIONES DE LA SUMA Y DE LA DIFERENCIA DE DOS ARGUMENTOS:

$$\operatorname{sh}(x\pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x\pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x\pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{cth}(x\pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$$

FUNCIONES DEL ARGUMENTO DOBLE:

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{th} 2x = 2 \operatorname{th} x : (1+\operatorname{th}^2 x),$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \qquad \operatorname{cth} 2x = (1+\operatorname{cth}^2 x) : 2 \operatorname{cth} x.$$

FÓRMULA DE MOIVRE: $(\operatorname{ch} x \pm \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx \pm \operatorname{sh} nx$ (véase la pág. 211).

FUNCIONES DEL ARGUMENTO MITAD:

$$\operatorname{sh}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{{}^1/_2(\operatorname{ch} x - 1)}^*, \quad \operatorname{th}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + 1},$$

$$\operatorname{ch}\frac{x}{2} = \sqrt{{}^1/_2(\operatorname{ch} x + 1)}, \quad \operatorname{cth}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{sh} x}.$$

SUMA Y DIFERENCIA DE FUNCIONES:

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} {}^1/_2(x\pm y) \operatorname{ch} {}^1/_2(x\mp y),$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} {}^1/_2(x+y) \operatorname{ch} {}^1/_2(x-y), \quad \operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x\pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}.$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} {}^1/_2(x+y) \operatorname{sh} {}^1/_2(x-y).$$

RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y LAS TRIGONOMÉTRICAS**:

$$\operatorname{sen} z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \quad \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz,$$
$$\operatorname{sh} z = -i \operatorname{sen} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz;$$

* El signo «+» para $x > 0$ y «−» para $x < 0$.

** Véanse en la pág. 574 las funciones de variable compleja.

cada una de las fórmulas que relacionan entre sí las funciones hiperbólicas de $x$ ó de $ax$ (pero no de $ax+b$), puede ser obtenida de la fórmula correspondiente que relaciona las funciones trigonométricas de $\alpha$ (págs. 210-211) mediante el reemplazo de $\operatorname{sen}\alpha$ por $i\operatorname{sh}x$ y de $\cos\alpha$ por $\operatorname{ch}x$. *Por ejemplo:*

$$\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x+i^2\operatorname{sh}^2 x = 1 \quad \text{ó} \quad \operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha, \quad i\operatorname{sh}2x = 2i\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$$

$$\text{ó} \quad \operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x, \quad \text{etc.}$$

## *10. Funciones hiperbólicas inversas*

DEFINICIONES. Se llaman *funciones hiperbólicas inversas de* $x$ (*"funciones-área"*) a los valores obtenidos por las igualdades

$y = \operatorname{Arsh} x$ *(seno-área)* si $x = \operatorname{sh} y$

$y = \operatorname{Arch} x$ *(coseno-área)* si $x = \operatorname{ch} y$

$y = \operatorname{Arth} x$ *(tangente-área)* si $x = \operatorname{th} y$

$y = \operatorname{Arcth} x$ *(cotangente-área)* si $x = \operatorname{cth} y$.

Las designaciones provienen de la palabra área (superficie), ya que las funciones-área pueden expresarse como el área de un sector hiperbólico (véase más adelante).

EXPRESIONE MEDIANTE LOGARITMOS. Según las fórmulas de las págs. 223-224 tenemos las siguientes fórmulas de las funciones-área mediante logaritmos:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \qquad \operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (|x|<1).$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\ (x\geqslant 1), \quad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad (|x|>1).$$

(Véanse en las págs. 110-111 las gráficas de las funciones-área).

EXPRESIONES DE UNAS FUNCIONES MEDIANTE OTRAS:

$$\operatorname{Arsh} x = \pm\operatorname{Arch}\sqrt{x^2+1}^{\,*} = \operatorname{Arth}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arcth}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm\operatorname{Arsh}\sqrt{x^2-1} = \pm\operatorname{Arth}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \pm\operatorname{Arcth}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arsh}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\operatorname{Arch}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}^{\,*} = \operatorname{Arcth}\frac{1}{x},$$

$$\operatorname{Arcth} x = \operatorname{Arsh}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \pm\operatorname{Arch}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}^{\,*} = \operatorname{Arth}\frac{1}{x}.$$

---

* El signo «+» para $x>0$ y el signo «−» para $x<0$.

ALGUNAS RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS:

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh} \left(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}\right),$$

$$\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch} \left(xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right),$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy}.$$

## *11. Definición geométrica de las funciones hiperbólicas*

Las funciones sen $\alpha$, cos $\alpha$, tg $\alpha$, se definieron en el círculo trigonométrico (pág. 206) como las longitudes de los segmentos $BC$, $OB$, $AD$ (para $R = 1$) y el argumento $\alpha$ era el ángulo central $AOC$. Se podía haber tomado como argumento un valor $x$, igual al área (sombreada en la fig. 149) del sector $COK$ con el ángulo central igual a $2\alpha$, ya que $x = \frac{1}{2} R^2 \cdot 2\alpha = \alpha$ [$R=1$, $\alpha$ se mide en radianes]. De esta manera: *

$$\operatorname{sen} x = BC,$$
$$\cos x = OB,$$
$$\operatorname{tg} x = AD.$$

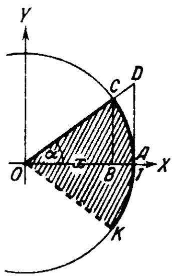


Fig. 149

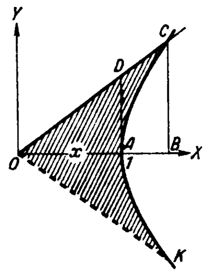


Fig. 150

Considerando las funciones análogas de la superficie, no en un círculo cuya ecuación es $X^2+Y^2 = 1$, sino en una hipérbola equilátera con ecuación $X^2-Y^2 = 1$, (sólo estudiaremos su rama derecha) y designando por $x$ el área del sector similar $COK$ (sombreado en la fig. 150), definimos las funciones hiperbólicas así: $\operatorname{sh} x = BC$; $\operatorname{ch} x = OB$; $\operatorname{th} x = AD$.

Calculando la superficie $x$* por los métodos del cálculo integral, tenemos sus expresiones mediante $BC$, $OB$, $AD$:

$$x = \ln\left(BC+\sqrt{BC^2+1}\right) = \ln\left(OB+\sqrt{OB^2-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+AD}{1-AD},$$

de donde obtenemos las expresiones siguientes de las funciones hiperbólicas mediante las exponenciales (las que se consideran como definiciones de las funciones hiperbólicas):

$$BC = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,\quad OB = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,\quad AD = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \operatorname{th} x.$$

* Véase la pág. 451.

TERCERA PARTE

# GEOMETRÍA ANALÍTICA Y GEOMETRÍA DIFERENCIAL

## I. GEOMETRÍA ANALÍTICA

### A. GEOMETRÍA DEL PLANO

### *1. Conceptos fundamentales y fórmulas*

**Coordenadas.** La posición de un punto $P$ en el plano puede ser determinada mediante uno u otro *sistema de coordenadas.* Los números que determinan la posición del punto son sus *coordenadas.* Los sistemas de coordenadas de más uso son: el sistema cartesiano rectangular y el sistema polar.

Se llaman *coordenadas cartesianas rectangulares* de un punto $P$ (fig. 151) a las distancias de este punto a dos rectas perpendiculares entre sí (ejes de coordenadas) y tomadas con un signo determinado (expresadas en una escala determinada). El punto $O$ de intersección de los ejes se llama *origen* de coordenadas. Generalmente, el eje horizontal se llama *eje de abscisas* (*eje Ox*) y el vertical, *eje de ordenadas* (*eje Oy*). En cada uno de estos ejes se establece la dirección positiva; ordinariamente, en el eje $Ox$ hacia la derecha y en el eje $Oy$ hacia arriba. Las coordenadas del punto $P$ se consideran positivas o negativas según sea el semieje en el cual caigan las proyecciones del punto $P$ (véase el esquema de la fig. 152). Las coordenadas $x$ e $y$ se llaman *abscisa* y *ordenada* del punto $P$, respectivamente. La notación $P(a, b)$ significa que el punto $P$ tiene la abscisa $a$ y la ordenada $b$.

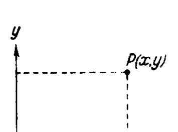
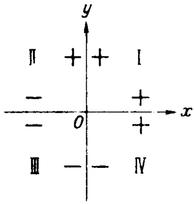


Fig. 151

Las *coordenadas polares* del punto $P$ (fig. 153) son el *radio vector* $\rho$, la distancia desde el punto $P$ hasta el punto $O$ (el *polo*), y el *ángulo*




| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + |
| $y$ | + | + | − | − |

Fig. 152

*polar* $\varphi$, o sea, el ángulo formado por la recta $OP$ y una recta dada que pasa por el polo *(eje polar)*. El ángulo polar se considera positivo si se toma desde eje polar en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, y se considera negativo si se toma en sentido contrario.

*Coordenadas curvilíneas.* Un sistema de coordenadas más general es el curvilíneo. En este caso, en el plano se dan dos familias de líneas *(líneas coordenadas)*, que dependen cada una de un parámetro, tal que por cada punto sólo pasa una línea de cada familia. Los valores de los parámetros que corresponden a estas curvas son las *coordenadas curvi líneas* del punto. En la fig. 154 el punto $M$ tiene las coordenadas curvi

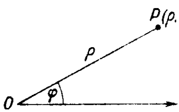



Fig. 153

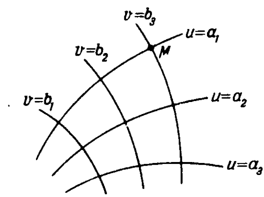



Fig. 154

líneas $u = a_1$, $v = b_3$. En el sistema cartesiano de coordenadas las líneas coordenadas son las rectas paralelas a los ejes, en el sistema polar son circunferencias con centro en el polo y rayos que parten del polo.

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS. Al pasar de un sistema de coordenadas a otro las coordenadas varían de la siguiente manera.

*Translación paralela* de los ejes de coordenadas cartesianas (fig. 155) ($x$ e $y$ son las coordenadas primitivas, $x'$ e $y'$ son las nuevas coordenadas, $a$ y $b$ son las coordenadas del nuevo origen de coordenadas $O'$ en el sistema de coordenadas primitivo):

$$x = x' + a, \quad y = y' + b,$$
$$x' = x - a, \quad y' = y - b,$$

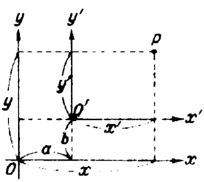



Fig. 155

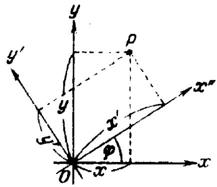



Fig. 156

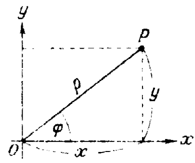



Fig. 157

*Rotación de los ejes* en un ángulo $\varphi$* (véase la fig. 156):

$$x = x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi, \quad y = x' \operatorname{sen}\varphi + y' \cos\varphi,$$
$$x' = x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi, \quad y' = -x \operatorname{sen}\varphi + y \cos\varphi.$$

En general, la transformación se puede dividir en traslación paralela y rotación de los ejes.

El *paso de las coordenadas cartesianas a polares y viceversa* se efectúa por las siguientes fórmulas, si se toma el polo como origen de coordenadas y el eje polar como eje de abscisas (fig. 157)

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\varphi;$$
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{Arcsen}\frac{y}{\rho}.$$

LA DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 158) es: $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Si se dan las coordenadas polares de $P_1(\rho_1\varphi_1)$ y $P_2(\rho_2\varphi_2)$ (fig. 159), entonces $d = \sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$.

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA. Las coordenadas del punto $P$ para el cual $\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda$ (fig. 160) se determinan por las fórmulas:

$$x = \frac{nx_1+mx_2}{n+m} = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}; \qquad y = \frac{ny_1+my_2}{n+m} = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

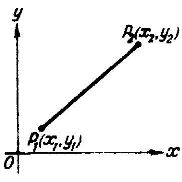



Fig. 158

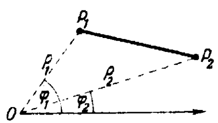



Fig. 159

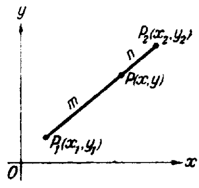



Fig. 160

* El ángulo $\varphi$ se considera positivo si el giro se efectúa en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

Para el punto *medio* del segmento $P_1P_2: x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$. Si se atribuyen a los segmentos $P_1P$ y $PP_2$ el signo más o menos según coincidan o no sus direcciones con la dirección de $P_1P_2$, entonces, si $\lambda < 0$, las fórmulas expuestas anteriormente pueden servir para encontrar el punto que divide *exteriormente* al segmento $P_1P_2$ en una razón dada. Por ejemplo, para el punto $P$ tal que $P_2$ sea el punto medio del segmento $P_1P$, $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2} = -2$.

Las coordenadas del *centro de gravedad* del sistema de puntos materiales $M_i(x_i, y_i)$ con masas $m_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), se determinan por las fórmulas:

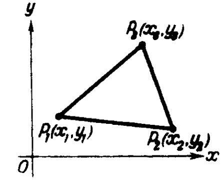


Fig. 161

$$x = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad y = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}.$$

El área del triángulo (fig. 161) con vértices $P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ es:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)] =$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+(x_3-x_1)(y_3+y_1)].$$

Tres puntos están alineados si:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

El área de un polígono con vértices $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $\ldots$, $P_n(x_n, y_n)$ es:

$$S = \frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1+y_2)+(x_2-x_3)(y_2+y_3)+ \ldots +(x_n-x_1)(y_n+y_1)].$$

El área obtenida por estas fórmulas es positiva si el recorrido de los vértices según el orden de su numeración se efectúa en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj y es negativa en caso contrario.

Ecuación de una línea. A toda ecuación $F(x, y) = 0$ que relaciona las coordenadas $x$ e $y$ corresponde una línea que tiene la propiedad siguiente: las coordenadas de cualquier punto $P$ perteneciente a esta línea verifican la ecuación dada y, recíprocamente, todo punto cuyas coordenadas verifican la ecuación, pertenece a la línea. La ecuación

$F(x, y) = 0$ se llama la ecuación de esta línea*. Si $F(x, y)$ es un polinomio, la curva $F(x, y) = 0$ se llama *algebraica;* en este caso, el grado del polinomio (véase pág. 177) se llama *orden* de la curva. Si la ecuación de la curva no puede ser reducida a la forma $F(x, y) = 0$, donde $F(x, y)$ es un polinomio, entonces la curva se llama *trascendente.*

Análogamente se pueden estudiar las ecuaciones de las líneas en otros sistemas de coordenadas. En lo sucesivo, si no se estipula lo contrario, se consideran las coordenadas cartesianas rectangulares.

## 2. La línea recta

ECUACIÓN DE LA RECTA. Toda ecuación lineal con respecto a las coordenadas determina una recta y, recíprocamente, la ecuación de cualquier recta es una ecuación de primer grado.

*Ecuación general de la recta.*

$$Ax+By+C = 0.$$

Si (fig. 162) $A = 0$, la recta es paralela al eje $Ox$; si $B = 0$, la recta es paralela al eje $Oy$; si $C = 0$, la recta pasa por el origen de coordenadas.

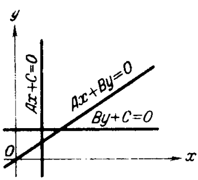



Fig. 162

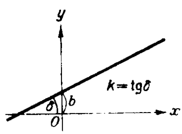



Fig. 163

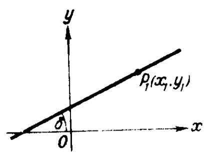



Fig. 164

La ecuación de cualquier recta que no sea paralela al eje $Oy$ (fig. 163) puede expresarse en la forma

$$y = kx+b;$$

$k$ es el *coeficiente angular* (la pendiente) de la recta, que es igual a tg $\delta$; $\delta$ es el ángulo entre la dirección positiva del eje $Ox$ y la recta; $b$ es el segmento que intercepta la recta en el eje $Oy$ (teniendo en cuenta el signo).

---

* Puede suceder que a la ecuación dada $F(x, y) = 0$ no la verifiquen las coordenadas de ningún punto real del plano [por ejemplo, $x^2+y^2+1 = 0$, $y = \ln(1-x^2-\operatorname{ch} x)$]. Entonces, *convencionalmente*, se dice que la ecuación dada representa una curva imaginaria.

La ecuación de la recta que pasa *por un punto dado* $P_1(x_1, y_1)$ en una dirección dada (fig. 164) es:

$$y-y_1 = k(x-x_1), \quad \text{donde} \quad k = \operatorname{tg} \delta.$$

La ecuación de la recta que pasa *por dos puntos dados* (fig. 165) $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

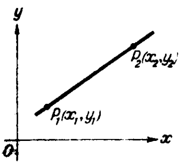


Fig. 165

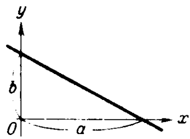


Fig. 166

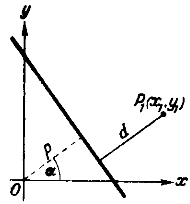


Fig. 167

*Ecuación "segmentaria" de la recta.* Si la recta intercepta en los ejes de coordenadas los segmentos $a$ y $b$ (teniendo en cuenta los signos, fig. 166), entonces su ecuación es:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = 1.$$

*La ecuación normal de la recta* es:

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha - p = 0,$$

donde $p$ es la distancia del origen de coordenadas a la recta, $\alpha$ es el ángulo formado por la perpendicular a la recta desde el origen de coordenadas y el eje $Ox$ (fig. 167) ($p > 0$; $0 \leqslant \alpha < 2\pi$). La ecuación normal de la recta se puede obtener de la ecuación general $Ax+By+C = 0$ multiplicando por el *factor normalizador*

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

El signo de $\mu$ debe ser contrario al signo de $C$.

DISTANCIA DE PUNTO $P_1(x_1, y_1)$ a la recta (fig. 167) es:

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \operatorname{sen}\alpha - p;$$

$d$ es igual al resultado que se obtiene al reemplazar las coordenadas del punto dado en el primer miembro de la ecuación normal de la recta.

Según esta fórmula $d > 0$, si $P_1$ y el origen de coordenadas se encuentran a distintos lados de la recta dada, y $d < 0$ en caso contrario.

**Punto de intersección de dos rectas.** Las coordenadas $(x_0, y_0)$ del punto de intersección de dos rectas se obtienen resolviendo simultáneamente sus ecuaciones. Si estas rectas están dadas por las ecuaciones $A_1x+B_1y+C_1 = 0$ y $A_2x+B_2y+C_2 = 0$, entonces

$$x_0 = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad y_0 = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Si $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$, las rectas dadas son paralelas; en particular, para $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, las rectas son coincidentes.

Una tercera recta $A_3x+B_3y+C_3 = 0$ pasa por el punto de intersección de las dos primeras si (fig. 168):

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación de cualquier recta que pasa por el punto de intersección de dos rectas (ecuación del *haz de rectas*), es:

$$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2) = 0.$$

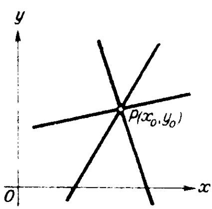



Fig. 168

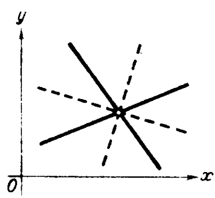



Fig. 169

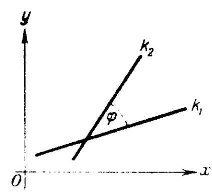



Fig 170

Al variar $\lambda$ desde $-\infty$ hasta $+\infty$ se puede obtener cualquier recta del haz. Si las ecuaciones de dos rectas están dadas en forma normal, entonces para $\lambda = \pm 1$ se pueden obtener las *ecuaciones de las bisectrices de los ángulos* formados por estas rectas (fig. 169).

EL ÁNGULO $\varphi$ ENTRE DOS RECTAS (fig. 170) se determina de la siguiente manera.

Dadas las ecuaciones de las rectas en forma general

$$A_1x+B_1y+C_1 = 0 \text{ y } A_2x+B_2y+C_2 = 0,$$

se tiene

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2}}, \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{A_1B_2-A_2B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Si se conocen los coeficientes angulares de las rectas $k_1$ y $k_2$, entonces

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2},$$

$$\cos \varphi = \frac{1+k_1k_2}{\sqrt{1+k_1^2}\,\sqrt{1+k_2^2}}, \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{k_2-k_1}{\sqrt{1+k_1^2}\,\sqrt{1+k_2^2}}$$

(se considera el ángulo $\varphi$ desde la primera recta hasta la segunda en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj).

Las rectas son *paralelas* (fig. 171, *a*) si $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ ó $k_1 = k_2$. Las rectas on *perpendiculares* entre sí (fig. 171, *b*) si $A_1A_2+B_1B_2 = 0$ ó $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

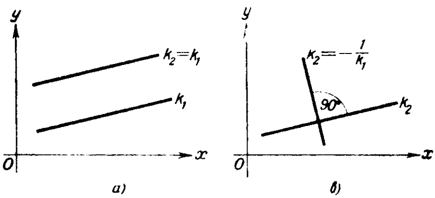



Fig. 171

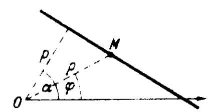



Fig. 172

ECUACIÓN DE LA RECTA EN COORDENADAS POLARES ($p$ es la distancia del polo a la recta, $\alpha$ es el ángulo entre el eje polar y la perpendicular bajada del polo a la recta, fig. 172):

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi-\alpha)}.$$

## *3. La circunferencia*

ECUACIÓN EN COORDENADAS CARTESIANAS. La ecuación de la circunferencia de radio $R$ con centro en el origen de coordenadas (fig. 173, *a*) es:

$$x^2+y^2 = R^2.$$

La ecuación de la circunferencia de radio $R$ con centro en el punto $C(x_0, y_0)$ (fig. 173, *b*) es:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2.$$

La ecuación general de segundo grado $ax^2+2bxy+cy^2+2\,dx+2ey+$ $+f=0$ representa una circunferencia si, y sólo si, $b=0$ y $a=c$. En este caso siempre se puede reducir la ecuación a la forma

$$x^2+y^2+2mx+2ny+q=0.$$

Entonces el radio es $R=\sqrt{m^2+n^2-q}$ y las coordenadas del centro son: $x_0=-m, y_0=-n$. Si $q > m^2+n^2$, la ecuación no representa ninguna curva real; si $q = m^2+n^2$, sólo el punto $M(x_0, y_0)$ verifica la ecuación.

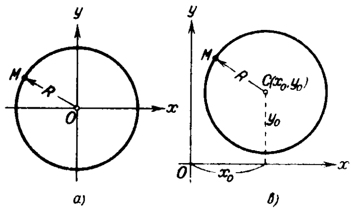


Fig. 173

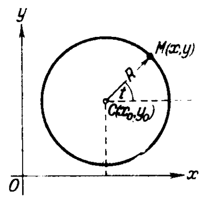


Fig. 174

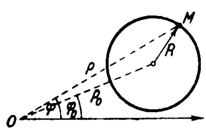


Fig. 175

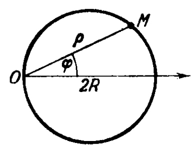


Fig. 176

ECUACIONES PARAMÉTRICAS:

$$x = x_0+R\cos t, \quad y = y_0+R\operatorname{sen} t;$$

$t$ es el ángulo formado por el radio móvil con la dirección positiva del eje $Ox$ (fig. 174).

ECUACIÓN EN COORDENADAS POLARES. La ecuación general (fig. 175) es $\rho^2+2\rho\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2 = R^2$. Si el centro yace en el eje polar y la circunferencia pasa por el polo (fig. 176), la ecuación de la circunferencia toma la forma $\rho = 2R\cos\varphi$.

## 4. *La elipse*

LOS ELEMENTOS DE LA ELIPSE (fig. 177): $AB$ es el *eje mayor* ($= 2a$), $CD$ es el *eje menor* ($= 2b$), $A$, $B$, $C$, $D$ son los *vértices*, $O$ es el *centro*, $F_1$ y $F_2$ son los *focos* (los puntos que yacen en el eje mayor a ambos lados del centro a la distancia $c = \sqrt{a^2-b^2}$ del centro), $e = \frac{c}{a}$ ($e < 1$) es la *excentricidad*, $p$ es el *parámetro focal* (la mitad de la cuerda trazada por el foco y paralela al eje menor), $p = \frac{b^2}{a}$.

ECUACIÓN DE LA ELIPSE: la *ecuación canónica* (si los ejes de coordenadas coinciden con los ejes de la elipse) es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1;$$

las *ecuaciones paramétricas* son:

$$x = a\cos t, \quad y = b \operatorname{sen} t;$$

la *ecuación en coordenadas polares*, véase la pág. 245.

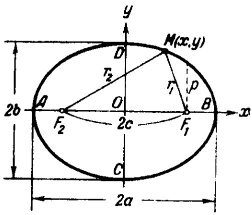



Fig. 177

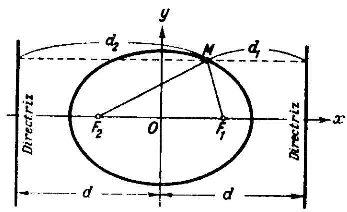



Fig. 178

PROPIEDAD FOCAL DE LA ELIPSE *(definición de la elipse)*. La elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancias a dos puntos dados (los focos) es un valor constante ($= 2a$). Cada una de estas distancias (el radio vector focal del punto de la elipse de abscisa $x$) se expresa por la fórmula*

$$r_1 = MF_1 = a-ex, \quad r_2 = MF_2 = a+ex, \quad r_1+r_2 = 2a.$$

LAS DIRECTRICES son las rectas paralelas al eje menor y que se encuentran a la distancia $d = \frac{a}{e}$ de él (fig. 178). Para todo punto $M(x, y)$ de la elipse $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ *(propiedad de la directriz* de la elipse, véase la pág. 245).

* Aquí y en la fórmulas siguientes que contienen coordenadas se supone que la elipse está dada por su ecuación canónica.

LOS DIÁMETROS son las cuerdas que pasan por el centro de la elipse; éstos se dividen en el centro por la mitad (fig. 179). El lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas paralelas a uno de los diámetros de la elipse, es el diámetro conjugado al dado. Si $k$ y $k'$ son las pendientes de los diámetros conjugados, entonces $kk' = -\frac{b^2}{a^2}$. Si $2a_1$ y $2b_1$ son las longitudes de los diámetros conjugados $\alpha$ y $\beta$ son los ángulos agudos entre los diámetros y el eje mayor

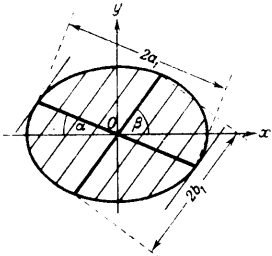


Fig. 179

$$(k = -\operatorname{tg}\alpha,\ k' = -\operatorname{tg}\beta),$$

entonces

$$a_1b_1 \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = ab$$

y

$$a_1^2+b_1^2 = a^2+b^2$$

*(teorema de Apolonio).*

LA TANGENTE en el punto $M(x_0, y_0)$ tiene la ecuación

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

La normal y la tangente a la elipse son las bisectrices correspondientes de los ángulos interior y exterior entre los radios vectores del punto de tangencia (fig. 180). La recta $Ax+By+C = 0$ es tangente a la elipse si: $A^2a^2+B^2b^2-C^2 = 0$.

EL RADIO DE CURVATURA en el punto $M(x_0, y_0)$ (véase fig. 180) es:

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\operatorname{sen}^3 u},$$

donde $u$ es el ángulo entre la tangente y el radio vector del punto de tangencia.

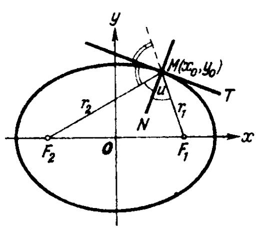


Fig. 180

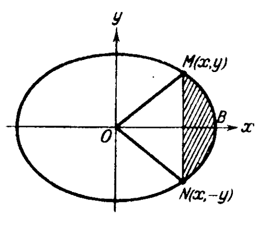


Fig. 181

Para los vértices $A$ y $B$ (fig. 177) se tiene: $R = \frac{b^2}{a} = p$. Para los vértices $C$ y $D$ : $R = \frac{a^2}{b}$.

El área es $S = \pi ab$. El área del sector $BOM = \frac{ab}{2}$ arccos $\frac{x}{a}$ (fig. 181). El área del segmento $MBN$ = ab arccos $\frac{x}{a} - xy$.

El perímetro de la elipse es:

$$L = 4a\mathrm{E}(e) = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \ \dots\right],$$

donde $\mathrm{E}(e) = E\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$ es una integral elíptica completa de segunda especie (véase la pág. 400). Haciendo la notación $\frac{a-b}{a+b} = \lambda$, se tiene

$$L = \pi(a+b)\left[1 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^4}{64} + \frac{\lambda^6}{256} + \frac{25\lambda^8}{16\,384} + \ \dots\right].$$

Las fórmulas de aproximación son:

$$L = \pi[1{,}5(a+b) - \sqrt{ab}]; \qquad L = \pi(a+b)\,\frac{64-3\lambda^4}{64-16\lambda^2}.$$

## 5. *La hipérbola*

Los elementos de la hipérbola (fig. 182) son: $AB$ es el *eje real* ($= 2a$); $A$ y $B$ son los *vértices*, 0 es el *centro*, $F_1$ y $F_2$ son los *focos*, o sea, son los puntos que se encuentran en el eje real a ambos lados del centro y a la distancia $c$ (mayor que $a$) de el; $CD$ es el *eje imaginario* ($= 2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$), $p$ es el *parámetro focal* (la mitad de la cuerda trazada por el foco y perpendicular al eje real), $p = \frac{b^2}{a}$; $e = \frac{c}{a} > 1$ es la *excentricidad*.

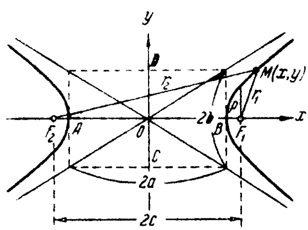


Fig. 182

La ecuación de la hipérbola: la *ecuación canónica* es: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (si el eje $Ox$ coincide con el eje real de la hiperbóla); la *ecuación paramétrica* es: $x = a$ ch $t$, $y = b$ sh $t$ (ó $x = a \sec t$, $y = b \operatorname{tg} t$); la *ecuación en coordenadas polares*, véase la pág. 245.

Propiedad focal de la hipérbola (la *definición de la hipérbola*). La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que para cada uno de ellos la diferencia de las distancias a dos puntos dados (los focos) es un valor constante ( $= 2a$). Los puntos para los cuales $r_1 - r_2 = 2a$ pertenecen a una *rama* de la hipérbola (en la fig. 182, a la de la izquierda); los puntos para los cuales $r_2 - r_1 = 2a$ pertenecen a la otra de sus ramas (a la de la derecha). Cada una de estas distancias (el radio vector focal del punto de la hipérbola con abscisa $x$) se expresa por la fórmula* $r_1 = \pm(ex-a)$, $r_2 = \pm(ex+a)$ (el signo superior para los puntos de la rama derecha, el inferior para los de la izquierda); $r_2 - r_1 = \pm 2a$.

Las directrices son las rectas perpendiculares al eje real y situadas a la distancia $d = \frac{a}{e}$ del centro (fig. 183). Para todo punto $M(x, y)$ de la hipérbola se tiene: $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e$ (la *propiedad de la directriz de la hipérbola*, véase la pág. 245).

La tangente al punto $M(x_0, y_0)$ tiene la ecuación $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$. La tangente y la normal a la hipérbola son las bisectrices correspondientes de los ángulos interior y exterior entre los radios vectores del punto de tangencia (fig. 184). La recta $Ax + By + C = 0$ es tangente a la hipérbola si $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$.

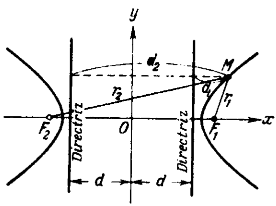



Fig. 183

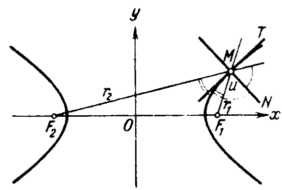



Fig. 184

Las asíntotas de la hipérbola (fig. 185) son las rectas a las cuales se aproximan indefinidamente las ramas de la hipérbola cuando el punto considerado tiende al infinito (la definición general de asíntota véase en la pág. 284). Las pendientes de las asíntotas son $k = \pm \operatorname{tg} \delta = \pm \frac{b}{a}$. Las ecuaciones de ambas asíntotas son: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

El segmento de la tangente $TT_1$ entre las asíntotas se divide en el punto de tangencia por la mitad: $TM = MT_1$. El área del triángulo $TOT_1$ formado por la tangente y ambas asíntotas es igual a $ab$ (para todo

* Aquí y más adelante, en las fórmulas que contienen las coordenadas se supone que la hipérbola está dada por la ecuación canónica.

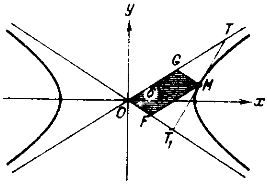



Fig. 185

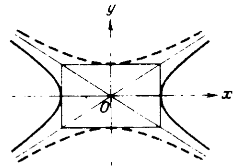



Fig. 186

punto $M$). Si por el punto $M$ de la hipérbola se trazan las rectas $MF$ y $MG$, paralelas a las asíntotas, entonces el área $OFMG = \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{c^2}{4}$.

Las hipérbolas conjugadas (fig. 186) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ (cada una está dibujada en la fig. 186 por una línea de trazos) tienen asíntotas comunes. El eje real de cada una de ellas es igual al eje imaginario de la otra y viceversa.

Los diámetros son las cuerdas de la hipérbola dada y de su conjugada que pasan por el centro común de las hipérbolas; éstos se dividen en el centro por la mitad.

Dos diámetros con pendientes $k$ y $k'$ se llaman *conjugados*, si $kk' = \frac{b^2}{a^2}$. Cada uno de los diámetros conjugados divide por la mitad las cuerdas (de la hipérbola dada o de su conjugada) paralelas al otro diámetro* (fig. 187). Si las longitudes de los diámetros conjugados son $2a_1$ y $2b_1$, y $\alpha$ y $\beta$ son los ángulos agudos formados por los diámetros con el eje real ($\alpha > \beta$), entonces: $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$; $ab = a_1 b_1$ sen $(\alpha - \beta)$.

El radio de curvatura $R$ de la hipérbola en el punto $M(x_0, y_0)$ (las designaciones veáse en la pág. 239) es:

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1 r_2)^{3/2}}{ab} = \frac{p}{\operatorname{sen}^3 u},$$

donde $u$ es el ángulo entre la tangente y el radio vector del punto de tangencia. En los vértices $A$ y $B$ (fig. 182) es: $R = p = b^2/a$.

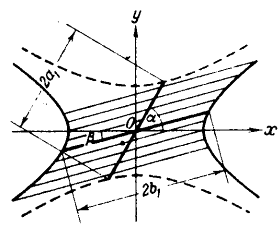



Fig. 187

* De los dos diámetros conjugados sólo uno (aquel, para el cual $|k| < b/a$) corta a la hipérbola. La cuerda que se obtiene en este caso, que es el diámetro en un sentido más estricto de la palabra, se divide en el centro por la mitad.

El área del segmento de la hipérbola (fig. 188) es:

$$AMN = xy - ab \ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = xy - ab \operatorname{Arch} \frac{x}{a}.$$

El área de $OAMG = \frac{ab}{4}+\frac{ab}{2}\ln\frac{2OG}{c}$ ($MG$ es paralela a la asíntota).

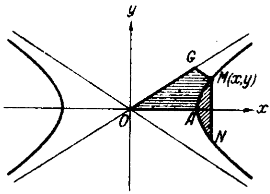



Fig. 188

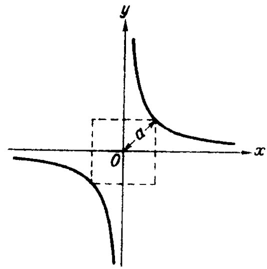



Fig. 189

La hipérbola equilátera es la hipérbola cuyos ejes son iguales: $a = b$. Su ecuación es $x^2-y^2 = a^2$. Las asíntotas de la hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí. Si se toman las asíntotas como ejes de coordenadas (fig. 189), la ecuación de la hipérbola equilátera es: $xy = a^2/2$.

## 6. *La parábola*

Los elementos de la parábola (fig. 190) son: $Ox$ es el *eje de la parábola*, $O$ es el *vértice*, $F$ es el *foco* (el punto situado en el eje a la distancia $p/2$ del vértice), $NN'$ es la *directriz* (la recta perpendicular al eje y que se encuentra a la distancia $p/2$ del vértice, al otro lado del foco), $p$ es el *parámetro focal* (la distancia desde el foco hasta la directriz o la mitad de la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje). La excentricidad de la parábola es igual a la unidad (veáse pág. 244).

Ecuación de la parábola: la *ecuación canónica* es $y^2 = 2px$ (si el origen de coordenadas está en el vértice de la parábola, el eje $Ox$ coincide con su eje, la parábola está situada a la derecha del vértice*). La *ecuación en coordenadas polares* véase en la pág. 245. La *ecuación de la parábola con eje vertical* (fig. 191) es:

$$y = ax^2+bx+c,$$

* Se supone que la dirección positiva del eje $Ox$ es hacia la derecha y la del eje $Oy$ es hacia arriba.

el parámetro de la parábola dada por esta ecuación es:

$$p = \frac{1}{2|a|}$$

si $a > 0$ la parábola tiene el vértice abajo*, si $a < 0$, el vértice está arriba*; las coordenadas del vértice son: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL *(definición de la parábola)*: la parábola es el lugar geométrico de los puntos $M(x, y)$ equidistantes (fig. 190) de un punto dado (el foco) o de una recta dada (la directriz)**: $MF = MK = x + \frac{p}{2}$; $MF$ es el radio vector focal de un punto de la parábola.

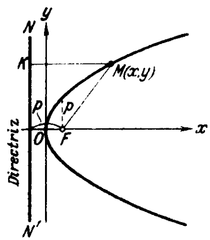



Fig. 190

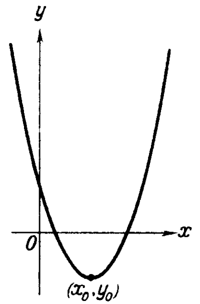



Fig. 191

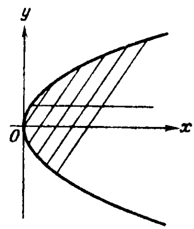



Fig. 192

EL DIÁMETRO es la recta paralela al eje de la parábola. El diámetro divide por la mitad las cuerdas paralelas a la tangente trazada al extremo del diámetro (fig. 192). Si la pendiente de estas cuerdas es igual a $k$, la ecuación del diámetro es: $y = \frac{p}{k}$.

LA TANGENTE a la parábola (fig. 193) en el punto $M(x_0, y_0)$ tiene la ecuación $yy_0 = p(x + x_0)$. La tangente y la normal a la parábola son las bisectrices de los ángulos entre el radio vector focal y el diámetro que pasa por el punto de tangencia. El segmento de tangente a la parábola entre el punto de tangencia y el punto de intersección con el eje de la parábola (el eje $Ox$) se divide por la mitad por la tangente en el vértice de la parábola (el eje $Oy$): $TS = SM$; $TF = FM$; $TO = OP = x_0$. La recta $y = kx + b$ es tangente a la parábola si $p = 2bk$.

---

* Véase la nota de la pág. anterior.

** Aquí y a continuación en las fórmulas que contienen las coordenadas se comprende que la parábola está dada por la ecuación canónica.

El radio de curvatura de la parábola en el punto $M(x_1, y_1)$ es: $R = \frac{(p+2x_1)^{3/2}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\operatorname{sen}^3 u} = \frac{n^3}{p^2}$, donde $n$ es la longitud de la normal $MN$ (fig. 193). El radio de curvatura en el vértice $O$ es: $R = p$.

El área del segmento de la parábola $MON = \frac{2}{3}$ del área de $PQNM$ (fig. 194). El área $OMR = \frac{2}{3}xy$.

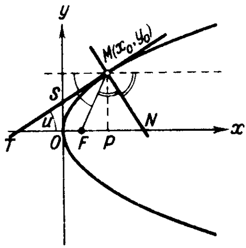



Fig. 193

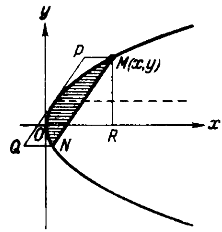



Fig. 194

La longitud de arco de la parábola desde el vértice $O$ hasta el punto $M(x, y)$ es:

$$\overset{\frown}{OM} = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)} + \ln\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{x\left(x+\frac{p}{2}\right)} + \frac{p}{2}\operatorname{Arsh}\sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Aproximadamente, para valores infinitesimales de $\frac{x}{y}$ es: $\overset{\frown}{OM} \approx y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right]$.

## *7. Curvas de segundo orden (secciones cónicas)*

La ecuación general de las curvas de segundo orden

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

determina una elipse (en particular, una circunferencia), una hipérbola, una parábola o un par de rectas (una curva *degenerada* de segundo orden).

LOS INVARIANTES de una curva de segundo orden son:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac-b^2, \quad S = a+c.$$

Estos valores no varían cuando se traslada el origen de coordenadas o giran los ejes de coordenadas, es decir, si después de la transformación de las coordenadas la ecuación de la curva toma la forma: $a'x'^2+2b'x'y'+c'y'^2+2d'x'+2e'y'+f' = 0$, entonces los valores $\Delta$, $\delta$ y $S$, calculados para los nuevos coeficientes, conservan los valores iniciales.

LA DETERMINACIÓN DE LA FORMA DE LA CURVA, representada por una ecuación de segundo orden dada y reducida a su forma canónica, se efectúa según la tabla de las pág. 246-247.

PROPIEDADES GENERALES DE LAS CURVAS DE SEGUNDO ORDEN. *Secciones cónicas.* El cono circular recto, cuando se corta por un plano, forma en él una sección cónica. Si el plano secante no pasa por el vértice del cono, la sección será una hipérbola, una parábola o una elipse, según que el plano de la sección sea paralelo a dos, a una, o a ninguna de las generatrices del cono. Cuando el plano secante pasa por el vértice del cono se obtienen secciones cónicas degeneradas ($\Delta = 0$, véase la tabla en las págs. 246-247). Si el cono degenera en un cilindro resultan rectas paralelas (el vértice del cono se aleja al infinito).

*Propiedad de la directriz.* El lugar geométrico de los puntos $M$ (fig. 195) para los cuales la razón de sus distancias a un punto dado $F$ *(foco)* y a una recta dada *(directriz)* es un valor constante, igual a $e$, es una curva de segundo grado con excentricidad $e$. Para $e < 1$ resulta una elipse, para $e = 1$ una parábola, para $e > 1$ una hipérbola.

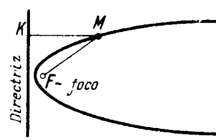



Fig. 195

DETERMINACIÓN DE UNA CURVA POR CINCO PUNTOS. Por cinco puntos dados pasa una sola curva de segundo grado. Si por lo menos tres de los puntos dados se encuentran en una recta, resulta una curva degenerada.

ECUACIÓN POLAR. Las curvas de segundo orden en coordenadas polares tienen la ecuación $\rho = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$ ($p$ es el parámetro focal, $e$ es la excentricidad de la curva dada, el polo se encuentra en el foco, el eje polar está dirigido desde el foco hasta el vértice más próximo*).

* Para la hipérbola, esta ecuación determina sólo una rama.

*Reducción de las ecuaciones de*

| | | | Forma de la curva |
|---|---|---|---|
| Curvas centrales $\delta \neq 0$ | $\delta > 0$ | $\Delta \neq 0$ | **Una elipse**<br>a) $\Delta \cdot S < 0$ real<br>b) $\Delta \cdot S > 0$ imaginaria** |
| | | $\Delta = 0$ | **Un par de rectas imaginarias**** con un punto real común |
| | $\delta < 0$ | $\Delta \neq 0$ | **Una hipérbola** |
| | | $\Delta = 0$ | **Un par de rectas concurrentes** |
| Curvas parabólicas $\delta = 0$*** | | $\Delta \neq 0$ | **Una parábola** |
| | | $\Delta = 0$ | **Un par de rectas:**<br>paralelas, si $d^2 - af > 0$,<br>coincidentes, si $d^2 - af = 0$,<br>imaginarias**, si $d^2 - af < 0$ |

* Véanse las designaciones en las págs. 244-245.

** Véase la observación de la pág. 232.

*** En el caso $\delta = 0$ se supone que ninguno de los coeficientes $a$, $b$, $c$ es igual a cero.

## *segundo grado a la forma canónica**

| Transformación necesaria de coordenadas | Ecuación canónica después de la transformación |
|---|---|
| **1) Traslación del origen de coordenadas al centro de la curva, cuyas coordenadas son:**<br>$x_0 = \frac{be-cd}{\delta}, \quad y_0 = \frac{bd-ae}{\delta}$.<br>**2) Rotación de los ejes en un ángulo $\alpha$, determinado por la ecuación**<br>$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2b}{a-c}$.<br>**El signo de sen $2\alpha$ debe coincidir con el signo de $2b$. En este caso la pendiente del nuevo eje $x'$ es:**<br>$k = \frac{c-a+\sqrt{(c-a)^2+4b^2}}{2b}$ | $a'x'^2+c'y'^2+\frac{\Delta}{\delta} = 0;$<br>$a' = \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$<br>$c' = \frac{a+c \quad \sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$<br>**$a'$ y $c'$ son las raíces de la ecuación cuadrática**<br>$u^2-Su+\delta = 0$ |
| **1) Traslación del origen de coordenadas al vértice de la parábola, cuyas coordenadas $x_0$ e $y_0$ se determinan por las ecuaciones**<br>$ax_0+by_0+\frac{ad+be}{S} = 0$<br>$\left(\frac{d+dc-be}{S}\right)x_0+\left(e+\frac{ae-bd}{S}\right)y_0+f = 0.$<br>**2) Rotación de los ejes en un ángulo $\alpha$ determinado por la ecuación:**<br>$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b};$<br>**el signo de sen $\alpha$ debe ser opuesto al signo de $a$.** | $y'^2 = 2px';$<br>$p = \frac{ae-bd}{S\sqrt{a^2+b^2}}$ |
| Rotación de los ejes en un ángulo $\alpha$ determinado por la ecuación<br>$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b};$<br>el signo de sen $\alpha$ debe ser opuesto al signo de $a$ | $Sy'^2+2\frac{ad+be}{\sqrt{a^2+b^2}}y'+f=0,$<br>se reduce a la forma<br>$(y'-y_0')(y'-y_1') = 0$ |

Si dos coeficientes ($a$ y $b$ ó $b$ y $c$) son iguales a cero, la simplificación de la ecuación se reduce a una traslación paralela de los ejes; la ecuación $cy^2+2dx+2ey+f = 0$ se transforma al tipo $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ y la ecuación $ax^2+2dx+2ey+f = 0$ al tipo $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$.

# B. GEOMETRÍA DEL ESPACIO

## 8. *Conceptos fundamentales y fórmulas*

COORDENADAS. La posición de un punto $P$ cualquiera del espacio puede ser determinada mediante uno u otro *sistema de coordenadas*. Los sistemas de coordenadas más empleados son: 1) los cartesianos rectangulares, 2) los cilíndricos, 3) los esféricos.

*Coordenadas cartesianas rectangulares* del punto $P$ son las distancias* de este punto tomadas con signo determinado, a tres planos de coordenadas perpendiculares entre sí o, lo que es lo mismo, las proyecciones del radio vector $\mathbf{r}$ del punto $P$ (veáse pág. 597) sobre tres ejes *de coordenadas* perpendiculares entre sí. Según sea la distribución respectiva de las direcciones positivas de los ejes de coordenadas son posibles sistemas de coordenadas de mano *derecha* (fig. 196, *a*) y de mano *izquierda* (fig. 196, *b*). En lo sucesivo en los dibujos se tomará el sistema de mano derecha (las fórmulas no dependen del tipo del sistema de coordenadas). El punto de intersección de los ejes de coordenadas se llama *origen* de coordenadas. Las coordenadas $x$, $y$, $z$ se llaman: *abscisa*, *ordenada* y *cota*, respectivamente. La anotación $P(a, b, c)$ significa que el punto $P$ tiene las coordenadas $x = a$, $y = b$, $z = c$. Los signos de las coordenadas dependen del octante en que está situado el punto (fig. 197):

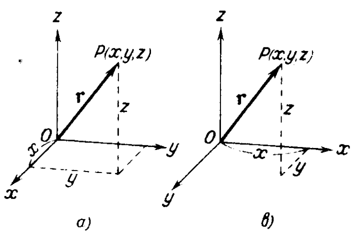


Fig. 196

| Octante | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | + | − | − | + | + | − | − | + |
| $y$ | + | + | − | − | + | + | − | − |
| $z$ | + | + | + | + | − | − | − | − |

Las *superficies coordenadas*, para las cuales una de las coordenadas permanece constante, son aquí los planos paralelos a los planos coor-

* Expresadas en las unidades de una cierta escala.

denados y las *líneas coordenadas*, a lo largo de las cuales varía sólo una de las coordenadas, son las rectas paralelas a los ejes coordenados. Las superficies coordenadas se cortan por las líneas coordenadas.

Se obtiene un sistema más general de *coordenadas curvilíneas* dando tres familias cualesquiera de superficies coordenadas, tales que por cada punto del espacio pase una sola superficie de cada familia. La posición de un punto en este sistema se determina por los valores de los parámetros de las superficies coordenadas que pasan por este punto. Los sistemas de coordenadas curvilíneas más empleados son: el cilíndrico y el esférico, descritos más adelante.

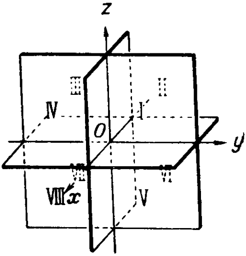


Fig. 197

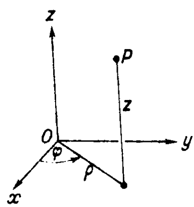


Fig. 198

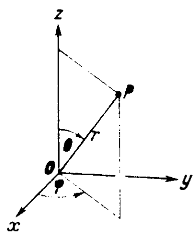


Fig. 199

*Coordenadas cilíndricas* (fig. 198): $\rho$ y $\varphi$ son las coordenadas polares de las proyecciones del punto $P$ sobre el plano principal (generalmente el $xOy$), $z$ es la cota, es decir, la distancia desde el punto $P$ hasta el plano principal.

Para las coordenadas cilíndricas, las superficies coordenadas son los planos perpendiculares al eje $z$ ($z$ = const), los semiplanos que están limitados por el eje $z$ ($\varphi$ = const) y las superficies cilíndricas cuyos ejes coinciden con el eje $z$ ($\rho$ = const). Las líneas coordenadas son las líneas de intersección de estas superficies.

Las fórmulas de conversión de coordenadas cilíndricas a cartesianas, y viceversa, son:

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \alpha, \qquad z = z;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{Arcsen} \frac{y}{\rho}.$$

Las *coordenadas esféricas (polares)* son: $r$ es la *longitud del radio vector*, $\varphi$ es la *longitud*, $\theta$ es la *distancia polar*. Las direcciones positivas están señaladas en la fig. 199. Dando a las coordenadas esféricas valores entre los siguientes límites: $0 \leqslant r < \infty$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, se obtienen unívocamente todos los puntos del espacio.

Las superficies coordenadas son: las esferas con centro en el origen de coordenadas ($r$ = const), los semiplanos que están limitados por el eje $z$($\varphi$ = conts), los conos (con vértice en el origen de coordenadas) cuyos ejes coinciden con el eje $z$($\theta$ = const). Las líneas coordenadas son las líneas de intersección de estas superficies.

Las fórmulas de conversión de coordenadas esféricas a cartesianas, y viceversa, son:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \cos \theta;$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{y}{x}, \quad \theta = \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

TODA DIRECCIÓN EN EL ESPACIO se caracteriza por el vector unitario $\mathbf{t}^0$ (veáse pág. 596) o por sus coordenadas, que son los cosenos de los ángulos (fig. 200) formados por la dirección dada con las direcciones positivas de los ejes de coordenadas (los *cosenos directores)*:

$$l = \cos \alpha; \quad m = \cos \beta; \quad n = \cos \gamma, \quad l^2+m^2+n^2 = 1.$$

El coseno del ángulo $\varphi$ formado por dos direcciones dadas que tienen cosenos directores $l_1$, $m_1$, $n_1$ y $l_2$, $m_2$, $n_2$, es:

$$\cos \varphi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 .$$

Dos direcciones son perpendiculares, si $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

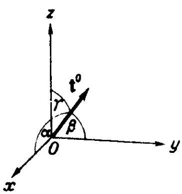


Fig. 200

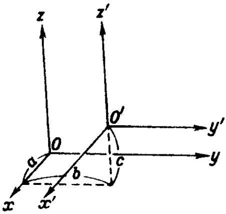


Fig. 201

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS RECTANGULARES.

*Traslación paralela* de los ejes ($x$, $y$, $z$ son las coordenadas primitivas; $x'$, $y'$, $z'$ son las coordenadas nuevas; $a$, $b$, $c$ son las coordenadas del origen nuevo en coordenadas primitivas, fig. 201):

$$x = x'+a, \quad y = y'+b, \quad z = z'+c; \quad x' = x-a,$$
$$y' = y-b, \quad z' = z-c.$$

*Rotación de los ejes* (fig. 202). Si se designan los cosenos directores de los ejes nuevos $x'$, $y'$, $z'$ según el esquema dado aquí, entonces

$$\begin{aligned} x &= l_1x'+l_2y'+l_3z', \\ y &= m_1x'+m_2y'+m_3z', \\ z &= n_1x'+n_2y'+n_3z', \\ x' &= l_1x+m_1y+n_1z, \\ y' &= l_2x+m_2y+n_2z, \\ z' &= l_3x+m_3y+n_3z. \end{aligned}$$

| En relación a los ejes primitivos | Los cosenos de los ejes nuevos | | |
|---|---|---|---|
| | $x'$ | $y'$ | $z'$ |
| $x$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ |
| $y$ | $m_1$ | $m_2$ | $m_3$ |
| $z$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ |

Determinante de la transformación:

$$\Delta = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}.$$

*Propiedades del determinante de la transformación:* 1) $\Delta = \pm 1$ (el signo más, si el sistema de mano izquierda se convierte en sistema de mano izquierda o si el sistema de mano derecha se convierte en sistema de mano derecha; y menos, si el sistema de mano izquierda se convierte en sistema de mano derecha, o viceversa.)

2) La suma de los cuadrados de los elementos de una fila o de una columna es igual a 1.

3) La suma de los productos de los elementos correspondientes de dos filas o de dos columnas es igual a cero.

4) Todo elemento es igual a su adjunto (véase pág. 166) multiplicado por $\Delta = \pm 1$.

*Angulos de Euler.* La posición del sistema nuevo de coordenadas con respecto al primitivo se puede caracterizar totalmente por tres ángulos, introducidos por Leonardo Euler (fig. 202):

1) el ángulo de *nutación* $\vartheta$, formado por las direcciones positivas de los ejes $Oz$ y $Oz'$ $(0 \leqslant \vartheta < \pi)$;

2) el ángulo de *precesión* $\psi$, formado por el eje $Ox$ y la recta $OA$ que es la intersección de los planos $xOy$ y $x'Oy'$ y en la que se ha elegido la dirección positiva de tal modo que $OA$, $Oz$ y $Oz'$ formen una terna con la misma orientación que los ejes de coordenadas*;

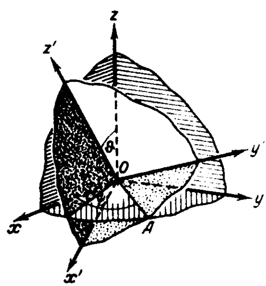



Fig. 202

* Lo referente a la orientación de una terna de direcciones, véase la pág. 600

el ángulo $\psi$ se considera en la dirección desde $Ox$ hasta $Oy$ $(0 \leq \psi < 2\pi)$;

3) el ángulo de *rotación neta* $\varphi$, formado por $OA$ y $Ox'$, la dirección se considera establecida desde $Ox'$ hasta $Oy'$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$.

Haciendo las notaciones

$$\cos\vartheta = c_1, \quad \cos\psi = c_2, \quad \cos\varphi = c_3,$$
$$\operatorname{sen}\vartheta = s_1, \quad \operatorname{sen}\psi = s_2, \quad \operatorname{sen}\varphi = s_3,$$

se tiene

$$\begin{aligned} l_1 &= c_2c_3 - c_1s_2s_3, \\ m_1 &= s_2c_3 + c_1c_2c_3, \\ n_1 &= s_1s_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_2 &= -c_2s_3 - c_1s_2c_3, & l_3 &= s_1s_2, \\ m_2 &= -s_2s_3 + c_1c_2c_3, & m_3 &= -s_1c_2. \\ n_2 &= s_1c_3, & n_3 &= c_1. \end{aligned}$$

La distancia entre dos puntos: $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (fig. 203) es igual a $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Los cosenos directores del segmento $P_1P_2$ son:

$$\cos\alpha = \frac{x_2-x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2-y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2-z_1}{d}.$$

División de un segmento en una razón dada (fig. 203).

Las coordenadas del punto $P$ para el cual

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{m}{n} = \lambda,$$

se determinan por las fórmulas:

$$x = \frac{nx_1+mx_2}{n+m} = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{ny_1+my_2}{n+m} = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

$$z = \frac{nz_1+mz_2}{n+m} = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Las del punto *medio* del segmento son:

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1+z_2}{2}.$$

Las coordenadas del *centro de gravedad* de un sistema de puntos materiales $M_i(x_i, y_i)$ con masas $m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se determinan por las fórmulas (las sumas se consideran desde $i = 1$ hasta $i = n$)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i}.$$

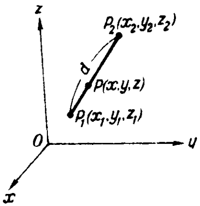



Fig. 203

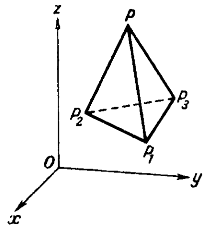



Fig. 204

EL VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE TRIANGULAR con vértices $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3\ y_3, z_3)$ (fig. 204) es:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}.$$

Al calcular por esta fórmula, resulta $V > 0$ si la orientación de la terna de vectores $PP_1$, $PP_2$, $PP_3$ coincide con la orientación del sistema de coordenadas (véase pág. 600) y resulta $V < 0$ en caso contrario.

Los 4 puntos $P$, $P_1$, $P_2$ y $P_3$ pertenecen a un mismo plano si:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE. A toda ecuación $F(x, y, z) = 0$ le corresponde una superficie, que tiene la propiedad de que las coordenadas de cualquier punto $P$ perteneciente a esta superficie verifican a la ecuación dada, y viceversa, cualquier punto cuyas coordenadas verifican a la ecuación dada, pertenece a la superficie. La ecuación $F(x, y, z) = 0$ se llama ecuación de dicha superficie.

La ecuación de una *superficie cilíndrica* (véase pág. 201), cuyas generatrices son paralelas al eje $Ox$ (o al $Oy$, o al $Oz$), no contiene la coordenada $x$ (o, respectivamente, las $y$ ó $z$): $F(y, z) = 0$ [ó $F(x, z) = 0$ ó $F(x, y) = 0$]. En el plano $yOz$ esta misma ecuación representa la línea de intersección de la superficie cilíndrica con este plano.

La superficie cilíndrica, en la cual la dirección de las generatrices se determina por los cosenos directores (o por valores proporcionales a ellos) $l$, $m$, $n$, tiene la ecuación $F(nx-lz, ny-mz) = 0$, La *superficie* obtenida por *rotación* de la curva $z = f(x)$ en el plano $xOz$ alrededor del eje $z$ (fig. 205), tiene la ecuación $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$. Análogamente se escriben las ecuaciones de las superficies de revolución alrededor de otros ejes de coordenadas.

La ecuación de una *superficie cónica* (véase pág. 202) con el vértice en el origen de coordenadas, tiene la forma $F(x, y, z) = 0$, donde $F$ es una función homogénea de las coordenadas (véase pág. 337).

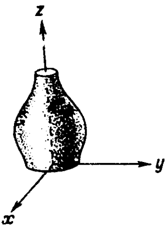


Fig. 205

ECUACIÓN DE UNA LÍNEA EN EL ESPACIO. Una línea en el espacio se da por tres ecuaciones: $x = \varphi_1(t)$; $y = \varphi_2(t)$; $z = \varphi_3(t)$. A cada valor del parámetro $t$ corresponde un punto determinado de la línea. (El parámetro puede no tener una interpretación geométrica inmediata.) Otro procedimiento para expresar una curva en el espacio es indicar dos ecuaciones: $F_1(x, y, z) = 0$, $F_2(x, y, z) = 0$. Cada una de éstas determina una superficie. Los puntos cuyas coordenadas verifican a ambas ecuaciones pertenecen a la línea de intersección de las superficies dadas. Toda ecuación $F_1 + \lambda F_2 = 0$, para cualquier $\lambda$, representa una superficie que pasa por la línea considerada y puede reemplazar a una de las ecuaciones primitivas dadas.

## 9. *El plano y la recta en el espacio*

ECUACIÓN DEL PLANO. Toda ecuación lineal con respecto a las coordenadas, determina un plano, y viceversa, la ecuación de cualquier plano es de primer grado.

La *ecuación general del plano* es: $Ax + By + Cz + D = 0$; en forma vectorial es: $\mathbf{rN} + D = 0$ (veánse las págs. 600 y 604). El vector $\mathbf{N}$ $(A, B, C)$ (fig. 206) es perpendicular al plano; los cosenos directores de este vector son:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

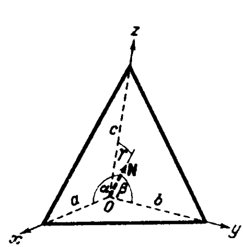


Fig. 206

Si $D = 0$, el plano pasa por el origen de coordenadas; si $A = 0$ (ó $B = 0$, ó $C = 0$), el plano es paralelo al eje $Ox$ (respectivamente, al eje $Oy$ o al eje $Oz$), si $A = B = 0$ (ó $A = C = 0$ ó $B = C = 0$), el plano es paralelo al plano $Oxy$ (respectivamente, al plano $Oxz$ ó al plano $Oyz$).

*Ecuación normal del plano:* $x = \cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$; en forma vectorial es $\mathbf{r}\mathbf{N}^0 - p = 0$. El vector $\mathbf{N}^0$ es unitario, $p$ es la distancia desde el plano hasta el origen de coordenadas. La ecuación normal puede ser obtenida de la general multiplicando por un factor normalizador: $\pm\mu = \frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (el signo de $\mu$ debe ser opuesto al signo de $D$).

*Ecuación "segmentaria" del plano:* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $a$, $b$, $c$ son los segmentos interceptados por el plano en los ejes de coordenadas, teniendo en cuenta el signo (fig. 206).

*Ecuación del plano que pasa*

a) *por tres puntos dados* $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{en forma vectorial} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) = 0^*;$$

b) *por dos puntos dados* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, *siendo paralelo a la recta con vector director* $\mathbf{R}(l, m, n)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \quad \text{en forma vectorial} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{R} = 0^*;$$

c) *por un punto dado* $P_1(x_1, y_1, z_1)$, *siendo paralelo a dos rectas con vectores directores* $\mathbf{R}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\mathbf{R}_2(l_2, m_2, n_2)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{en forma vectorial} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = 0^*;$$

d) *por un punto dado* $P_1(x_1, y_1, z_1)$, *siendo perpendicular a la recta con vector director* $\mathbf{N}(A, B, C)$:

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, en forma vectorial $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{N} = 0^{**}$;

e) *por la línea de intersección de dos planos,* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

---

* Véase en la pág. 600 lo referente al producto de tres vectores (producto mixto).
** El producto escalar de vectores veáse en la pág. 600.

(ecuación del *haz de planos*, fig. 207). Al hacer variar $\lambda$ desde $-\infty$ hasta $+\infty$, se obtienen todos los planos del haz. Para $\lambda = \pm 1$ resultan las ecuaciones de los planos que bisecan los ángulos formados por los planos dados, si sus ecuaciones se dan en forma normal.

EL ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS, véanse las págs. 260-261.

EL PUNTO DE INTERSECCIÓN DE TRES PLANOS, véanse las págs. 258-259.

LA DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS* $Ax+By+Cz+D_1 = 0$ y $Ax+By+Cz+D_2 = 0$ es igual a:

$$\delta = \frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

LA DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO se halla mediante el reemplazo de las coordenadas del punto $M(a, b, c)$ en la ecuación normal ($x \cos\alpha+y \cos\beta+z \cos\gamma-p = 0$) del plano**:

$$\delta = a \cos\alpha+b \cos\beta+c \cos\gamma-p.$$

Si $M$ y el origen de coordenadas están a distintos lados del plano, entonces $\delta > 0$; en caso contrario, $\delta < 0$.

ECUACIONES DE LA RECTA EN EL ESPACIO. La recta en el espacio se determina como la línea de intersección de dos planos y se expresa analíticamente por un sistema de dos ecuaciones lineales.

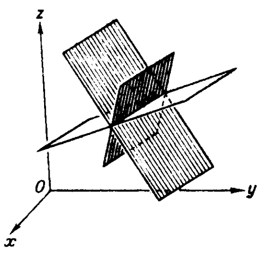



Fig. 207

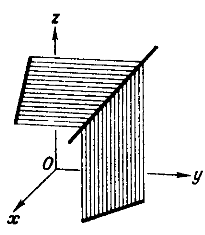



Fig. 208

*Ecuaciones generales de la recta:*

$$\text{I} \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0; \end{cases}$$

---

* La condición de paralelismo de los planos véase en la pág. 600.

** La reducción de la ecuacón general del plano a la forma normal véase en la pág. 255.

en forma vectorial*

$$\begin{cases} \mathbf{r}\mathbf{N}_1 + D_1 = 0, \\ \mathbf{r}\mathbf{N}_2 + D_2 = 0. \end{cases}$$

Las *ecuaciones de la recta dada por dos planos proyectantes:* $y = kx + a$, $z = hx + b$; cada una de estas dos ecuaciones determina un plano que proyecta la recta sobre los planos $Oxy$ y $Oxz$ (fig. 208). Para las rectas paralelas al plano $Oyz$, este tipo de ecuaciones no es aplicable; para ellas es necesario tomar las proyecciones de cualquier otro par de planos de coordenadas.

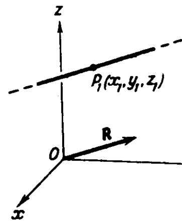



Fig. 209

Las *ecuaciones de la recta que pasa*

a) *por un punto dado* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y *es paralela al vector director* $\mathbf{R}(l, m, n)$ (fig. 209);

$$\text{II} \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}, \end{cases}$$

en forma vectorial $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{R} = 0$* ó (en forma paramétrica)

$$x = x_1 + lt, \quad y = y_1 + mt, \quad z = z_1 + nt,$$

en forma vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}t$.

"La *forma canónica*" (II) se obtiene de la (I) por las fórmulas:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix};$$

en forma vectorial es $\mathbf{R} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$*; los números $x_1, y_1, z_1$ se eligen de tal modo que verifiquen las ecuaciones (I);

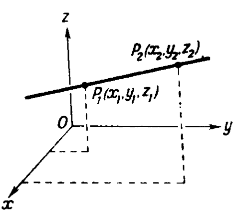



Fig. 210

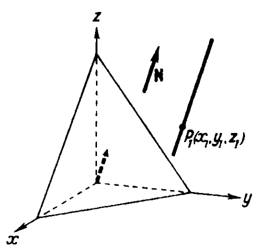



Fig. 211

* Los productos de vectores véase en la pág. 600.

## PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE PLANOS Y RECTAS

| Coordenadas del punto de intersección | dados por sus ecuaciones | se calculan por la fórmula | Observaciones |
|---|---|---|---|
| de tres planos | $A_1x+B_1y+C_1z+$ $+D_1=0,$ $A_2x+B_2y+C_2z+$ $+D_2=0,$ $A_3x+B_3y+C_3z+$ $+D_3=0,$ | $\bar{x}=\dfrac{-\Delta_x}{\Delta}$, $\bar{y}=\dfrac{-\Delta_y}{\Delta}$, $\bar{z}=\dfrac{-\Delta_z}{\Delta}$, en que $\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_x=\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_y=\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_z=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}$ | Si $\Delta \neq 0$, los tres planos se cortan en un punto; si $\Delta = 0$ y alguno de los menores de segundo orden es $\neq 0$, los planos son paralelos a una cierta dirección; si todos los menores son $= 0$, los planos pasan por una recta |
| de cuatro planos | $A_1x+B_1y+C_1z+$ $+D_1=0,$ $A_2x+B_2y+C_2z+$ $+D_2=0,$ $A_3x+B_3y+C_3z+$ $+D_3=0,$ $A_4x+B_4y+C_4z+$ $+D_4=0.$ | Se busca el punto de intersección de tres planos cualesquiera de los cuatro (véase anteriormente). En este caso ($\delta = 0$) una de las ecuaciones es consecuencia de las tres restantes | Los cuatro planos pasan por un punto sólo si $\delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0.$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| de un plano y una recta | 1) $Ax+By+Cz+$ $+D=0,$ $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=$ $=\dfrac{z-z_1}{n}$<br><br>2) $Ax+By+Cz+$ $+D=0,$ $y=kx+a,$ $z=hx+b$ | 1) $\bar{x}=x_1-l\rho$ $\bar{y}=y_1-m\rho$ $\bar{z}=z_1-n\rho,$<br>en que<br>$\rho=\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Al+Bm+Cn};$<br><br>2) $\bar{x}=-\dfrac{Ba+Cb+D}{A+Bk+Ch},$ $\bar{y}=k\bar{x}+a,\quad \bar{z}=h\bar{x}+b$ | Si $Al+Bm+Cn=0$ $(A+Bk+Ch)=0),$<br>la recta es paralela al plano; si además $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ $(Ba+Cb+D=0),$<br>la recta pertenece al plano |
| de dos rectas | $y=k_1x+a_1,$ $z=h_1x+b_1;$ $y=k_2x+a_2,$ $z=h_2x+b_2$ | $\bar{x}=\dfrac{a_2-a_1}{k_1-k_2}=\dfrac{b_2-b_1}{h_1-h_2};$<br>$\bar{y}=\dfrac{k_1a_2-k_2a_1}{k_1-k_2};$<br>$\bar{z}=\dfrac{h_1b_2-h_2b_1}{h_1-h_2}$ | Estas fórmulas dan un punto de intersección sólo si se cumple $(a_1-c_2)(h_1-h_2)=(b_1-b_2)(k_1-k_2),$<br>en caso contrarió las rectas no se cortan (véase también la pag. 257). |

## Angulo entre planos y rectas

| El ángulo entre | dados por sus ecuaciones | se calcula por la fórmula |
|---|---|---|
| *dos planos* | $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$<br>$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ | $\cos\varphi=\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}$ |
| en forma vectorial: | $\mathbf{r}\mathbf{N}_1+D_1=0,$<br>$\mathbf{r}\mathbf{N}_2+D_2=0,$ | $\cos\varphi=\dfrac{\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2}{N_1N_2}$ |
| *dos rectas* | $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1},$<br>$\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$ | $\cos\varphi=\dfrac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2+n_1^2)(l_2^2+m_2^2+n_2^2)}}$ |
| en forma vectorial: | $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{R}_1=0,$<br>$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2)\times\mathbf{R}_2=0$ | $\cos\varphi=\dfrac{\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2}{R_1R_2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| *la recta y el plano* | $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$, $Ax+By+Cz+D = 0$ | $\operatorname{sen} \varphi = \dfrac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(l^2+m^2+n^2)}}$ |
| en forma vectorial: | $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{r}\mathbf{N}+D = 0$ | $\operatorname{sen} \varphi = \dfrac{\mathbf{RN}}{RN}$ |

**Condiciones de paralelismo**

(las notaciones son las mismas que más arriba):

*de dos planos*: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ ó $\mathbf{N}_1\times\mathbf{N}_2 = 0$,

*de dos rectas*: $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ ó $\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2 = 0$,

*de una recta y un plano*: $Al+Bm+Cn = 0$ ó $\mathbf{RN} = 0$.

**Condiciones de perpendicularidad**

(las notaciones son las mismas que más arriba):

*de dos planos*: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2 = 0$ ó $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2 = 0$,

*de dos rectas*: $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 = 0$ ó $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_2 = 0$,

*de una recta y un plano*: $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$ ó $\mathbf{N}\times\mathbf{R} = 0$.

b) *por dos puntos dados* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ (fig. 210):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

en forma vectorial

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) = 0^*;$$

c) *por un punto dado* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *y es perpendicular al plano* $Ax+$ $+By+Cz+D = 0$ ó $\mathbf{r}\mathbf{N}+D = 0^*$ (fig. 211), son:

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C},$$

en forma vectorial $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{N} = 0^*$.

La distancia $\delta$ del punto $M\,(a, b, c)$ a la recta dada por la ecuación en forma canónica (II), se determina por la fórmula:

$$\delta^2 = \frac{[(a-x_1)\,m-(b-y_1)\,l]^2+[(b-y_1)\,n-(c-z_1)\,m]^2+[(c-z_1)\,l-(a-x_1)\,n]^2}{l^2+m^2+n^2}.$$

La distancia mínima entre dos rectas, si sus ecuaciones están dadas en la forma canónica

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$$

y

$$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2},$$

puede ser calculada por la fórmula

$$\delta = \frac{\pm\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}}.$$

*La condición de concurrencia de dos rectas en el espacio* es la anulación deldeterminante que figura en el numerador.

---

* Los productos de vectores véase en la pág. 600.

## *10. Superficies de segundo orden o cuádricas (ecuaciones canónicas)**

SUPERFICIES CON CENTRO. Las ecuaciones que vienen insertadas a continuación están dadas en forma *canónica:* o sea, el *centro* de la superficie (el punto en que todas las cuerdas que pasan por éste se dividen por la mitad) está situado en el origen de coordenadas y como ejes de coordenadas se han tomado los ejes de simetría de la superficie. En este caso los planos coordenados son los planos de simetría.

*Elipsoide* (fig. 212): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, $a$, $b$, $c$ son los semiejes.

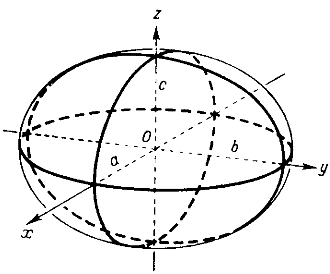



Fig. 212

Si $a = b > c$ se tiene el *elipsoide de revolución achatado* (fig. 213), que se obtiene haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, perteneciente al plano $Oxz$, alrededor de su eje menor. Si $a = b < c$ se tiene el *elipsoide de revolución alargado* (fig. 214), que se obtiene haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, perteneciente al plano $Oxz$, alrededor de su eje mayor. Si $a = b = c$ se tiene la *esfera:* $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

Cualquier plano corta al elipsoide por una elipse (en caso particular, por una circunferencia). El volumen del elipsoide es igual a $^4/_3\pi abc$.

*Hiperboloide de una hoja* (fig. 215): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$, $a$ y $b$ son los semiejes reales y $c$ es el semieje imaginario.

Veánse en la pág. 266 las generatrices rectas.

* La ecuación general de una superficie de segundo orden véase en la pág. 268.

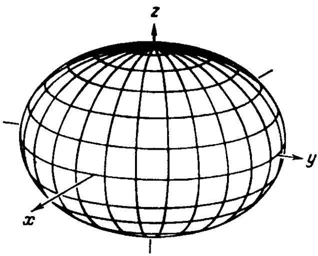


Fig. 213

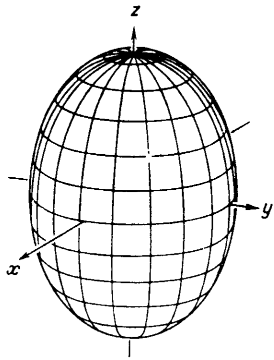


Fig. 214

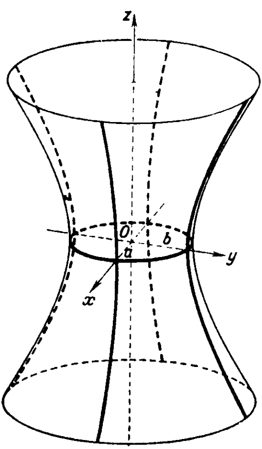


Fig. 215

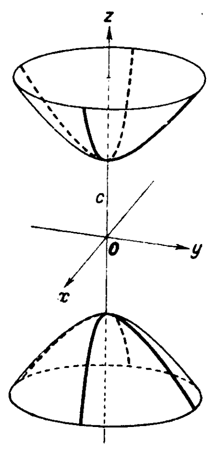


Fig. 216

*Hiperboloide de dos hojas* (fig. 216) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $c$ es el semieje real, $a$ y $b$ son los semiejes imaginarios.

Para ambos hiperboloides las secciones paralelas al eje $Oz$ son hipérbolas (para el hiperboloide de una hoja puede ser un par de rectas concurrentes) y las secciones paralelas al plano $xOy$ son elipses.

Si $a=b$, el hiperboloide puede ser obtenido por revolución de la hipérbola, con semiejes $a$ y $c$, alrededor del eje $2c$, que es imaginario en el caso del hiperboloide de una hoja y real en el caso del hiperboloide de dos hojas.

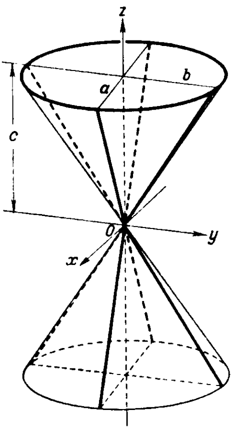



Fig. 217

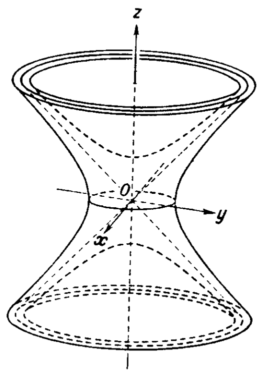



Fig. 218

*Cono* (fig. 217): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$; tiene el vértice en el origen de coordenadas y por directriz se puede tomar (véase pág. 202) una elipse con semiejes $a$ y $b$ cuyo plano sea perpendicular al eje $Oz$ y esté a la distancia $c$ del origen de coordenadas. Este cono es asintótico a los dos hiberboloides $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$, es decir, cualquiera de sus generatrices se aproxima a ambos hiperboloides al alejarse al infinito (fig. 218). Si $a=b$, se tiene un cono circular recto (véase pág. 203).

PARABOLOIDES. Los paraboloides no tienen centro; en las ecuaciones dadas a continuación, el *vértice* del paraboloide se coloca en el origen de coordenadas, el eje $Oz$ es el eje de semetría y los planos $xOz$ e $yOz$ son los planos de simetría.

*Paraboloide elíptico* (fig. 219): $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Las secciones paralelas al eje $Oz$ son parábolas; las secciones paralelas al plano $xOy$ son elipses. Si $a = b$ se tiene un ***paraboloide de revolución***, que resulta al hacer girar la parábola $z = \frac{x^2}{a^2}$, perteneciente al plano $xOz$, alrededor de su eje.

El volumen de la parte del paraboloide truncada por un plano perpendicular a su eje a la altura $h$, es igual a $^1/_2\pi abh$, es decir, es igual a la mitad del volumen del cilindro elíptico que tiene la misma base y altura.

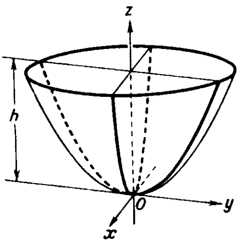



Fig. 219

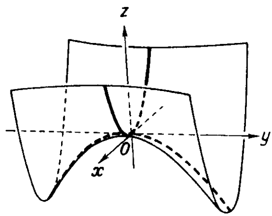



Fig. 220

*Paraboloide hiperbólico* (fig. 220): $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Las secciones paralelas al plano $yOz$ son parábolas iguales; las secciones paralelas al plano $yOz$ son parábolas iguales; las secciones paralelas al plano $xOy$ son hipérbolas (o también un par de rectas concurrentes).

Se llama GENERATRIZ RECTILÍNEA de una superficie a la recta totalmente contenida en la superficie dada; por ejemplo, las generatrices rectilíneas de una superficie cónica o cilíndrica.

El hiperboloide de una hoja (fig. 221) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ tiene dos familias de generatrices rectilíneas.

$$\mathrm{I} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}; \end{cases}$$

$$\mathrm{II} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}; \end{cases}$$

$u$ y $v$ son valores arbitrarios.

El paraboloide hiperbólico (fig. 222) $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ tiene también dos familias de generatrices:

I) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b} = u; \quad u\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right) = z;$

II) $\frac{x}{a}-\frac{y}{b} = v; \quad v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = z;$

$u$ y $v$ son valores arbitrarios. En ambos casos, por cada punto de la superficie pasan dos rectas: por una generatriz de cada familia (en las figs. 221 y 222 sólo se muestra una familia).

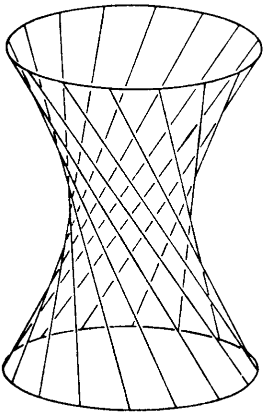


Fig. 221

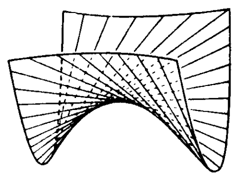


Fig. 222

CILINDROS: *elíptico* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ (fig. 223), *hiperbólico* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$ (fig. 224), *parabólico* $y^2 = 2px$ (fig. 225).

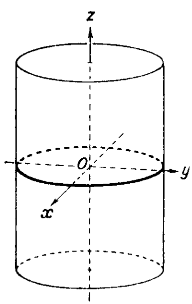



Fig. 223

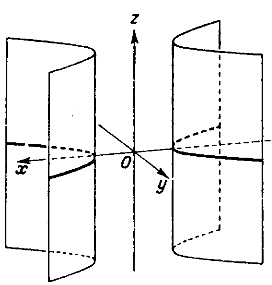



Fig. 224

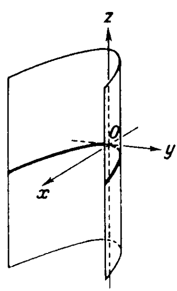



Fig. 225

## *11. Superficies de segundo orden o cuadráticas (teoría general)*

La ecuación general de una superficie de segundo orden es:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{14}x+2a_{24}y+ \\ +2a_{34}z+a_{44}=0.$$

Los invariantes de la superficie de segundo orden son*:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$S=a_{11}+a_{22}+a_{33};$$

$$T=a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}-a_{23}^2-a_{31}^2-a_{12}^2.$$

Estos valores no varían cuando se traslada el origen de coordenadas y se giran los ejes de coordenadas.

El tipo de la superficie de segundo orden se determina por su ecuación, según sean los signos de sus invariantes $\Delta$, $\delta$, $S$ y $T$ de la tabla dada en las págs. 268-269. En esta tabla, junto con la designación de la superficie, está dada la ecuación canónica a la cual puede ser reducida la dada mediante una transformación de las coordenadas. Las coordenadas de ningún punto real verifican a las ecuaciones de las superficies llamadas imaginarias (a excepción de los dos casos: el vértice del cono imaginario y la línea de intersección de los planos imaginarios).

*Definición de la forma de una superficie de segundo orden*

I. $\delta\neq 0$ (superficies con centro)

| | $S\delta>0,\ T>0$ | $S\delta$ y $T$ uno de ellos $>0$ |
|---|---|---|
| $\Delta<0$ | Elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ | Hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ |
| $\Delta>0$ | Elipsoide imaginario $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ | Hiperboloide de una hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ |
| $\Delta=0$ | Cono imaginario (con vértice real) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ | Cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ |

* Aquí se considera: $a_{ik}=a_{ki}$.

## II. $\delta = 0$ (paraboloides, cilindros y pares de planos)

<table>
<tr><th></th><th>$\Delta < 0$ (en este caso $T > 0$)</th><th>$\Delta > 0$ (en este caso $T < 0$)</th></tr>
<tr><td>$\Delta \neq 0$</td><td>Paraboloide elíptico<br>$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm z$</td><td>Paraboloide hiperbólico<br>$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm z$</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td colspan="2">Superficie cilíndrica cuya directriz es una curva de segundo orden. Según sea la forma de esta curva (véanse las págs. 246-247) pueden ser cilindros de diferente tipo (para $T > 0$, elíptico real o imaginario; para $T < 0$, hiperbólico; para $T = 0$, parabólico), si la superficie no degenera en dos planos (reales, imaginarios o coincidentes). Condición de degeneración:<br>$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$</td></tr>
</table>

# II. GEOMETRÍA DIFERENCIAL

La geometría diferencial estudia mediante los métodos del cálculo diferencial las curvas (planas o alabeadas) y las superficies; por esto, las funciones que figuran en las ecuaciones se consideran continuas y tienen derivadas continuas hasta el orden necesario, según sea el carácter del problema considerado*. Al estudiar las imágenes geométricas según sus ecuaciones, se diferencian sus propiedades *que dependen* de la elección del sistema de coordenadas (por ejemplo: la intersección de la curva o de la superficie con los ejes, la pendiente de la tangente, los puntos máximo y mínimo) y *las propiedades invariantes* que no varían por la transformación de las coordenadas y que pertenecen precisamente a la curva o la superficie (por ejemplo: los puntos de inflexión, los vértices de la curva, la curvatura). Por otra parte se diferencian *las propiedades locales*, referentes a partes infinitésimas de la curva o de la superficie (por ejemplo: la curvatura, el elemento lineal de la superficie) y las propiedades de la curva o de la superficie *en total* (por ejemplo: el número de vértices, la longitud de una curva cerrada).

## A. CURVAS PLANAS

### *1. Metodos de expresión de una curva*

ECUACIÓN DE UNA CURVA**. Una curva plana se puede expresar analíticamente en alguna de las siguientes formas:

---

* Esta condición se puede infringir sólo para puntos aislados de la curva o de la superficie; en tal caso tenemos un punto de tipo especial (por ejemplo, una discontinuidad o un punto anguloso de la curva). Véanse en las págs. 279 y 299 tal tipo de puntos.

** Véanse en la pág. 231 el concepto general de la ecuación de una línea.

*En coordenadas cartesianas:*

en forma implícita............. $F(x, y) = 0,$ (1)

en forma explícita ............ $y = f(x),$ (2)

en forma paramétrica ......... $x = x(t), \quad y = y(t).$ (3)

*En coordenadas polares:* $\rho = f(\varphi).$ (4)

DIRECCIÓN POSITIVA DE UNA CURVA. Si la curva viene expresada en la forma (3), entonces se determina en ella *la dirección positiva*, es decir, la dirección en que se mueve el punto $M[x(t), y(t)]$ de la curva, cuando el

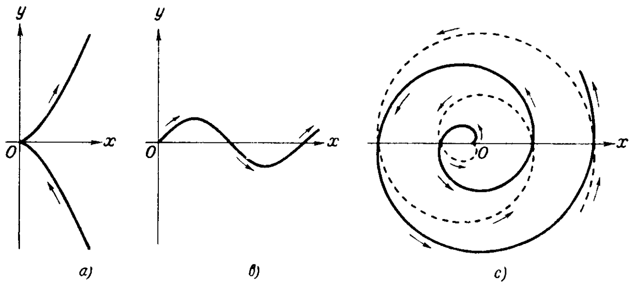



Fig. 226

parámetro $t$ crece. Si la curva viene expresada en la forma (2), entonces se puede considerar como parámetro la abscisa del punto: $x = x, y = f(x)$ y la dirección positiva corresponde al crecimiento de la abscisa (es decir, va de izquierda a derecha). Si la curva viene expresada en la forma (4), entonces el parámetro es el ángulo $\varphi$: $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\operatorname{sen}\varphi$ y la dirección positiva corresponde al crecimiento de $\varphi$ (es decir, va en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj).

*Ejemplos* (fig. 226): a) $x = t^2, y = t^3$; b) $y = \operatorname{sen} x$; c) $\rho = a\varphi$.

## 2. Elementos locales de una curva

En este párrafo se designa por $M$ el punto variable de la curva, que se define: por el valor de $x$, si se expresa en la forma (2), por $t$ si se expresa en la forma (3) y por $\varphi$ si se expresa en la forma (4); $N$ es un punto infinitamente próximo a él, determinado respectivamente por los valores: $x+dx$, $t+dt$ y $\varphi+d\varphi$.

DIFERENCIAL DE ARCO. Si $s$ es la longitud de una curva desde un punto fijo $A$ hasta el punto $M$, entonces el incremento infinitesimal de la longitud $\Delta s = \overset{\frown}{MN}$ se expresa aproximadamente por la fórmula de la diferencial de arco* $ds$

$$\Delta s \approx ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx, \quad \text{para una curva expresada en la forma (2)}$$
$$= \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt, \quad \text{para una curva expresada en la forma (3)}$$
$$= \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi, \quad \text{para una curva expresada en la forma (4)}$$

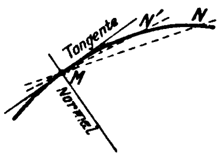


Fig. 227

*Ejemplos:*

1) $y = \operatorname{sen} x, \quad ds = \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx;$

2) $x = t^2, \quad y = t^3, \quad ds = t\sqrt{4+9t^2}\,dt;$

3) $\rho = a\varphi, \quad ds = a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi.$

LA TANGENTE Y LA NORMAL. Se llama *tangente* en el punto $M$ a la posición límite de la recta secante $MN$, cuando $N \to M$; *la normal* es la recta que pasa por $M$ y es perpendicular a la tangente (fig. 227).

*Las ecuaciones de la tangente y de la normal* ($x$ e $y$ son las coordenadas del punto $M$ de la curva; $X$ e $Y$ son las coordenadas variables de los puntos de la tangente o de la normal; los valores de las derivadas se calculan para el punto $M$).

| Forma en que se expresa la curva (véase pág. 271) | Ecuación de la tangente | Ecuación de la normal |
|---|---|---|
| (1) | $\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) = 0$ | $\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ |
| (2) | $Y-y = \frac{dy}{dx}(X-x)$ | $Y-y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(X-x)$ |
| (3) | $\frac{Y-y}{y'} = \frac{X-x}{x'}$ | $x'(X-x)+y'(Y-y) = 0$ |

* Véase en las págs. 353-357 la diferencial y sus propiedades.

*Ejemplos:* Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal:

1) Para la circunferencia $x^2+y^2 = 25$ en el punto $M(3, 4)$. La ecuación de la tangente es: $2x(X-x)+2y(Y-y) = 0$ ó (teniendo en cuenta la ecuación de la circunferencia) $Xx+Yy = 25$; en el punto $M: 3X+$ $+4Y = 25$; la ecuación de la normal es: $\frac{X-x}{2x} = \frac{Y-y}{2y}$ ó $Y = \frac{y}{x}X$; en el punto $M$ es: $Y = {}^4/_3X$.

2) Para la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $O(0, 0)$. La ecuación de la tangente es: $Y - \operatorname{sen} x = \cos x (X-x)$ ó $Y = X \cos x + \operatorname{sen} x - x \cos x$; en el punto $O$ es: $Y = X$. La ecuación de la normal es: $Y - \operatorname{sen} x =$ $= -\frac{1}{\cos x}(X-x)$ ó $Y = -X \sec x + \operatorname{sen} x + x \sec x$; en el punto $O$ es: $Y = -X$.

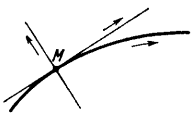



Fig. 228

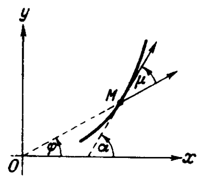



Fig. 229

3) Para la curva $x = t^2$, $y = t^3$ en el punto $M(4, -8)$, $t = -2$. La ecuación de la tangente es: $\frac{Y-t^3}{3t^2} = \frac{X-t^2}{2t}$ ó $Y = \frac{3}{2}tX - \frac{1}{2}t^3$, en el punto $M$ es: $Y = -3X+4$. La ecuación de la normal es: $2t(X-t^2)+$ $+3t^2(Y-t^3) = 0$ ó $2X+3tY = t^2(2+3t^2)$, en el punto $M$ es: $X-3Y = 28$.

*Dirección positiva.* Si la curva viene expresada en la forma (2), (3) o (4) (véase pág. 271), entonces en la tangente y en la normal se determinan las direcciones positivas: en la tangente la dirección positiva coincide con la dirección positiva de la curva en el punto de contacto (véase más arriba pág. 271) y en la normal se obtiene de la dirección positiva de la tangente, mediante un giro de 90° alrededor del punto $M$, en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (fig. 228). El punto $M$ divide la tangente y la normal en semirrectas positivas y negativas (fig. 228).

*La pendiente de la tangente* se determina mediante el ángulo $\alpha$ formado por la dirección positiva del eje de las abscisas y la dirección positiva de la tangente (para la curva dada en coordenadas polares) o por el ángulo $\mu$ formado por el radio vector $OM = \rho$ y la dirección positiva de la tangente (fig. 229). Los ángulos $\alpha$ y $\mu$ se calculan por las fórmulas (*ds* se calcula por las fórmulas de la pág. 272):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}, \qquad \cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{dy}{ds};$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)}, \qquad \cos\mu = \frac{d\rho}{ds}, \qquad \operatorname{sen}\mu = \rho\frac{d\varphi}{ds}.$$

*Ejemplos:*

1) $y = \operatorname{sen} x$; $\operatorname{tg}\alpha = \cos x$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$,

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}};$$

2) $x = t^2$, $y = t^3$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3t}{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{4+9t^2}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3t}{\sqrt{4+9t^2}}$;

3) $\rho = a\varphi$; $\operatorname{tg}\mu = \varphi$, $\cos\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$, $\operatorname{sen}\mu = \dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$.

*Los segmentos de tangente y de normal; la subtangente y la subnormal* (fig. 230).

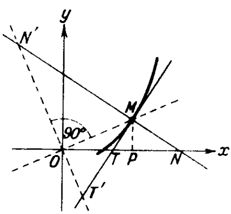



Fig. 230

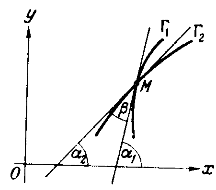



Fig. 231

a) En coordenadas cartesianas [para la curva dada en la forma (2) y (3) (véase la pág. 271)] son:

$MT = \left|\dfrac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\right|$ *(el segmento de tangente)*,

$MN = \left|y\sqrt{1+y'^2}\right|$ *(el segmento de normal)*,

$PT = \left|\dfrac{y}{y'}\right|$ *(la subtangente)*,

$PN = |yy'|$ *(la subnormal)*.

b) En coordenadas polares [para las curvas dadas en la forma (4) véase la pág. 271] son:

$MT' = \left| \frac{\rho}{\rho'} \sqrt{\rho^2+\rho'^2} \right|$ *(el segmento de la tangente polar),*

$MN' = \left| \sqrt{\rho^2+\rho'^2} \right|$ *(el segmento de la normal polar),*

$OT' = \left| \frac{\rho^2}{\rho'} \right|$ *(la subtangente polar),*

$ON' = |\rho'|$ *(la subnormal polar).*

*Ejemplos:*

1) $y = \operatorname{ch} x;\quad y' = \operatorname{sh} x,\quad \sqrt{1+y'^2} = \operatorname{ch} x;\quad MT = |\operatorname{ch} x \operatorname{cth} x|.$
$MN = |\operatorname{ch}^2 x|,\quad PT = |\operatorname{cth} x|,\quad PN = |\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x|.$

2) $\rho = a\varphi;\quad \rho' = a,\quad \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = a\sqrt{1+\varphi^2};$
$MT' = \left|a\varphi\sqrt{1+\varphi^2}\right|,\quad MN' = \left|a\sqrt{1+\varphi^2}\right|,\quad OT' = |a\varphi^2|,$
$ON' = a.$

*El ángulo entre dos curvas.* Se llama ángulo entre dos curvas $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ que se cortan en el punto $M$, al ángulo $\beta$ formado por las tangentes a estas curvas en el punto M (fig. 231). El cálculo del ángulo $\beta$ se reduce al cálculo del ángulo entre dos rectas (véase la pág. 235), cuyas pendientes son iguales a:

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{df_1}{dx}\right)_M,$$
$$k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{df_2}{dx}\right)_M,$$

donde $y = f_1(x)$ es la ecuación de la curva $\Gamma_1$ e $y = f_2(x)$ es la ecuación de la curva $\Gamma_2$; las derivadas se calculan en el punto $M$.

*Ejemplo:* Determinar el ángulo entre las parábolas $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ en el punto $M(1, 1)$ $\operatorname{tg} \alpha_1 = \left(\frac{d\sqrt{x}}{dx}\right)_{x=1} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \left(\frac{d(x^2)}{dx}\right)_{x=1} = 2$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1+\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{3}{4}$.

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD DE UNA CURVA. Si una curva está dada en forma explícita: $y = f(x)$, entonces en una parte no grande de la misma que contiene el punto $M$ se puede determinar (a excepción de los casos en que $M$ es un punto de inflexión o un punto singular, véase las págs. 279-284) si la concavidad de la curva está dirigida hacia arriba o hacia abajo*; si en el punto $M$ la segunda derivada $f''(x) > 0$, entonces

* La dirección de la *convexidad* es opuesta a la dirección de la concavidad.

la curva tiene la concavidad dirigida hacia arriba* (el punto $M_2$ en la fig. 232) y si $f''(x) < 0$, hacia abajo (el punto $M_1$); si $y'' = 0$, la cuestión exige un examen complementario que se hace en las págs. 279-281 al considerar los puntos de inflexión.

*Ejemplo:* $y = x^3$ (véase fig. 6, *b* de la pág. 92); $y'' = 6x$; para $x > 0$ la curva es cóncava hacia arriba, para $x < 0$ es cóncava hacia abajo.

CURVATURA Y RADIO DE CURVATURA. *La curvatura K* de una curva en su punto $M$ es el límite de la razón del "ángulo de contingencia" $\delta$ entre las direcciones positivas de las tangentes en los puntos $M$ y $N$ (fig. 233) a la longitud del arco $\overset{\frown}{MN}$, cuando $\overset{\frown}{MN} \to 0$:

$$K = \lim \frac{\delta}{\overset{\frown}{MN}} \quad \text{cuando} \quad \overset{\frown}{MN} \to 0.$$

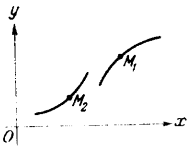



Fig. 232

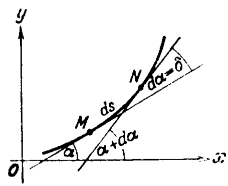



Fig. 233

La curvatura $K$ tiene el signo «+» o «−» según sea el signo de este límite. El signo de $K$ indica si la concavidad de la curva está dirigida hacia la semirrecta normal positiva (para $K > 0$) o hacia la semirrecta normal negativa (para $K < 0$) (véase la pág. 273)**.

Frecuentemente se considera que la curvatura es un valor esencialmente positivo, entendiéndola como el valor absoluto del límite anotado anteriormente.

*Radio de curvatura R* en el punto $M$ de una curva se llama al valor recíproco de la curvatura: $R = \frac{1}{K}$. Cuanto más desviada esté la curva en las proximidades del punto dado, tanto mayor es $K$ y menor es $R$ en este punto. Para la circunferencia de radio $a$, la curvatura es: $K = \frac{1}{a}$ y el radio de curvatura es $R = a$ (son constantes para todos los puntos); para la línea recta: $K = 0$, $R = \infty$; para las otras curvas, la curvatura varía de un punto a otro.

---

* Más exactamente hacia la dirección positiva del eje $Oy$.

** En otra forma: para $K > 0$ el centro de curvatura (véase más adelante) está situado en la semirrecta normal positiva y para $K < 0$, en la negativa.

*Fórmulas para calcular* $K$ y $R$. Suponiendo (fig. 233) que $\delta = d\alpha$, $\overset{\smile}{MN} = ds$, se tiene:

$$K = \frac{d\alpha}{ds}, \qquad R = \frac{ds}{d\alpha}. \tag{$*$}$$

Si la curva viene dada por las ecuaciones (1), (2), (3) o (4) (véase pág. 271), entonces $K$ y $R$ se calculan por las fórmulas:

cuando se da en la forma (2):

$$K = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}, \qquad R = \frac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},$$

cuando se da en la forma (3):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}, \qquad R = \frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}},$$

cuando se da en la forma (1):

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{\left(F'^2_x+F'^2_y\right)^{3/2}}, \qquad R = \frac{\left(F'^2_x+F'^2_y\right)^{3/2}}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}, \tag{$**$}$$

cuando se da en la forma (4):

$$K = \frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}, \qquad R = \frac{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}.$$

*Ejemplos:*

1) $y = \operatorname{ch} x$, $K = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 2) $x = t^2$, $y = t^3$, $K = \dfrac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}$;

3) $y^2 - x^2 = a^2$, $K = \dfrac{a^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$; 4) $\rho = a\varphi$; $K = \dfrac{1}{a}\,\dfrac{\varphi^2+2}{(\varphi^2+1)^{3/2}}$.

CIRCULO OSCULADOR (O CIRCUNFERENCIA OSCULATRIZ) Y CENTRO DE CURVATURA. Se llama *círculo osculador* de una curva en el punto $M$ a la posición límite del círculo que pasa por el punto $M$ y por otros dos puntos próximos de la curva $N$ y $P$, cuando $N \to M$ y $P \to M$ (fig. 234). El radio del círculo osculador es igual al radio de curvatura en el punto correspondiente [se calcula por las fórmulas (∗ ∗)]. El centro del círculo osculador $C$ se llama *centro de curvatura* correspondiente al punto $M$ y se encuentra en la normal a la curva en la dirección de su concavidad. Las coordenadas del centro de curvatura $(x_c, y_c)$ se determinan por las siguientes fórmulas:

cuando se da en la forma (2) (véase la pág. 271):

$$x_c = x - \frac{\dfrac{dy}{dx}\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \qquad y_c = y + \frac{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}};$$

cuando se da en la forma (3):

$$x_c = x - \frac{y'(x'^2+y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}, \qquad y_c = y + \frac{x'(x'^2+y'^2)}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}};$$

cuando se da en la forma (4):

$$x_c = \rho\cos\varphi - \frac{(\rho^2+\rho'^2)(\rho\cos\varphi+\rho'\operatorname{sen}\varphi)}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''},$$

$$y_c = \rho\operatorname{sen}\varphi - \frac{(\rho^2+\rho'^2)(\rho\operatorname{sen}\varphi-\rho'\cos\varphi)}{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}; \qquad (\ast\ast\ast)$$

cuando se da en la forma (1):

$$x_c = x + \frac{F'_x(F'^2_x+F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}, \qquad y_c = y + \frac{F'_y(F'^2_x+F'^2_y)}{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}.$$

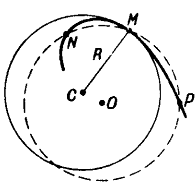



Fig. 234

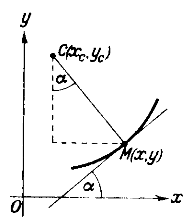



Fig. 235

Estas fórmulas se pueden escribir en la forma

$$x_e = x - R \operatorname{sen}\alpha, \qquad y_e = y + R\cos\alpha$$

ó

$$x_e = x - R\frac{dy}{ds}, \qquad y_e = y + R\frac{dx}{ds}$$

(fig. 235), donde $R$ se calcula por las fórmulas ($*$ $*$) (véase la pág. 277).

## 3. *Puntos de tipo especial**

Los puntos de inflexión son los puntos de la curva en los cuales la dirección de la concavidad varía en sentido contrario (fig. 236); la curva, en una parte pequeña que contiene a este punto, no se encuentra hacia un lado de la tangente sino que la corta. En el punto de inflexión, la curvatura $K = 0$ y el radio de curvatura es $R = \infty$.

Fig. 236

*Reglas para buscar los puntos de inflexión.*

*La curva está dada* en la forma (2): $y = f(x)$.

La condición necesaria para tener un punto de inflexión es que en este punto la segunda derivada $f''(x)$, si existe, debe anularse. Para buscar los puntos de inflexión en los que $f''(x)$ existe** se determinan todos los valores $x_1, x_2, \ldots$ que son raíces de la ecuación $f''(x) = 0$ y cada valor $x_i$ se reemplaza sucesivamente en las derivadas siguientes. Si $f'''(x_i) \neq 0$, $x_i$ es la abscisa de un punto de inflexión, si $f'''(x_i) = 0$ y $f^{IV}(x_i) \neq 0$, entonces $x_i$ no es la abscisa de un punto de inflexión, etc.; según cuál de las derivadas sucesivas, de orden impar o par, resulte primera distinta de cero en el punto considerado, este punto será o no punto de inflexión, respectivamente. Si el punto investigado no es punto de inflexión (por primera vez no se anula la derivada de $k$-ésimo orden para $k$ par), entonces la curva, para $f^{(k)}(x) < 0$, es convexa hacia arriba y para $f^{(k)} > 0$, hacia abajo.

---

*Aquí sólo se han considerado puntos invariantes con respecto a las transformaciones de coordenadas. Véase en las págs. 372-375 la búsqueda de máximo y mínimo.

** Véase más adelante la búsqueda de los puntos de inflexión en aquellos casos en que $f''(x)$ no existe (por ejemplo, es infinita).

*Ejemplos:* 1) $y = \frac{1}{1+x^2}$; $f''(x) = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$, $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'''(x) = 24x\frac{1-x^2}{(1+x^2)^4}$. $f'''(x_{1,2}) \neq 0$; los puntos de inflexión son: $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$. 2) $y = x^4$, $f''(x) = 12x^2$, $x_1 = 0$, $f'''(x) = 24x$, $f'''(x_1) = 0$, $f^{IV}(x) = 24$; no tiene puntos de inflexión.

También se puede determinar si el valor encontrado $x_i$ es o no abscisa del punto de inflexión, investigando directamente la variación del signo de la segunda derivada al pasar por este punto: si el signo de $f''(x)$ se cambia por el contrario la dirección de la concavidad también se cambia por la contraria (véase la pág. 276) y resulta un punto de inflexión. Este procedimiento es aplicable aún en el caso en que $y'' = \infty$.

*Ejemplo:* $y = x^{5/3}$, $y' = \frac{5}{3}x^{2/3}$, $y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3}$; para $x = 0$, $y'' = \infty$. Al pasar de los valores negativos de $x$ a los positivos, la segunda derivada cambia el signo «$-$» por el signo «$+$» y, en consecuencia, para $x = 0$ la curva tiene un punto de inflexión.

Prácticamente, si por el carácter de la curva es evidente que ella debe tener puntos de inflexión (por ejemplo, entre un máximo y un mínimo, para la gráfica de una función que tiene derivada continua), entonces sólo hay que limitarse a hallar $x_i$ sin interesarse por las derivadas de orden superior.

*Otras formas de expresión de una curva.* La condición necesaria de existencia de un punto de inflexión $f''(x) = 0$, dada anteriormente, se reemplaza por la siguiente, cuando la ecuación de la curva está dada en otras formas:

en la forma paramétrica (3) (véase la pág. 271): $\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = 0$;

en la forma polar (4): $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 0$;

en la forma general (1): se resuelve el sistema de ecuaciones

$$F(x, y) = 0 \quad y \quad \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

el sistema de soluciones da las coordenadas de los posibles puntos de inflexión,

*Ejemplos:*

1) $x = a\left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)$; $y = a\left(1 - \frac{1}{2}\cos t\right)$ ("cicloide acortada") (véase la pág. 118);

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}\begin{vmatrix} 2-\cos t & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} = \frac{a^2}{4}(2\cos t - 1);$$

$$\cos t = \frac{1}{2}; \qquad t_i = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi;$$

tiene infinitos puntos de inflexión que corresponden a los valores del parámetro $t_i$.

2) $\rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$; $\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{2\varphi^3} - \frac{3}{4\varphi^3} = \frac{1}{4\varphi^3}(4\varphi^2 - 1)$;

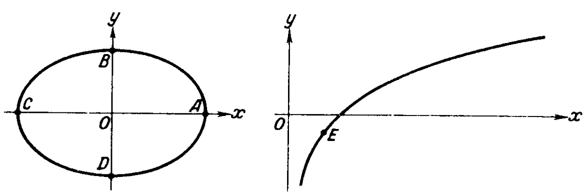
el punto de inflexión se determina por el ángulo polar $\varphi = \frac{1}{2}$.

3) $x^2 - y^2 = a^2$ (hipérbola). $\begin{vmatrix} F'' & .. & \\ ..... & & \\ ..... & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2x \\ 0 & -2 & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 8x^2 - 8y^2$;

las ecuaciones $x^2 - y^2 = a^2$ y $8(x^2 - y^2) = 0$ se contradicen, en consecuencia, la hipérbola no tiene puntos de inflexión.

Los VÉRTICES son los puntos de la curva en los cuales la curvatura tiene un máximo o un mínimo (la encorvación de la curva es máxima o mínima) por ejemplo: la elipse tiene 4 vértices: $A$, $B$, $C$ y $D$, la curva logarítmica tiene uno: $E$ (fig. 237).

La búsqueda de los vértices se reduce a la determinación del máximo o del mínimo de la expresión $K$, dada por las fórmulas (✳✳) en la pág. 227 (o del mínimo y del máximo para $R = 1/K$, si en este caso los cálculos se obtienen más fácilmente).




a) б)

Fig. 237

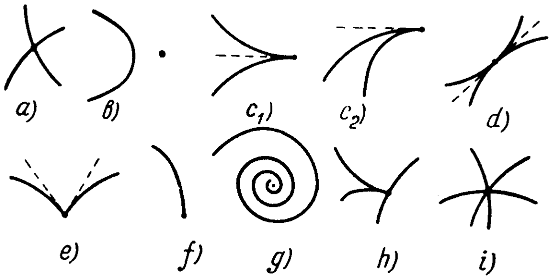



Fig. 238

Puntos singulares. Con esta denominación general se han reunido puntos de diferentes tipos: a) *puntos crunodales*, en los cuales la curva se corta a sí misma (fig. 238, *a*); b) *puntos aislados*, situados separadamente de la curva, pero con coordenadas que verifican la ecuación de la curva (fig. 238, *b*); *puntos de retroceso* o *cuspidales*, en los cuales la dirección de la curva varía a la contraria; se distinguen puntos de retroceso: *de primera especie* (fig. 238, $c_1$) y de *segunda especie* (fig. 238, $c_2$) según sea la posición de la tangente con respecto a las dos ramas; d) *puntos dobles con tangentes coincidentes o tacnodos*, en los cuales la curva es tangente a sí misma (fig. 238, *d*); e) *puntos angulosos*, en los que la curva varía su dirección "de un salto"; a diferencia de los puntos de retroceso las tangentes a ambas partes de la curva en el punto anguloso son distintas (fig. 238, *e*); f) *puntos de detención* en los que la curva se detiene (fig. 238, *f*); g) *puntos asintóticos*, alrededor de los cuales la curva se enrolla un número infinito de veces aproximándose a una distancia infinitamente pequeña (fig. 238, *g*). Se pueden encontrar combinaciones simultáneas de dos o más singularidades de éstas (fig. 238, *h* e *i*).

*Búsqueda de puntos del tipo e, f, y g.* Singularidades de estos tipos sólo existen en las curvas transcendentes*. Los puntos angulosos corresponden a discontinuidades finitas de la derivada $\frac{dy}{dx}$, por ejemplo, el origen de coordenadas en la curva $y = \frac{x}{1+e^{1/x}}$ (véase fig. 284, *c* de la pág. 354). Los puntos de detención corresponden a discontinuidades finitas o rupturas de la función $y = f(x)$; por ejemplo, los puntos (1, 0)

* Véase la pág. 232.

y (1, 1) de la curva $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ (véase fig. 272 de la pág. 322). Los puntos asintóticos son más fáciles de localizar en las curvas dadas en forma polar: $\rho = f(\varphi)$, si el $\lim \rho = 0$, cuando $\varphi \to +\infty$ ó $\varphi \to -\infty$, entonces el polo es un punto asintótico, por ejemplo, en la espiral logarítmica $\rho = ae^{k\varphi}$ (véase fig. 60 de la pág. 123).

*Búsqueda de puntos del tipo a–d, h, i,* llamados *puntos múltiples* (*dobles, triples*, etc.). Las curvas se estudian en la forma $F(x, y) = 0$. Los puntos $A$, cuyas coordenadas $(x_1, y_1)$ satisfacen simultáneamente a las tres ecuaciones: $F = 0$, $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, son *dobles*, si de las tres derivadas de segundo orden $F''_{xx}$, $F''_{xy}$, $F''_{yy}$ por lo menos una es distinta de cero (en caso contrario $A$ es un punto *triple* o de multiplicidad superior). El carácter de un punto doble depende del signo de

$$\Delta = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}_{\left(\substack{x=x_1 \\ y=y_1}\right)}$$

1) Si $\Delta < 0$, $A$ es un punto crunodal, las pendientes de las tangentes en este punto son iguales a las raíces de la ecuación

$$F''_{yy}k^2 + 2F''_{xy}k + F''_{xx} = 0.$$

2) Si $\Delta > 0$, $A$ es un punto aislado.

3) Si $\Delta = 0$, entonces o $A$ es un punto de retroceso o un punto tacnodo; la pendiente de la tangente en este punto es:

$$\operatorname{tg} \alpha = -F''_{xy}/F''_{yy}.$$

En este caso, para efectuar una investigación detallada del punto múltiple, se debe trasladar el origen de coordenadas a este punto y hacer girar los ejes de tal modo que el eje $Ox$ vaya por la dirección de la tangente en el punto $A$; entonces, según el tipo de ecuación se puede determinar si se tiene o no un punto de retroceso de primera especie, de segunda especie o un punto tacnodo.

*Ejemplos:* 1) $F(x, y) \equiv (x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ (lemniscata, véase la fig. 51 de la pág. 117); $F'_x = 4x(x^2+y^2-a^2)$, $F'_y = 4y(x^2+y^2+a^2)$; el sistema $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ da tres soluciones: $(0, 0)$, $(\pm a, 0)$, pero sólo la primera verifica a $F = 0$. Al reemplazar $(0, 0)$ en las derivadas de segundo orden, tenemos: $(F''_{xx})_0 = -4a^2$, $(F''_{xy})_0 = 0$, $(F''_{yy})_0 = +4a^2$; $\Delta = -16a^4 < 0$, es decir, el origen de coordenadas es un punto crunodal; las pendientes de las tangentes son: $\operatorname{tg} \alpha = \pm 1$ y las ecuaciones de las tangentes son: $y = \pm x$.

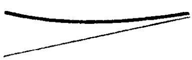
2) $F(x, y) \equiv x^3 + y^2 - x^2 - y^2 = 0$; $F'_x = x(3x-2)$, $F'_y = y(3y-2)$; de los cuatro puntos $(0, 0)$, $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, sólo el primero pertenece a la curva; $(F''_{xx})_0 = -2$, $(F''_{xy})_0 = 0$, $(F''_{yy})_0 = -2$, $\Delta = 4 > 0$, es decir, el origen de coordenadas es un punto aislado.

3) $F(x, y) \equiv (y-x^2)^2 - x^5 = 0$. El sistema $F'_x = 0$, $F'_y = 0$ da una solución única $(0, 0)$ que verifica a la ecuación $F = 0$; $\Delta = 0$; $\operatorname{tg} \alpha = 0$. En el caso dado se tiene en el origen de coordenadas un punto de retroceso de segunda especie, lo que es evidente de la ecuación de la curva en forma explícita: $y = x^2(1 \pm \sqrt{x})$; para $x < 0$ no existen valores de $y$ y para valores pequeños de $x > 0$, ambos valores de $y$ son positivos (la tangente en el origen de coordenadas es horizontal).

*Caso de una ecuación algebraica* $F(x, y) = 0$. Si la ecuación no contiene términos independientes ni términos de primer grado, entonces el origen de coordenadas es un punto doble, en el cual se obtienen inmediatamente las ecuaciones de las tangentes, anulando todos los términos de segundo grado; por ejemplo, para la lemniscata (véase anteriormente el ejemplo 1) las ecuaciones de las tangentes son: $x^2 - y^2 = 0$ ó $y = \pm x$. Si tampoco tiene términos de segundo grado, el origen de coordenadas es un punto triple, etc.

## 4. *Asíntotas*

CASO GENERAL. Si alguna parte de una curva se aleja indefinidamente del origen de coordenadas, entonces esta parte (*rama infinita* de la curva) puede tener a veces una *asíntota*, es decir, una recta a la que la curva se aproxima indefinidamente por un lado (fig. 239, *a*) o la corta todo el tiempo (fig. 239, *b*). Para buscar las asíntotas de una curva que está dada en forma **paramétrica**: $x = x(t)$, $y = y(t)$, se encuentran los valores de $t = t_i$, para los cuales $x(t) \to \infty$ ó $y(t) \to \infty$. Si $x(t_i) = \infty$, pero $y(t_i) = a \neq \infty$, la recta $y = a$ es una asíntota horizontal; si $y(t_i) = \infty$, pero $x(t_i) = a \neq \infty$, la recta $x = a$ es una asíntota vertical; si $x(t_i) = \infty$ y $y(t_i) = \infty$ entonces se calculan los dos límites:


a)


б)

Fig. 239

$$k = \lim_{t \to t_i} \frac{y(t)}{x(t)} \quad y \quad b = \lim_{t \to t_i} [y(t) - k \cdot x(t)];$$

si existen ambos límites, la curva tiene la asíntota $y = kx + b$.

Cuando la curva es dada en forma explícita $y = f(x)$ (véanse las págs. 327–332), las asíntotas verticales se encuentran como puntos de discontinuidad de la función $f(x)$ y las asíntotas horizontales y oblicuas se representan en la forma $y = kx+b$, donde

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx].$$

*Ejemplo:* $x = \frac{m}{\cos t}$, $y = n(\operatorname{tg} t - t)$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = -\frac{\pi}{2}$, etc. Por ejemplo, hallemos la asíntota para $t = \frac{\pi}{2}$:

$$x(t_1) = y(t_1) = \infty, \quad k = \lim_{t \to \pi/2} \frac{n}{m} (\operatorname{sen} t - t \cos t) = \frac{n}{m},$$

$$b = \lim_{t \to \pi/2} \left[ n(\operatorname{tg} t - t) - \frac{n}{m} \frac{m}{\cos t} \right] = n \cdot \lim_{t \to \pi/2} \frac{\operatorname{sen} t - t \cos t - 1}{\cos t} = -\frac{n\pi}{2},$$

$$y = \frac{n}{m} x - \frac{n\pi}{2}; \quad \frac{x}{m} - \frac{y}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

Caso de una curva algebraica $F(x, y) = 0$. La función $F(x, y)$ es un polinomio con respecto a $x$ e $y$. Elijamos aquellos términos de $F(x, y)$ que tienen la dimensión mayor*. Designemos por $\Phi(x, y)$ el grupo elegido de los términos "superiores" y resolvamos la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ con respecto a $x$ e $y$: $x = \varphi(y)$, $y = \psi(x)$
Los valores $y_1 = a$, para los cuales $x = \infty$, dan las asíntotas horizontales $y = a$; los valores $x_1 = b$, para los cuales $y = \infty$, dan las asíntotas verticales $x = b$. Para buscar las asíntotas oblicuas ponemos en $F(x, y)$ la expresión $y = kx+b$ y ordenamos el polinomio obtenido según las potencias de $x$:

$$F(x, kx+b) \equiv f_1(k) x^m + f_2(k, b) x^{m-1} + \dots$$

Igualando a cero los dos coeficientes superiores $f_1$ y $f_2$, resolvemos el sistema de ecuaciones

$$f_1(k) = 0, \quad f_2(k, b) = 0.$$

Si es compatible, entonces sus soluciones $k$, $b$ dan los parámetros de las asíntotas $y = kx+b$.

*Ejemplo:* $x^3+y^3-3axy = 0$ ("hoja de Descartes", véase fig. 44 de la pág. 113). $F(x, kx+b) \equiv (1+k^3)x^3 + 3(k^2b - ka)x^2 + \dots; 1+k^3 = 0$ y $k^2b - ka = 0$ da el sistema de soluciones $k = -1$, $b = -a$; la ecuación de la asíntota es: $y = -x-a$.

* Se entiende por *dimensión* del término $Ax^my^n$ la suma de los exponentes $(m+n)$ de $x$ e $y$. Así, el término $3x^2y^3$ es de quinta dimensión, $2y^2$ es de segunda dimensión; en el polinomio $x^3+y^3-3xy$ los términos "superiores" son: $x^3$ e $y^3$.

## 5. *Estudio general de una curva por su ecuación*

El estudio de las curvas por sus ecuaciones tiene por finalidad estudiar el comportamiento de cierta función uniforme $y = f(x)$ o establecer la forma de la curva, definida analíticamente por una de las formas (1), (2), (3) o (4) (véase la pág. 271).

Construcción de las gráficas de las funciones dadas en la forma $y = f(x)$.

1) Se halla el campo de definición (pág. 314).

2) Se establece la simetría con respecto al eje $Oy$ o con respecto al origen de coordenadas, según que la función sea par o impar (pág. 320).

3) Se determina "el comportamiento de la función en el infinito" calculando para ello los límites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (pág. 322)

4) Se hallan los puntos de discontinuidad y se determina su carácter (págs. 328–329).

5) Se halla la intersección de la curva con el eje $Oy$, calculando $f(0)$, y con el eje $Ox$, resolviendo la ecuación $f(x) = 0$ (véase en la pág. 163 la resolución de una ecuación algebraica y de una trascendente en forma general).

6) Se hallan los máximos y mínimos (pág. 372), determinando las regiones de crecimiento y decrecimiento de la función.

7) Se hallan los puntos de inflexión (págs. 279-280), estableciendo las regiones en que la curva es cóncava hacia arriba y hacia abajo (pág. 275) calculando en los puntos de inflexión la pendiente de la tangente.

Con estos datos se hace poco a poco un esbozo de la curva, precisándola después por los puntos aislados en aquellas partes que presentan interés.

*Ejemplo:* Construir la gráfica de la función

$$y = \frac{2x^2+3x-4}{x^2}.$$

1) La función existe para todos $x$, a excepción de $x = 0$.

2) No hay simetría.

3) Para $x \to \pm\infty$, $y \to 2$; además, si $x \to -\infty$, $y = 2-0$ (tiende a 2 "por debajo") y si $x \to +\infty$, $y = 2+0$ (tiende a 2 "por encima").

4) Para $x = 0$ se tiene una discontinuidad infinita (desde $-\infty$ hasta $-\infty$, ya que $y$ es negativo para valores infinitesimales de $x$).

5) $f(0) = \infty$; la ecuación $2x^2+3x-4 = 0$ tiene las raíces $x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$; de esta manera, las intersecciones con el eje $Ox$ son: $x_1 \approx 0{,}85$, $x_2 \approx -2{,}35$.

6) El punto máximo es: $x = \frac{8}{3} \approx 2{,}66$, $y \approx 2{,}56$.

7) El punto de inflexión es: $x = 4$, $y = 2{,}5$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{16}$.

Haciendo un esbozo de la curva por estos datos, calculamos además:

8) la intersección de la curva con la asíntota:

$$x = \frac{4}{3} \approx 1{,}33; \qquad y = 2.$$

La curva está representada en la fig. 240.

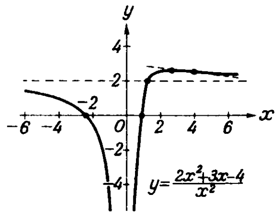



Fig. 240

Construcción de curvas dadas en forma implícita $F(x, y) = 0$. Proceder por las reglas generales es difícil, ya que frecuentemente se reducen a cálculos muy complicados. Si es posible, es conveniente encontrar los siguientes elementos:

1) Determinar todos los puntos de intersección con los ejes.

2) Calcular la simetría de la curva con respecto a los ejes y al origen de coordenadas (reemplazando $x$ por $-x$ e $y$ por $-y$).

3) Encontrar el máximo y el mínimo con respecto al eje $Ox$ (véase la pág. 374) y al eje $Oy$, aplicando las fórmulas similares con la transformación de los ejes de coordenadas.

4) Encontrar los puntos de inflexión (pág. 281) y la pendiente de la tangente en ellos.

5) Encontrar los puntos singulares (págs. 282–284).

6) Encontrar los vértices de la curva (pág. 281) y construir para éstos las circunferencias osculatrices (pág. 277), a una distancia significativa sus arcos no se distinguen de la curva.

7. Encontrar todas las asíntotas (pág. 284) e investigar la ubicación de las ramas con respecto a las asíntotas.

## 6. *Evolutas y evolventes*

La evoluta de una curva dada es la curva formada por los centros de curvatura (véase la pág. 277) de todos los puntos de la curva dada; la misma es la envolvente (véase la pág. 288) de las normales de la curva dada. Las ecuaciones paramétricas de la evoluta, véase en la pág. 278, la fórmula (∗∗∗) (las ecuaciones para hallar el centro de curvatura, en que es necesario considerar $x_e$ e $y_e$ como coordenadas variables de la evoluta). Si se puede eliminar entre estas ecuaciones el parámetro ($x$, $t$ o $\varphi$), se obtiene la ecuación de la evoluta en coordenadas cartesianas.

*Ejemplo:* Hallar la evoluta de la parábola $y = x^2$ (fig. 241). Tenemos que:

$$X = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3, \quad Y = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{1+6x^2}{2},$$

de donde $Y = \frac{1}{2} + 3\left(\frac{X}{4}\right)^{2/3}$, en que $X$ e $Y$ son las coordenadas variables de la evoluta.

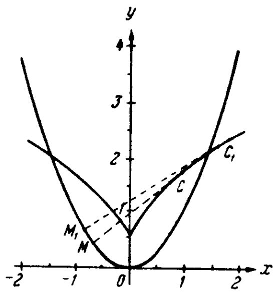


Fig. 241

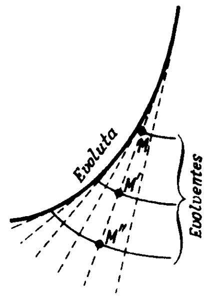


Fig. 242

La EVOLVENTE de la curva dada $\Gamma_2$ es una curva $\Gamma_1$ respecto a la cual la curva $\Gamma_2$ es la evoluta. La normal $MC$ de la evolvente es tangente a la evoluta, la longitud del arco $\overset{\frown}{CC_1}$ de la evoluta es igual al incremento del radio de curvatura de la evolvente (fig. 241):

$$\overset{\frown}{CC_1} = M_1C_1 - MC.$$

Estas propiedades permiten considerar la evolvente $\Gamma_1$ como "*el desarrollo*" de la curva $\Gamma_2$, que se obtiene de $\Gamma_2$ desenrollando un hilo tirante. A la evoluta dada corresponde una familia de evolventes, cada una de las cuales se determina por la longitud inicial del hilo (fig. 242). La ecuación de la evolvente se obtiene mediante la integración del sistema de ecuaciones diferenciales que representan la ecuación de la evoluta; véanse en la pág. 124 la ecuación de la evolvente de la circunferencia.

## 7. *Envolvente de una familia de curvas*

PUNTOS CARACTERISTICOS. Si se tiene una familia de curvas con un parámetro $\alpha$:

$$F(x, y, \alpha) = 0, \qquad (*)$$

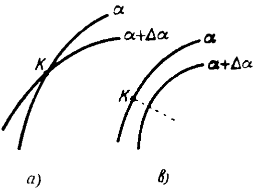



Fig. 243

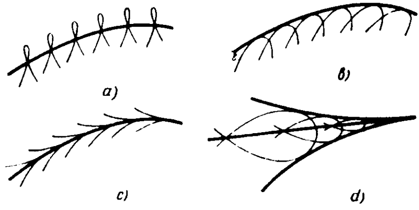



Fig. 244

entonces dos curvas infinitamente próximas de esta familia, a las que corresponden los valores $\alpha$ y $\alpha+\Delta\alpha$, tienen *puntos de máxima aproximación K*. Estos puntos, o son las intersecciones de las curvas ($\alpha$) y ($\alpha+\Delta\alpha$) o son puntos tales en ($\alpha$) que su distancia hasta ($\alpha+\Delta\alpha$) (por la normal) es un infinitésimo de orden superior con respecto a $\Delta\alpha$ (fig. 243, *a* y *b*. Si $\Delta\alpha \to 0$, entonces la curva ($\alpha+\Delta\alpha$) tiede a confundirse con la primera y el punto *K*, en algunos casos, se aproxima a la posición límite, al *punto característico*. Los puntos singulares de la curva ($\alpha$) siempre son característicos.

CARACTERÍSTICAS. El lugar geométrico de los puntos característicos de todas las curvas de la familia (✱) forma una curva (o varias curvas), llamada *característica* de esta familia; ella o está formado por puntos singulares de las curvas de la familia (fig. 244, *a*) o es la *envolvente* de estas curvas, es decir, es tangente a cada curva de la familia (fig. 244, *b*); pueden haber también combinaciones de ambos tipos (fig. 244, *c*, *d*).

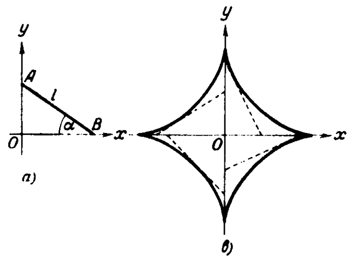



Fig. 245

Se obtiene la ECUACION DE LA ENVOLVENTE (y de la característica en el caso general) de la familia $F(x, y, \alpha) = 0$, al eliminar $\alpha$ en el sistema de ecuaciones $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$.

*Ejemplo:* Hallar la ecuación de la envolvente de la familia de rectas que contienen el segmento $AB = l$, si sus extremos A y B resbalan por los ejes de coordenadas (fig. 245, *a*). La ecuación de la familia es:

$$\frac{x}{l\,\text{sen}\,\alpha}+\frac{y}{l\cos\alpha}=1 \quad \text{ó} \quad F\equiv x\cos\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha-l\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=-x\,\text{sen}\,\alpha+y\cos\alpha-$$
$$-l\cos^2\alpha+l\,\text{sen}^2\,\alpha=0.$$

Eliminando $\alpha$ en estas ecuaciones, tenemos que: $x^{2/3}+y^{2/3}=l^{2/3}$, es decir, la envolvente es la *astroide* (fig. 245, *b*, véase también las págs. 120–121).

## B. CURVAS DEL ESPACIO

### 8. *Métodos de expresión de una curva*

ECUACIONES EN COORDENADAS. Una curva en el espacio ("línea *de curvatura doble*") puede expresarse analíticamente en alguna de las formas siguientes:

a) Como la intersección de dos superficies:

$$F(x,y,z)=0,\quad \Phi(x,y,z)=0. \tag{1}$$

b) En forma paramétrica:

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t) \tag{2}$$

($t$ es un parámetro cualquiera, en particular $t=x$, $y$ o $z$).

c) En forma paramétrica:

$$x=x(s),\quad y=y(s),\quad z=z(s) \tag{3}$$

($s$ es la longitud de arco desde un cierto punto $A$ hasta un punto variable $M$):

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt.$$

ECUACIÓN VECTORIAL. Designando por $\mathbf{r}$ el radio vector de un punto cualquiera de la curva (véase la pág. 597), representamos la ecuación (2) en la forma

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\quad \text{donde}\quad \mathbf{r}(t)=x(t)\,\mathbf{i}+y(t)\,\mathbf{j}+z(t)\,\mathbf{k}, \tag{2a}$$

y la ecuación (3) en la forma:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s),\quad \text{donde}\quad \mathbf{r}(s)=x(s)\,\mathbf{i}+y(s)\,\mathbf{j}+z(s)\,\mathbf{k}. \tag{3a}$$

La DIRECCIÓN POSITIVA en la curva dada por la ecuación (2) o por la (2a) corresponde al crecimiento del parámetro $t$, y en la curva dada por la ecuación (3) o (3a) corresponde a la direción en que se calcula la longitud del arco $s$.

## 9. Triedro intrínseco

*Definiciones.* En cada punto $M$ de una curva del espacio (a excepción de los puntos singulares) se determinan tres rectas y tres planos, que e cortan entre sí en el punto $M$ formando ángulos rectos (fig. 246):

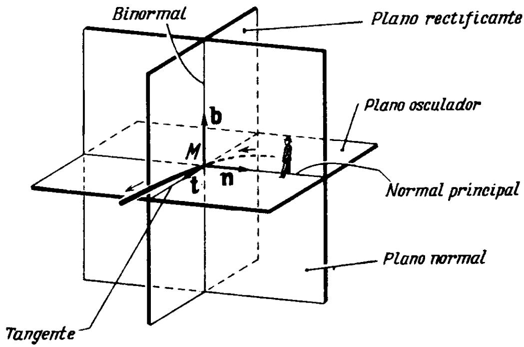



Fig. 246

1) *La tangente* es la posición límite de la secante $MN$, cuando $N \to M$ (véase fig. 227 de la pág. 272).

2) *El plano normal* es perpendicular a la tangente. Todas las rectas que pasan por $M$ y están situadas en este plano son normales a la curva en el punto $M$.

3) *El plano osculador* es la posición límite del plano que pasa por tres puntos próximos de la curva $M$, $N$ y $P$, cuando $N \to M$ y $P \to M$ (fig. 247). El plano osculador contiene a la tangente.

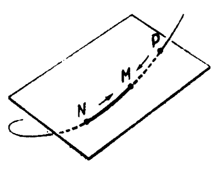



Fig. 247

4) *La normal principal* es la intersección del plano normal con el plano osculador (aquella de las normales que yace en el plano osculador).

5) *La binormal* es la recta perpendicular al plano osculador.

6) *El plano rectificante* es el que contiene a la tangente y a la binormal.

En las tres rectas 1), 4) y 5) se determinan las direcciones positivas: en la tangente ésta corresponde a la dirección positiva de la curva y se determina por el vector unitario **t**; en la normal principal va hacia la concavidad de la curva y se determina por el vector unitario **n**; en la binormal se determina por el vector unitario **b** = **t**×**n** (**t**, **n** y **b** deben formar una terna de mano derecha, véase la pág. 600). Los tres vectores **t**, **n** y **b**, junto con los planos que los unen, forman el *triedro intrínseco* de la curva del espacio.

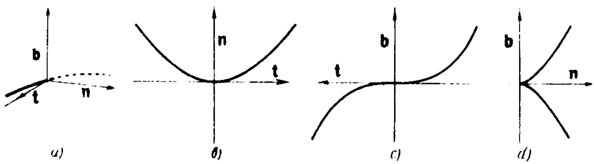



Fig. 248

UBICACIÓN DE LA CURVA CON RESPECTO AL TRIEDRO. En los puntos de tipo general la curva situada hacia un lado del plano rectificante y corta a los planos normal y osculador (fig. 248, *a*). En este caso las proyecciones de un pequeño segmento de curva, que contiene al punto *M*, en un plano del triedro tienen (aproximadamente) la forma:

| | |
|---|---|
| en el plano osculador ... | de parábola (fig. 248, *b*) |
| en el plano rectificante ... | de parábola cúbica (fig. 248, *c*) |
| en el plano normal ... | de parábola semicúbica (fig. 248, *d*) |

Si en el punto *M* la curvatura o la torsión de la curva (véase más adelante) son iguales a cero o el punto es singular $[x'(t) = y'(t) = z'(t) = 0]$, entonces la curva puede tener otra ubicación.

ECUACIÓN DE LOS ELEMENTOS DEL TRIEDRO.

**a) Para una *curva dada en la forma* (1) (pág. 290).**

La tangente:

$$\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}};$$

el plano normal:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

($x$, $y$, $z$ son las coordenadas del punto $M$ de la curva; $X$, $Y$, $Z$ son las coordenadas variables de la tangente o del plano normal; las derivadas parciales se calculan en el punto $M$).

b) Para una curva dada en la forma (2) o (2a) (véase la pág. 290).

En las fórmulas de la pág. 294 $x$, $y$, $z$, $\mathbf{r}$ son las coordenadas y el radio vector del punto $M$ de la curva; $X$, $Y$, $Z$, $\mathbf{R}$ son las coordenadas variables y el radio vector del elemento del triedro; las derivadas se toman respecto del parámetro $t$ en el punto $M$.

c) Para una *curva dada en la forma* (3) o (3a) (véase pág. 290).

Si se toma por parámetro la longitud de arco $s$, entonces las ecuaciones de la tangente, del plano normal, del plano osculador y de la binormal serán las mismas que en el caso general b) ($t$ se debe reemplazar por $s$) y las ecuaciones de la normal principal y del plano rectificante se simplifican:

| Elemento del triedro | Ecuación vectorial | Ecuaciones en coordenadas |
|---|---|---|
| **Normal principal** | $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ | $\frac{X-x}{x''} = \frac{Y-y}{y''} = \frac{Z-z}{z''}$ |
| **Plano rectificante** | $(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = 0$ | $x''(X-x)+y''(Y-y)+$ $+z''(Z-z) = 0$ |

| Ecuación vectorial | Ecuaciones en coordenadas |
|---|---|
| $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ | La tangente: <br> $\dfrac{X-x}{x'} = \dfrac{Y-y}{y'} = \dfrac{Z-z}{z'}$ |
| $(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ | El plano normal: <br> $x'(X-x)+y'(Y-y)+z'(Z-z) = 0$ |
| $(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0$ | El plano osculador: <br> $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0$ |
| $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \left( \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)$ | La binormal: <br> $\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}$ |
| $(\mathbf{R} = \mathbf{r}) \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \left( \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right) = 0$ | El plano rectificante: <br> $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$ <br> donde $l = y'z''-y''z',$ <br> $m = z'x''-z''x',$ <br> $n = x'y''-x''y'$ |
| $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \times \left( \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right)$ | La normal principal: <br> $\dfrac{X-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}} = \dfrac{Y-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}} = \dfrac{Z-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}}$ |

## *10. Curvaturas de flexión y de torsión*

**La curvatura** de flexión de una curva en el punto $M$ es el número que caracteriza la desviación de la curva (en una parte infinitesimal de la misma que contiene al punto $M$) de una línea recta. La definición exacta es: la curvatura de flexión $K = \lim\limits_{\overset{\frown}{MN} \to 0} \left| \dfrac{\Delta t}{\overset{\frown}{MN}} \right| = \left| \dfrac{dt}{ds} \right|$ (fig. 249).

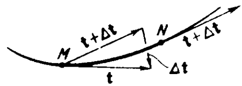



Fig. 249

*El radio de curvatura de flexión* es: $\rho = \frac{1}{K}$, para las curvas del espacio $K$ y $\rho$ son siempre positivos.

*Fórmulas para calcular* $K$ y $\rho$:

a) Para una curva dada en la forma (3) (véase la pág. 290):

$$K = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right| = \sqrt{x''^2+y''^2+z''^2} \qquad (*)$$

(derivadas con respecto a $s$).

b) Para una curva dada en la forma (2) (véase la pág. 290).

$$K^2 = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2}{\left|\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\right|^3} =$$

$$= \frac{(x'^2+y'^2+z'^2)(x''^2+y''^2+z''^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')^2}{(x'^2+y'^2+z'^2)^3} \qquad (**)$$

(derivadas con respecto a $t$).

*Ejemplo:* Hallar la curvatura de flexión de la *hélice circular* (fig. 250): $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$*. Reemplazamos el parámetro $t$ por $s$: $s = t\sqrt{a^2+b^2}$, de donde

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = a\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}},$$ y según la fórmula (*):

$$K = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \rho = \frac{a^2+b^2}{a} \text{ (constantes).}$$

Aplicando la fórmula (* *) se obtiene este mismo resultado sin pasar al parámetro $s$.

---

* La hélice circular determinada por esta ecuación y representada en la figura 250 se llama *dextrógira;* el observador que está situado a lo largo del eje de la hélice (eje $Oz$) verá que esta línea se enrolla (al elevarse) en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

La hélice circular que es simétrica a la hélice circular dextrógira con respecto a un cierto plano, se llama *levógira;* el observador la verá enrollarse (a elevarse) en la dirección del movimiento de las agujas del reloj.

LA CURVATURA DE TORSIÓN de una curva en el punto $M$ es el número que caracteriza la desviación de la curva (en una parte infinitésima de la misma que contiene al punto $M$) de una curva plana. La definición exacta es: la curvatura de torsión es el número, determinado por la fórmula $T = \lim\limits_{\overset{\frown}{MN} \to 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{b}}{\overset{\frown}{MN}} \right| = \left| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right|$ (fig. 251). *El radio de curvatura de torsión* es: $\tau = \frac{1}{T}$.

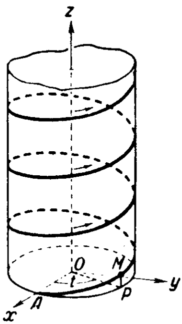



Fig. 250

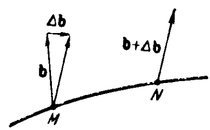



Fig. 251

*Fórmulas para calcular* $T$ y $\tau$:

a) Para una curva dada en la forma (3) (véase la pág. 290).

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2 \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\ \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right) = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x''^2 + y''^2 + z''^2)} \qquad \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

(las derivadas son con respecto a $s$).

b) Para una curva dada en la forma (2):

$$T = \frac{1}{\tau} = \rho^2 \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left| \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \right|^3} = \rho^2 \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3} \qquad \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

[$\rho$ se calcula por las fórmulas (*) y (* *)].

La curvatura de torsión calculada por las fórmulas $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}$ es positiva o negativa. Si $T > 0$, entonces desde el punto de vista del observador que está situado en la normal principal y paralelamente a la binormal (véase fig. 246), parece que la curva se enrollara **hacia arriba de derecha a izquierda** como el sacacorchos. Si $T < 0$, la curva desde el mismo punto de vista se enrolla **hacia arriba de izquierda a derecha**.

*Ejemplo:* Para la hélice circular la curvatura de torsión es constante; para la hélice circular dextrógira es igual a:

$$T = \left(\frac{(a^2+b^2)}{a}\right)^2 \frac{\begin{vmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\,\mathrm{sen}\,t & 0 \\ a\,\mathrm{sen}\,t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{[(-a\,\mathrm{sen}\,t)^2+(a\cos t)^2+b^2]^3} = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\tau = \frac{a^2+b^2}{b}.$$

La curvatura de torsión de la hélice circular levógira es negativa:

$$T = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

LAS FÓRMULAS DE SERRET-FRENET. Las derivadas de los vectores **t**, **n** y **b** con respecto al parámetro $s$ se expresan mediante las siguientes *fórmulas de Serret-Frenet:*

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{\rho}, \qquad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{\mathbf{t}}{\rho} - \frac{\mathbf{b}}{\tau}, \qquad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{\tau},$$

en que $\rho$ es el radio de curvatura de flexión y $\tau$ es el radio de curvatura de torsión.

## C. SUPERFICIES

### *11. Métodos de expresión de una superficie*

ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE. Una superficie puede expresarse por ecuaciones en alguna de las siguientes formas:

a) en *forma implícita:* $F(x, y, z) = 0$, (1)

b) en *forma explícita:* $z = f(x, y)$, (2)

c) en *forma paramétrica:* $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, (3)

d) en *forma vectorial:*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad \text{o} \quad \mathbf{r} = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}. \tag{3a}$$

Al hacer variar de todas las maneras posibles los parámetros $u$ y $v$ se obtiene el radio vector y las coordenadas de los diferentes puntos de la superficie; eliminando $u$ y $v$ en (3), resulta la forma (1). El caso (2) es un caso particular de la forma (3), en el cual $u = x$, $v = y$.

*Ejemplo:* La ecuación de la esfera es:

$$x^2+y^2+z^2-a^2 = 0 \tag{1}$$

ó

$$x = a\cos u\,\mathrm{sen}\,v, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v, \quad z = a\cos v, \tag{3}$$

$$\mathbf{r} = a(\cos u\,\mathrm{sen}\,v\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v\mathbf{j} + \cos v\mathbf{k}). \tag{3a}$$

**Coordenadas curvilíneas en una superficie.** Si la superficie está dada en la forma (3) o (3a), entonces para un valor determinado de uno de los parámetros $v = v_0$, siendo el otro ($u$) variable, el punto $\mathbf{r}(x, y, z)$ describe una curva perteneciente a la superficie: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$. Dando a $v$ diferentes valores constantes: $v = v_1, v = v_2, \ldots$ se obtiene una familia de curvas de la superficie; como $v =$ const en el movimiento a lo largo de cada una de las curvas y varía solamente $u$, estas curvas se llaman *líneas u* (fig. 252). Análogamente, el punto $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ describe otra curva; dando a $u$ diferentes valores constantes: $u = u_1$, $u = u_2 \ldots$, se obtiene una segunda familia de curvas ($u =$ const) que son las *líneas v*. De esta manera, en la superficie (3) se forma una red de curvas, las *líneas de coordenadas* y los dos números $u = u_i$ y $v = v_k$ son las *coordenadas curvilíneas* o *de Gauss* del punto $M$ de la superficie. Para el caso de una superficie dada en la forma (2), las líneas de coordenadas son las secciones de la superficie con los planos $x =$ const, $y =$ const. Toda ecuación que relaciona estas coordenadas: $F(u, v) = 0$ ó $u = u(t)$, $v = v(t)$ determina una cierta curva en la superficie.

*Ejemplo:* En las ecuaciones paramétricas de la esfera (véase el ejemplo anterior) $u$ es la *longitud* del punto ($u = \angle POx$), $v$ es la *distancia polar* del punto ($v = \angle MOz$), las líneas $v$ son los *meridianos AMB*, las líneas $u$ son los *paralelos CMD* (fig. 253).

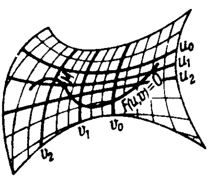


Fig. 252

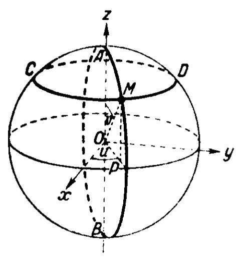


Fig. 253

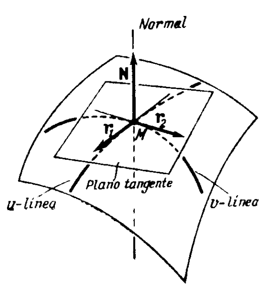


Fig. 254

## 12. Plano tangente y recta normal

**Definiciones.** Al trazar en la superficie por un punto dado $M(\mathbf{r}; x, y, z)$ de la superficie todas las curvas posibles, resulta, generalmente, que sus tangentes en el punto $M$ están situadas en un plano; éste es el ***plano tangente*** a la superficie en el punto $M$. (Representan una excepción los llamados puntos cónicos de una superficie; véase más adelante). La recta que pasa por $M$ y es perpendicular al plano tangente se llama *normal* a la superficie en el punto $M$. (fig. 254). El plano tangente pasa por los vectores $\mathbf{r}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ y $\mathbf{r}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, que son tangentes a las líneas $u$ y a las líneas $v$ en el punto $M$; su producto vectorial $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ es un vector paralelo a la normal y su versor $\mathbf{N}^0 = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2|}$ se llama *versor de la normal.* $\mathbf{N}^0$ está dirigido a uno u otro lado de la superficie, según cuál de las coordenadas curvilíneas $u$ o $v$ se considere la primera y cuál la segunda.

La **ecuación** del plano tangente y la de la normal a una superficie véase en la pág. 300.

*Ejemplo:* Para la esfera $x^2+y^2+z^2-a^2 = 0$ el plano tangente es:

$$2x(X-x)+2y(Y-y)+2z(Z-z) = 0 \quad \text{ó} \quad xX+yY+zZ-a^2 = 0,$$

la normal es:

$$\frac{X-x}{2x} = \frac{Y-y}{2y} = \frac{Z-z}{2z} \quad \text{ó} \quad \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Para la esfera:

$$x = a \cos u \operatorname{sen} v, \quad y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \quad z = a \cos v$$

el plano tangente es:

$$X \cos u \operatorname{sen} v + Y \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v + Z \cos v = a,$$

la normal es:

$$\frac{X}{\cos u \operatorname{sen} v} = \frac{Y}{\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v} = \frac{Z}{\cos v}.$$

PUNTOS SINGULARES (CÓNICOS) DE UNA SUPERFICIE. Si para los puntos de una superficie dada en la forma (1) (véase la pág. 297) (para $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$) se cumple simultáneamente que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = F(x, y, z) = 0,$$

entonces $M(x_1, y_1, z_1)$ es *un punto singular* (*cónico*); todas las tangentes que pasan por $M$ no están en un mismo plano, pero forman un cono de segundo orden, cuya ecuación es:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(X-x)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(Y-y)+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(Z-z)+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(X-x)(Y-y)+$$
$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}(Y-y)(Z-z)+2\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x}(Z-z)(X-x) = 0$$

(donde las derivadas se calculan en el punto $M$); si las seis derivadas parciales de segundo orden se anulan simultáneamente, entonces el punto singular es de un tipo más complicado (un cono de tercer orden o de un orden superior).

## ECUACIONES DEL PLANO TANGENTE Y DE LA NORMAL A UNA SUPERFICIE

| Expresión de la superficie (pág. 297) | Plano tangente | Recta normal |
|---|---|---|
| (1) | $\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0$ | $\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ |
| (2) | $Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$ | $\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}$ |
| (3) | $\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0$ | $\frac{X-x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Y-y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}}=\frac{Z-z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$ |
| (3a) | $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2=0$ ó $(\mathbf{R}-\mathbf{r})\mathbf{N}=0$ | $\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)$ ó $\mathbf{R}=\mathbf{r}+\lambda\mathbf{N}$ |

En esta tabla $x, y, z$, $\mathbf{r}$ son las coordenadas y el radio vector del punto $M$ de la curva; $X, Y, Z$, $\mathbf{R}$ son las coordenadas variables y el radio vector del punto del plano tangente o de la normal; las derivadas se calculan en el punto $M$; $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

## 13. Elemento lineal de una superficie

DIFERENCIAL DE ARCO. Si la superficie viene dada en la forma (3) o (3a) (véase la pág. 297), $M(u, v)$ es un punto dado y $N(u+du, v+dv)$ es un punto próximo al punto dado de la superficie, entonces la longitud del arco $MN$ en la superficie se expresa aproximadamente por la *diferencial de arco* o por el *elemento lineal de la superficie*, según la fórmula:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

donde

$$E = \mathbf{r}_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \mathbf{r}_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

El segundo miembro de la fórmula (1) se llama también *primera forma cuadrática* de la superficie dada en la forma (2); sus coeficientes $E$, $F$, $G$ dependen del punto de la superficie.

*Ejemplo:* Para la esfera: $\mathbf{r} = a(\cos u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \cos v\mathbf{k})$,

$$E = a^2 \operatorname{sen}^2 v, \quad F = 0, \quad G = a^2;$$

la primera forma cuadrática es:

$$ds^2 = a^2(\operatorname{sen}^2 v\,du^2 + dv^2).$$

Para la superficie dada en la forma (2) (véase pág. 297):

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2, \quad \text{donde} \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

MEDICIONES EN UNA SUPERFICIE. *La longitud del arco* de una curva $u = u(t)$, $v = v(t)$ de una superficie, para $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, se calcula pór la fórmula:

$$L = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{$*$}$$

El *ángulo $\alpha$ formado por dos curvas* (es decir, formado por sus tangentes) que se cortan en el punto $M$ y que tienen en este punto las direcciones de los vectores $d\mathbf{r}\{du, dv\}$ y $\delta\mathbf{r}\{\delta u, \delta v\}$ (fig. 255), se calcula por la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{d\mathbf{r}\,\delta\mathbf{r}}{\sqrt{(d\mathbf{r})^2(\delta\mathbf{r})^2}} =$$

$$= \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}} \tag{$**$}$$

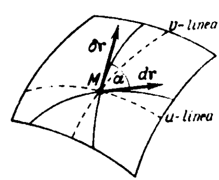


Fig. 255

(los coeficientes $E$, $F$, $G$ se calculan en el punto $M$). En particular, las líneas son perpendiculares si el numerador de ($*$ $*$) es igual a cero; $F = 0$ es la *condición de perpendicularidad* de las líneas de coordenadas $v =$ const ($dv = 0$) y $u =$ const ($\delta u = 0$).

*El área de la superficie* $S$ limitada por una curva de la superficie se calcula por la integral doble:

$$S = \int\limits_{(S)} dS,$$

donde

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \qquad (* * *)$$

De esta manera, conociendo los coeficientes $E$, $F$, $G$ de la primera forma cuadrática podemos efectuar mediciones de longitudes, de ángulos y de áreas de la superficie por las fórmulas ($*$), ($*$ $*$), ($*$ $*$ $*$), es decir, la primera forma cuadrática determina totalmente la *métrica de la superficie*.

SUPERPOSICIÓN DE SUPERFICIES POR FLEXIÓN. Al torcer una superficie sin dilataciones ni rupturas, su ecuación cambia, pero su métrica permanece la misma, es decir, la primera forma cuadrática no varía. Dos superficies diferentes que tienen una misma forma cuadrática, pueden ser superpuestas una sobre la otra mediante una *flexión*.

## 14. Curvatura de una superficie

CURVATURAS DE LAS LÍNEAS EN UNA SUPERFICIE. Si se trazan por el punto $M$ de la superficie diferentes curvas, los radios de curvatura (de flexión) $\rho$ de estas curvas $\Gamma$ en el punto $M$ están ligados entre sí por las siguientes relaciones:

1) El radio de curvatura $\rho$ de una curva $\Gamma$, es igual al radio de curvatura de la curva $C$ de la intersección de la superficie con el plano osculador de la curva $\Gamma$ en el punto $M$ (fig. 256, *a*).

2) Para cada sección plana $C$, su radio de curvatura es igual a

$$\rho = R \cos(\mathbf{n}, \mathbf{N}), \qquad \text{(M)}$$

donde $R$ es el radio de curvatura de la sección normal ($C_{norm}$) que pasa por la misma tangente $PQ$ que $C$ y por el vector N, y ($\mathbf{n}$, $\mathbf{N}$) es el ángulo entre el versor de la normal principal $\mathbf{n}$ (véase la pág. 291) de la curva $C$ y el versor de la normal N de la superficie (*teorema de Meusnier*, fig. 256, *b*). En la fórmula (M), $R$ se toma con signo más, si N está dirigido hacia la concavidad de la curva $C_{norm}$ y menos, si está dirigido hacia la convexidad de la misma.

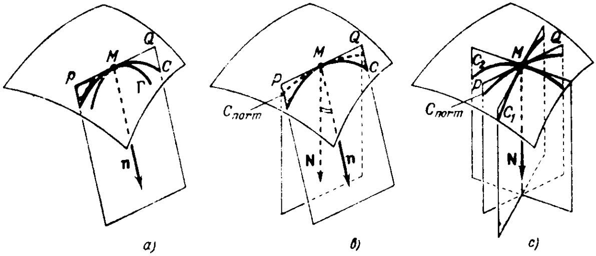



Fig. 256

3) Para toda seccion normal $C_{norm}$, su curvatura es:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{R_2} \tag{E}$$

(*fórmula de Euler*), donde $R_1$ y $R_2$ son *los radios de curvatura principales*, es decir, *los valores máximo y mínimo de* $R$; éstos se obtienen para *las secciones normales principales* de la superficie $C_1$ y $C_2$ (véase más adelante), y $\alpha$ es el ángulo entre los planos de las secciones $C$ y $C_1$ (fig. 256, *c*). En la fórmula (E) $R$, $R_1$ y $R_2$ se toman con el signo más o menos, igual que en la fórmula (M).

RADIOS DE CURVATURA PRINCIPALES. Si la superficie viene dada por la ecuación $z = f(x, y)$, entonces $R_1$ y $R_2$ son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$(rt - s^2)R^2 + h[2pqs - (1+p^2)t - (1+q^2)r]R + h^4 = 0, \tag{A}$$

donde

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\text{y} \quad h = \sqrt{1+p^2+q^2}\,.$$

Los planos de las secciones normales principales $C_1$ y $C_2$ son perpendiculares entre sí, sus direcciones se determinan por el valor de $\frac{\partial y}{\partial x}$, obtenido de la ecuación cuadrática:

$$[tpq - s(1+q^2)]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [t(1+p^2) - r(1+q^2)]\frac{dy}{dx} + [s(1+p^2) - rpq] = 0. \tag{B}$$

Si la superficie es dada en forma paramétrica $r = r(u, v)$, entonces las ecuaciones correspondientes $(A)$ y $(B)$ tienen la forma:

$$(DD''-D'^2)R^2-(ED''-2FD'+GD)R+(EG-F^2)=0, \qquad (A')$$

$$(GD'-FD'')\left(\frac{dv}{du}\right)^2+(GD-ED'')\frac{dv}{du}+(FD-ED')=0, \qquad (B')$$

donde los valores $D$, $D'$, $D''$ son los coeficientes de la *segunda forma cuadrática* de la superficie, determinados por las fórmulas:

$$D=\mathbf{r}_{11}\mathbf{N}=\frac{d}{\sqrt{EG-F^2}}, \qquad D'=\mathbf{r}_{12}\mathbf{N}=\frac{d'}{\sqrt{EG-F^2}},$$
$$D''=\mathbf{r}_{22}\mathbf{N}=\frac{d''}{\sqrt{EG-F^2}};$$

aquí los vectores $\mathbf{r}_{11}$, $\mathbf{r}_{12}$, $\mathbf{r}_{22}$ son las derivadas parciales de segundo orden del radio vector $\mathbf{r}$ con respecto a los parámetros $u$ y $v$; los numeradores $d$, $d'$, $d''$ son iguales a:

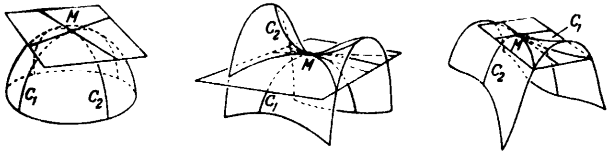
$$d=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad d'=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$d''=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Las curvas de la superficie que tienen en cada punto las direcciones de las secciones normales principales se llaman *líneas de curvatura*; sus ecuaciones se obtienen integrando la ecuación diferencial (B) o (B′).

CLASIFICACIÓN DE LOS PUNTOS DE UNA SUPERFICIE. Si en el punto $M$ de una superficie ambos valores $R_1$ y $R_2$ (pág. 302) tienen un mismo signo, entonces las secciones normales principales tienen sus concavidades dirigidas hacia un solo lado. En este caso, en una región del punto $M$ la superficie está situada a **un solo lado** del plano tangente; tal punto de la superficie se llama punto *elíptico* (fig. 257, *a*), su criterio analítico es: $DD''-D'^2>0$. En particular, para $R_1=R_2$, el punto se llama *cíclico* o *umbilical*; en éste $R=\text{const}$ para todas las secciones normales.

Si $R_1$ y $R_2$ tienen signos diferentes, las secciones normales principales tienen las concavidades dirigidas hacia lados opuestos. En este caso, la **superficie se corta** con el plano tangente y tiene un tipo de **silla de montar**;




a) b) c)

Fig. 257

tal punto de la superficie se llama *hiperbólico* (fig. 257, *b*), su criterio analítico es: $DD''-D'^2<0$.

Si $R_1$ o $R_2$ son iguales a $\infty$, entonces una sección normal principal tiene un punto de inflexión o es una línea recta; tal punto de la superficie se llama *parabólico* (fig. 257, *c*), su criterio analítico es: $DD''-D'^2=0$.

*Ejemplos:* Todos los puntos del elipsoide son elípticos, los del hiperboloide de una hoja son hiperbólicos, los del cilindro son parabólicos.

CURVATURA DE UNA SUPERFICIE. Se llama *curvatura media* de una superficie en el punto $M$ a la expresión:

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right);$$

se llama *curvatura de Gauss* a la expresión

$$K=\frac{1}{R_1R_2}.$$

*Ejemplo:* Para el cilindro circular (de radio $a$) es: $H=\frac{1}{2a}$, $K=0$.

Para los puntos elípticos $K>0$; para los hiperbólicos $K<0$; para los parabólicos $K=0$.

Si la superficie viene dada por la ecuación $z=f(x,y)$, entonces $H$ y $K$ se calculan por las siguientes fórmulas:

$$H=\frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}},$$

$$K=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\text{*}.$$

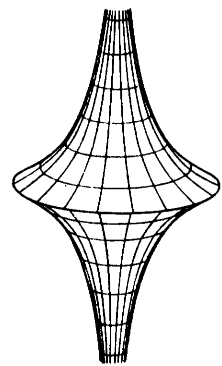


Fig. 258

Las superficies cuya curvatura media $H$ en todos los puntos es igual a cero ($R_1=-R_2$), se llaman *mínimas*. Las superficies cuya curvatura de Gauss $K$ en todos los puntos es constante, se llaman *superficies de*

---

*Véanse en la pág. 303 las designaciones de $p$, $q$, $r$, $s$, $t$.

*curvatura constante;* los ejemplos más simples de tales superficies son: para $K > 0$, la *esfera;* para $K < 0$, la *seudoesfera* [fig. 258, la superficie de revolución de la tractriz (véase la pág. 125) alrededor de su eje].

## *15. Superficies regladas y desarrollables*

Una superficie se llama *reglada* si puede ser obtenida como la huella de una línea recta en movimiento; si en este caso la superficie puede ser desarrollada en el plano, entonces se llama *desarrollable.* Los ejemplos más simples de superficies desarrollables son: la cilíndrica y la cónica (véanse las págs. 201 y 202). No todas las superficies regladas son desarrollables (por ejemplo el hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico son superficies regladas, pero no son desarrollables, véase la pág. 266). En todos los puntos de la superficie desarrollable la curvatura de Gauss es igual a cero. Si la superficie viene dada por la ecuación $z = f(x, y)$, la condición para que sea desarrollable es que:

$$rt - s^2 = 0^*.$$

## *16. Líneas geodésicas en una superficie*

CONCEPTO DE LÍNEAS GEODÉSICAS. Por cada punto $M(u, v)$ de una superficie, en cada dirección definida por la razón $\frac{dv}{du}$, pasa en la superficie una curva determinada: ésta es *la línea geodésica,* que desempeña en esta superficie la función de línea recta; 1) si un punto material es forzado a permanecer en la superficie, entonces cuando no actúan otras fuerzas exteriores el punto se mueve en la superficie por una línea geodésica; 2) un hilo elástico en tensión que descansa sobre la superficie toma la forma de línea geodésica; 3) la línea de la distancia más corta entre dos puntos de la superficie es una línea geodésica.

DEFINICIÓN. Se llama línea geodésica de una superficie a la curva cuya normal principal en cada punto coincide con la normal a la superficie.

*Por ejemplo:* la hélice circular es para el cilindro circular una línea geodésica.

ECUACIÓN. Si la superficie viene dada en la forma $z = f(x, y)$, la ecuación diferencial de las líneas geodésicas es:

$$(1 + p^2 + q^2)\frac{d^2y}{dx^2} = pt\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + (2ps - qt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (pr - 2qs)\frac{dy}{dx} - qr^*.$$

Si la superficie viene dada en la forma (3) (pág. 297), la ecuación diferencial de las líneas geodésicas tiene una forma más complicada.

---

* Véanse en la pág. 303 las designaciones de $p, q, r, s, t$.

CUARTA PARTE

# FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

---

## I. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS

### *1. Los números reales*

LOS NÚMEROS RACIONALES. Se llaman números *racionales* todos los números enteros y fraccionarios (los positivos, los negativos y el cero). Los números racionales forman un conjunto infinito que tiene las propiedades siguientes:

1) Este conjunto es *ordenado*, es decir, para cada dos números racionales distintos $a$ y $b$ se puede indicar cuál de ellos es menor que el otro.

2) Este conjunto es *denso en todo*, es decir, entre cada dos números racionales distintos $a$ y $b$ $(a < b)$ existe por lo menos un número racional $c(a < c < b)$ y, por consiguiente, un conjunto infinito de números racionales.

3) Con dos números racionales cualesquiera son siempre posibles las operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación y división) y dan como resultado un número racional determinado. Es una excepción la ***división por cero***, que es ***imposible:*** la anotación $\frac{a}{0}$ es indeterminada, ya que no existe un número determinado $b$ que verifique la igualdad $b \cdot 0 = a$ (si $a = 0$, $b$ puede ser un número **cualquiera** y si $a \neq 0$, $b$ no existe*.

---

* La igualdad empleada frecuentemente $\frac{a}{0} = \infty$ *(infinito)* no significa que tal división sea posible (¡$\infty$ no es un número!); es solamente una anotación abreviada de la frase: "si el divisor se aproxima a cero, entonces el cociente crece indefinidamente en valor absoluto".

4) Todo número racional $a$ puede ser representado en forma de fracción decimal (periódica finita o infinita).

*Representación geométrica de los números racionales.* Si en la recta $xx$ fig. 259 se han elegido un origen de referencia $O$ (el *punto cero*), una dirección positiva (la *orientación*) y una unidad de medida $l$ (la *escala*), entonces a cada número racional $a$ corresponde un punto determinado de esta recta que tiene por coordenada $a$ (un *punto racional*). La recta $xx$ se llama *eje numérico*. Según la propiedad 2) de los números racionales, entre dos puntos racionales cualesquiera hay un conjunto infinito de puntos racionales.

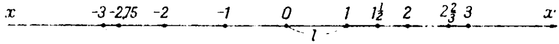



Fig. 259

Los números irracionales. El conjunto de los números racionales es insuficiente para el análisis matemático: aunque sea denso en todo no ocupa todo el eje numérico. Por ejemplo, si la diagonal del cuadrado $AB$ de lado igual a 1 se coloca sobre el eje numérico, de modo que el punto $A$ coincida con el cero, entonces $B$ caerá en un punto $K$ que no tiene coordenada racional (fig. 260). La introducción de los *números irracionales* permite hacer corresponder a **cada** punto del eje numérico un cierto número haciendo que el conjunto de los números sea continuo.

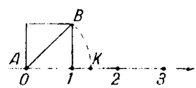



Fig. 260

Una definición rigurosa de los números irracionales se da en los cursos completos de análisis matemático. Los números irracionales se representan en el eje numérico por puntos que llenan **todas** las lagunas entre los puntos racionales. *Todo número irracional puede ser representado por una fracción decimal infinita no periódica.*

En particular, son números irracionales las raíces reales no enteras de las ecuaciones algebraicas de la forma $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+$ $+a_{n-1}x+a_n=0$ (con coeficientes enteros); por ejemplo, la ecuación $x^3-9x-4=0$ tiene raíces irracionales (véase la pág. 154); tales números se llaman *irracionalidades algebraicas*. Los ejemplos más simples de irracionalidades algebraicas son las raíces de las ecuaciones binomias $x^n-a=0$ o los números de la forma $\sqrt[n]{a}$, si éstos no son racionales (por ejemplo: $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$, $\sqrt[3]{10}=2{,}154\ldots$); los números irracionales que no son irracionalidades algebraicas se llaman *trascendentes*; tales son los números $\pi = 3{,}141592\ldots$, $e = 2{,}718281\ldots$, los logaritmos decimales de los números enteros (a excepción de los enteros de la forma $10^n$), la mayoría de los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos que tienen un número entero de grados.

LOS NÚMEROS REALES. Todos los números racionales e irracionales se llaman *números reales*. Las propiedades fundamentales del conjunto de los números reales son:

1) El conjunto de los números reales es *ordenado* (véase pág. 307);

2) es *denso en todo* (véase ahí mismo);

3) es *continuo*, es decir, (a diferencia del conjunto de los números racionales) cada punto del eje numérico tiene una coordenada real;

4) las operaciones aritméticas con números reales son siempre posibles (a excepción de la división por cero, véase pág. 307) y dan como resultado un número real. En el sistema de los números reales también son posibles la elevación a potencia y las operaciones inversas [de todo número real positivo se puede extraer raíz de cualquier grado; todo número real positivo tiene logaritmo de cualquier base positiva (a excepción de la unidad)].

*Los números complejos* (véase la pág. 566) son la ulterior generalización del concepto de número, en el análisis matemático.

## 2. Las sucesiones y sus límites

LAS SUCESIONES. Se llama *sucesión numérica** al conjunto infinito de números

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

colocados en un orden determinado, uno tras otro. Los números contenidos en la sucesión se llaman *términos* de la misma. Entre los términos de la sucesión pueden haber números iguales.

Una secesión se considera dada si es conocida la ley de su formación, es decir, una regla por la cual se puede determinar cualquier término de la sucesión. En muchos casos es posible establecer una fórmula para el *término general* $a_n$ de la sucesión.

*Ejemplos:* 1) $a_n = n$, 2) $a_n = 4+3(n-1)$, 3) $a_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 4) $a_n = (-1)^{n+1}$, 5) $a_n = 3-\frac{1}{2^{n-2}}$, 6) $a_n = 3\,\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot 10^{-\frac{n-1}{2}}$ para $n$ impar y $a_n = 3\,\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot 10^{-\frac{n}{2}+1}$ para $n$ par, 7) $a_n = \frac{1}{n}$, 8) $a_n =$

* Aquí sólo se estudian sucesiones infinitas.

$=(-1)^{n+1}n$, 9) $a_n = -\frac{n+1}{2}$ para $n$ impar y $a_n = 0$ para $n$ par, 10) $a_n =$ $= 3 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-\frac{3}{2}}}$ para $n$ impar y $a_n = 13 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-2}}$ para $n$ par.

Los primeros términos de estas sucesiones son los siguientes:

1) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots\ldots$ (serie natural),

2) $4, 7, 10, 13, 16, \ldots\ldots\ldots\ldots$ (progresión aritmética),

3) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$ (progresión geométrica),

4) $1, -1, 1, -1, 1, \ldots,$

5) $1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}, \ldots,$

6) 3, 4, 3,3, 3,4, 3,33, 3,34, 3,333, 3,334, ...,

7) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots,$

8) $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots,$

9) $-1, 0, -2, 0, -3, 0, -4, 0, \ldots,$

10) $1, 11, 2, 12, 2\frac{1}{2}, 12\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 12\frac{3}{4}, \ldots.$

LÍMITE DE UNA SUCESIÓN. Si para una sucesión dada $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ existe un número $A$ al cual se aproximan cuanto se quiera los números $a_n$ cuando crece $n$, entonces este número $A$ se llama *límite* de la sucesión*. La notación es:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

*Formulación exacta:* $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, si dado un número positivo $\varepsilon$, arbitrariamente pequeño, se puede indicar en la sucesión dada un número $a_N$ tal, que todos los números $a_n$ sin excepción que yacen después de $a_N$ (es decir, para $n > N$), se diferencian de $A$ en valor absoluto en una cantidad menor que $\varepsilon$:

$$|a_n - A| < \varepsilon \qquad (n > N).$$

De los ejemplos considerados 1-10 tienen límites las sucesiones 3), 5), 6) y 7); sus límites son:

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 5) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, 6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3\frac{1}{3}$, 7) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

*Interpretación geométrica.* Si los términos de una sucesión que tiene límite se representan por puntos del eje numérico, entonces empezando

---

* Los números $a_n$, para algunos $n$ pueden coincidir con el límite $A$.

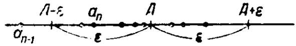


Fig. 261

desde $a_N$, todos los puntos de $a_n$ caerán en el intervalo limitado por los puntos $A-\varepsilon$ y $A+\varepsilon$ (fig. 261).

LÍMITE INFINITO. Cuando el límite no existe debido a que $a_n$ crece indefinidamente en valor absoluto al crecer $n$, se escribe el símbolo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ ("el límite es infinito").}$$

*Formulación exacta:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, si dado un número positivo $K$, arbitrariamente grande, se puede indicar en la sucesión dada un número $N$ tal, que todos los números $a_n$, para $n > N$, son en valor absoluto mayores que $K$:

$$|a_n| > K \quad (n > N).$$

Si, además, los números $a_n$ $(n > N)$ son todos mayores que 0, se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; si los números $a_n$ son todos menores que 0, se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

De los ejemplos considerados 1 – 10 las sucesiones 1), 2) y 8) tienen límites infinitos; además, en los ejemplos 1, 2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

SUCESIONES MONÓTONAS. Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ se llama *creciente* si

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots, \tag{1}$$

*decreciente* si

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > \ldots \tag{2}$$

*no decreciente* si

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \tag{3}$$

y *no creciente* si

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots \tag{4}$$

Las sucesiones de los tipos (1), (2), (3), (4) se llaman *monótonas*, siendo las sucesiones (1) y (3) *monótonas crecientes* y las sucesiones (2) y (4) *monótonas decrecientes*.

Las sucesiones (1) y (2), a diferencia de las sucesiones (3) y (4), se llaman a veces *estrictamente monótonas*. Los puntos que representan los términos de una sucesión monótona van en el eje numérico (según el orden de los índices de los términos) en una dirección, además algunos términos consecutivos de las sucesiones (3) y (4) pueden representarse por puntos coincidentes. De los ejemplos, de las sucesiones 1 – 10 de la pág. 310, sólo son monótonas las sucesiones 1), 2), 5) (crecientes) y la 7) (decreciente).

SUCESIONES ACOTADAS. Si para una sucesión dada se puede señalar un número positivo $K$ tal, que todos los términos de la sucesión sin excepción son menores en valor absoluto que $K (|a_n| < K)$, la sucesión se llama *acotada;* si no existe tal número, la sucesión no es acotada. De los ejemplos 1 – 10 de la pág. 310. sólo son acotadas las sucesiones 3 $(K = 4)$, 4 $(K = 2)$, 5 $(K = 3)$, 6 $(K = 5)$, 7 $(K = 2)$, 10 $(K = 13)$.

TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LOS LÍMITES DE LAS SUCESIONES.

1) Una sucesión puede tener sólo un límite.

2) Una sucesión que tiene límite finito es acotada; una sucesión que tiene límite infinito no está acotada.

3) Una sucesión monótona acotada tiene límite finito; si esta sucesión es monótona creciente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant a_n$, si es monótona decreciente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant a_n$.

4) Una sucesión monótona no acotada tiene límite infinito; si esta sucesión es monótona creciente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$; si es monótona decreciente, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

5) *Criterio necesario y suficiente para la existencia del límite de una sucesión.* La condición necesaria y suficiente para que una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tenga límite, es que para un número positivo $\varepsilon$, arbitrariamente pequeño, se pueda señalar un término de la sucesión $a_N$ tal, que dos términos **caulesquiera** de la misma que vienen después de $a_N$ se diferencien uno de otro en un número menor que $\varepsilon$, es decir,

$$|a_i - a_j| < \varepsilon \quad \text{para} \quad i > N \quad \text{y} \quad j > N^*.$$

Véanse en las págs. 323-326 otras propiedades de los límites y su cálculo ("Límite de una función").

## 3. *Funciones de una variable***

DEFINICIÓN. La cantidad variable $y$ se llama *función* de la cantidad variable $x$ *(argumento* o *variable independiente)*, si para un valor dado de $x$ la cantidad $y$ toma un valor determinado *(función uniforme,* por

* Una sucesión que tiene esta propiedad se llama *fundamental.*

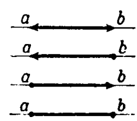
** Aquí sólo se estudian las funciones de variable real. Véanse en las págs. 571 y 579 las funciones de variable compleja.

ejemplo: $y = x^2$) o varios valores determinados *(función multiforme;* por ejemplo: la función $y = \pm\sqrt{x}$ es biforme). Los símbolos $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, etc., denotan diferentes funciones de la variable $x$; $f(a)$ es el valor que toma la función $f(x)$ para $x = a$; por ejemplo, si $f(x) = x^2+2x-5$, entonces $f(3) = 3^2+2\cdot 3-5 = 10$.

El conjunto de los valores de $x$, para los cuales la función está definida forma *el campo de definición o de existencia* de la función. Frecuentemente se estudian funciones cuyo campo de definición es conexo. Un campo de números reales se llama *conexo*, si 1) contiene más de un número y 2) no tiene lagunas, es decir, **todos** los números contenidos entre dos números cualesquiera pertenecientes al campo, también pertenecen a él. Un campo conexo puede *no estar acotado* a ambos lados (es decir, puede contener todos los puntos del eje numérico), puede estar *acotado a la izquierda o a la derecha* (es decir, puede contener todos los números mayores o, respectivamente, menores que el número dado) y puede estar *acotado* a ambos lados (es decir, puede contener todos los números comprendidos entre los dados). Un campo conexo se llama también *intervalo numérico de extremos a* y $b$ ($a < b$; el extremo $a$ puede ser igual a $-\infty$ y el extremo $b$ igual a $+\infty$). El extremo del intervalo $a$ ó $b$ se llama *abierto*, si no pertenece al campo y *cerrado*, si pertenece (los extremos $-\infty$ y $+\infty$ se consideran abiertos).

Un intervalo se designa por sus extremos $a$, $b$ colocados entre paréntesis; al extremo abierto se le coloca un paréntesis y al cerrado un corchete. Un intervalo con los dos extremos abiertos se llama *abierto*, con uno abierto y otro cerrado se llama *semiabierto* y con los dos cerrados, se llama *cerrado* (véase fig. 262*)

| Nombre del intervalo | Limitación del campo | Designación del intervalo | Representación en el eje numérico |
|---|---|---|---|
| abierto | $a < x < b$ | $(a, b)$ | |
| semiabierto | $a < x \leq b$ | $(a, b]$ | |
| | $a \leq x < b$ | $[a, b)$ | |
| cerrado | $a \leq x \leq b$ | $[a, b]$ | |
| Intervalos no acotados | $-\infty < x < +\infty$ | $(-\infty, +\infty)$ | Fig. 262 |
| | $-\infty < x < b$ | $(-\infty, b)$ | |
| | $-\infty < x \leq b$ | $(-\infty, b]$ | |
| | $a < x < +\infty$ | $(a, +\infty)$ | |
| | $a \leq x < +\infty$ | $[a, +\infty)$ | |




* En el eje numérico el extremo abierto de un intervalo se designa simbólicamente por una flecha y el cerrado, por un punto en negrilla.

Frecuentemente se estudian también funciones cuyo campo de definición es **un conjunto finito o una sucesión infinita** de números aislados. Muy a menudo se considera como campo de definición la sucesión de los números positivos enteros (la serie natural); los valores tomados por tal función se pueden colocar en sucesión

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

*(función de argumento numérico entero).*

También se estudian campos de definición que representan diferentes uniones de campos conexos y números aislados.

Métodos de expresión de una función. Una función puede expresarse (definirse) de diferentes maneras, por ejemplo: por una tabla de valores, por una gráfica, por una o varias fórmulas (en distintos campos).

*Ejemplos* de funciones dadas por varias fórmulas y sus gráficas (fig. 263)*:

$$1)\quad y=\begin{cases}-1 \text{ para } x<0,\\ \ \ 0 \text{ para } x=0,\\ +1 \text{ para } x>0,\end{cases}\qquad 2)\quad y=\begin{cases}x \text{ para } x\leqslant 0,\\ x^2 \text{ para } x\geqslant 0,\end{cases}$$

$$3)\quad y=\begin{cases}\dfrac{1}{n} \text{ para } n \text{ entero positivo}\\ 0 \text{ para } n \text{ no entero positivo.}\end{cases}$$

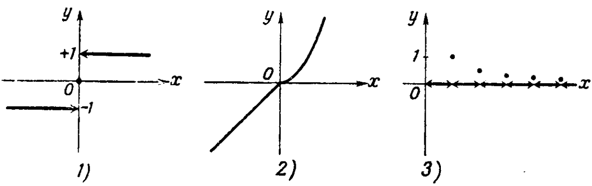



Fig. 263

Campo de determinación de una expresión analítica. En el análisis matemático se estudian en primer lugar las funciones expresadas por una fórmula, donde en el campo de definición de tal función se incluyen **todos** los valores del argumento para los cuales la fórmula analítica dada **tiene sentido**, es decir, toma unos valores determinados finitos reales. Tal campo se llama *campo de determinación de la expresión analítica.* Corrientemente si no hay restricciones complementarias por

* Las flechas indican que su punto extremo (el pico) no pertenece a la gráfica.

campo de definición (de *existencia)* de una función dada por una fórmula se entiende precisamente el campo de determinación. En particular, en el campo de determinación no están contenidos aquellos valores de la variable, para los cuales la función: 1) toma valores imaginarios, 2) "es infinita" (véase en la pág. 328 los tipos de discontinuidades de una función), 3) toma valores indeterminados (véanse en las págs. 324-326 el cálculo de límites indeterminados).

*Ejemplos:* 1) $y = \sqrt{1-x^2}$; el campo de determinación es $-1 \leqslant x \leqslant \leqslant 1$; 2) $y = \lg \cos x$; el campo de determinación es $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{(4n-1)\pi}{2} < x < \frac{(4n+1)\pi}{2} \ldots$ para $n$ entero.

FORMAS FUNDAMENTALES DE EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN. Las funciones pueden expresarse *explícitamente*, cuando se da la expresión de $y$ mediante $x$ [$y = f(x)$], *implícitamente* cuando $x$ e $y$ están relacionadas entre sí por una ecuación [$F(x, y) = 0$], por ejemplo: $x^2 + y^2 - -1 = 0$ ó $x^y - xy = 0$; en *forma paramétrica*, cuando los valores correspondientes de $x$ e $y$ están expresados por una tercera variable, llamada *parámetro* [$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$], por ejemplo: $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$.

FUNCIONES INVERSAS. Dos funciones $y = f(x)$ e $y = \varphi(x)$ se llaman *inversas* entre sí, si para cada par de valores $a, b$ que verifican la condición $b = f(a)$, se verifica también la condición $a = \varphi(b)$, y para cada par que verifica la condición $a = \varphi(b)$, se verifica la condición $b = f(a)$. Una de las dos funciones inversas entre sí se puede llamar *directa* (es indiferente cuál de ellas); entonces la otra función se llama *inversa* con respecto a la primera.

*Ejemplos de funciones inversas* (fig. 264)

$$1)\quad y = x^2 \text{ e } y = \pm\sqrt{x}, \qquad 2)\quad y = e^x \text{ e } y = \ln x,$$
$$3)\quad y = \operatorname{sen} x \text{ e } y = \operatorname{Arcsen} x.$$

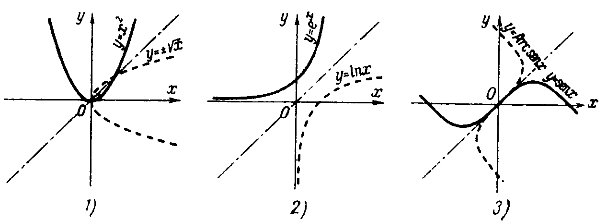



Fig. 264

Para obtener una inversa de una función directa $y = f(x)$, se deben cambiar de lugares el argumento y la función; la ecuación $x = f(y)$ determina implícitamente la función inversa a $y = f(x)$. Resolviendo la ecuación $x = f(y)$ con respecto a $y$ se obtiene en forma explícita la función inversa $y = \varphi(x)$.

Las gráficas de las funciones directas e inversas son simétricas con respecto a las bisectrices de los ángulos del primero y tercer cuadrantes (véase fig. 264).

FUNCIONES ELEMENTALES* son las definidas por fórmulas que contienen un número **finito** de operaciones algebraicas o trigonométricas efectuadas con el argumento, con la función y con algunas constantes. (Se entienden por operaciones: las cuatro operaciones aritméticas, la elevación a cualquier potencia y la extracción de la raíz, logaritmación y potenciación con cualquier base, la aplicación de una función trigonométrica o de una función trigonométrica inversa.) En lo fundamental, las funciones elementales se dividen en *algebraicas* y *trascendentes*.

En las funciones *algebraicas* el argumento $x$ y la función $y$ están relacionadas entre sí por una ecuación algebraica de la forma

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x^n y^m = 0,$$

por ejemplo: $3xy^3-4xy+x^3-1 = 0$. Si tal ecuación se puede resolver algebraicamente con respecto a $y$, entonces tenemos uno de los siguientes tipos más simples de funciones algebraicas:

1) *La función entera (el polinomio):* con las $x$ sólo se efectúan las operaciones de sumar, restar y multiplicar: $y = a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \dots +a_n$. En particular, son funciones enteras: $y = a$ *(una constante)*, $y = ax+b$ *(la función lineal)*, $y = ax^2+bx+c$ *(la función cuadrática)*.

2) *La función fraccionaria (racional):* con las $x$ se efectúan las operaciones de sumar, restar, multiplicar y dividir**. Una función fraccionaria se puede representar siempre como la razón de dos funciones enteras:

$$y = \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \dots +a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+ \dots +b_m}.$$

En particular, $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ se llama *función lineal fraccionaria (función homográfica)*.

3) *La función irracional:* además de las operaciones consideradas en

---

* Véanse en las págs. 19-77 las tablas de las funciones elementales más simples; véanse en las págs. 89-111 las gráficas de las funciones elementales.

** Si no se puede evitar la división mediante simplificaciones.

el 2) con las $x$* se efectúa la extracción de la raíz**. Por ejemplo: $y = \sqrt{2x+3}$, $y = \sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{x}}$.

*Las funciones trascendentes* son aquellas en las cuales el argumento y la función no pueden ser relacionados por una dependencia algebraica del tipo $\Sigma a_i x^m y^n = 0$. Las más simples de ellas *(las funciones trascendentes elementales)* son:

1) *Las funciones exponenciales:* son aquellas en que la variable $x$ o su función algebraica figuran en el exponente de la potencia (por ejemplo: $y = e^x$, $y = a^x$, $y = 2^{3x^2-5x}$).

2) *Las funciones logarítmicas:* son aquellas en que la variable $x$ o su función algebraica figuran bajo el signo del logaritmo [por ejemplo: $y = \ln x$, $y = \lg x$, $y = \log_2 (5x^2-3x)$].

3) *Las funciones trigonométricas:* son aquellas en que la variable $x$ o su función algebraica figuran bajo el signo de sen, cos, tg, ctg, sec, cosec (por ejemplo: $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos(2x+3)$, $y = \operatorname{tg}\sqrt{x}$)***.

4) *Las funciones trigonométricas inversas:* son aquellas en que la variable $x$ o su función algebraica están contenidas bajo el signo del arcsen, arccos, etc. (por ejemplo: arcsen $x$, arccos $\sqrt{1-x}$).

Todas las combinaciones posibles de las funciones trascendentes y algebraicas enumeradas, cuando una función puede ser argumento de la otra, dan las *funciones compuestas o funciones de funciones*, por ejemplo: $y = \ln \operatorname{sen} x$, $y = \dfrac{\ln x + \sqrt{\operatorname{arcsen} x}}{x^2+5e^x}$ etc. Tales combinaciones de funciones elementales, tomadas en **cantidades finitas**, dan también funciones elementales.

FUNCIONES NO ELEMENTALES. Las funciones que no son elementales pueden ser definidas de distintas formas, comenzando con una **descripción** simple de la correspondencia de valores del argumento y de la

* O con una función racional de $x$.

** Si no se puede evitar la extracción de raíz sacando factores de la raíz.

*** En el análisis se entiende por argumento $x$ de una función trigonométrica sen $x$, cos $x$, tg $x$, ... no sólo el ángulo o el arco de circunferencia (como se hizo la primera vez que tuvimos conocimiento de estas funciones en la trigonometría elemental) sino cualquier valor; las funciones trigonométricas pueden ser definidas de forma puramente analítica, sin auxilio de representaciones geométricas [por ejemplo, la función sen $x$ por su desarrollo en serie de potencias (véase la pág. 380) o como una solución de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y = 0$, con la condición inicial $x = 0$, $y = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = 1$]. Con tal concepto de función trigonométrica, su argumento es numéricamente igual al arco de la circunferencia expresado en radianes. Por esto, para calcular las funciones trigonométricas, se pueden emplear las tablas trigonométricas corrientes, expresando el argumento en radianes.

función. En el análisis matemático se emplean frecuentemente los siguientes procedimientos para definir las funciones no elementales*:

1) Mediante varias fórmulas matemáticas (véase la pág. 314).

2) Por medio del paso al límite; en particular:

a) mediante series o productos infinitos (véase la pag. 348).

b) por medio de integrales definidas (con uno o los dos límites variables), que no son expresables por funciones elementales (véase la pág. 387).

c) por medio de integrales definidas con límites constantes que contienen un parámetro variable (véase la pág. 463).

3) Por medio de ecuaciones diferenciales, cuyas soluciones no se expresan por cuadraturas.

4) Por medio de ecuaciones funcionales.

Para las funciones no elementales que tienen un valor teórico o práctico se forman tablas, se construyen gráficas, se estudian las propiedades. Tales funciones se llaman *especiales;* frecuentemente se les dan nombres y notaciones especiales.

*Ejemplos de funciones no elementales:*

1) *La parte entera de x*: $y$ es igual al número entero mayor que no exceda a $x$. La designación es: $E(x)$; véase la gráfica en la fig. 265.

2) *El valor absoluto de x*: $y = \begin{cases} -x \text{ para } x \leqslant 0 \\ x \text{ para } x \geqslant 0 \end{cases}$. La designación es: $y = |x|$; véase la gráfica en la fig. 266.

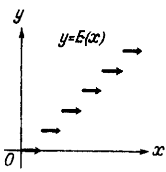



Fig. 265

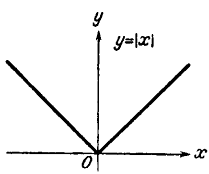



Fig. 266

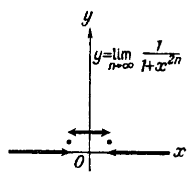



Fig. 267

3) *El signo ("signum") de x*: $y = \begin{cases} -1 \text{ para } x < 0 \\ 0 \text{ para } x = 0, \\ 1 \text{ para } x > 0. \end{cases}$ La designación es: $y = \operatorname{sgn} x$;

véase la gráfica en la fig. 263, 1) de la pág. 314.

---

* A veces se puede definir una misma función de diferentes maneras.

4) $y = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$ ó $y = \begin{cases} 1 \text{ para } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} \text{ para } |x| = 1; \\ 0 \text{ para } |x| > 1; \end{cases}$ véase la gráfica en la fig. 267.

5) $y = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$ ó $y = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$

La designación es: $y = \operatorname{Si}(x)$ ("*el integral seno*", véase en la pag. 424)

6) $y = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ ó $y = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$ .

La designación es: $y = \Gamma(x)$ ("*la función gamma*", véase en la pág. 185).

7) La solución de la ecuación de Bessel: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, con unas condiciones iniciales determinadas ("*las funciones de Bessel*", véanse en la pág. 532).

Algunos tipos de funciones.

1) *Funciones monótonas* son las que, para todo $x_2 > x_1$ perteneciente al campo de definición, verifican la condición $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ (*función monótona creciente*, fig. 268, *a*) ó $f(x_2) \leqslant f(x_1)$ *función monótona decreciente*, fig. 268, *b*); por ejemplo: $y = e^{-x}$, $y = \ln x$.

Si esta condición no se cumple para todos los valores de $x$, pertenecientes al campo de definición, sino que se cumple sólo en un cierto campo (en un intervalo, en un semieje), entonces la función se llama *monótona en este campo**.

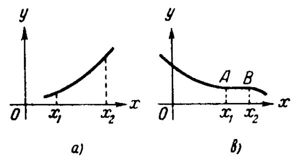



Fig. 268

2) *Funciones acotadas*. Una función se llama *acotada superiormente*, si sus valores no exceden cierto número, y *acotada inferiormente*, si sus valores no son menores que cierto número. Una función acotada superior e inferiormente, se llama simplemente *acotada*.

---

* Frecuentemente las funciones monótonas definidas anteriormente se llaman *monótonas en sentido amplio*. Así mismo, la función que verifica la condición $f(x_2) > f(x_1)$ ó $f(x_2) < f(x_1)$ (sin el signo $=$) se llama *monótona creciente* (respectivamente, *monótona decreciente*) *en sentido estricto*. La función representada en la fig. 268, *a* es monótona creciente en sentido estricto y la representada en la fig. 268, *b* es monótona decreciente en entido amplio (en la parte *AB* la función es constante).

*Ejemplos:* $y = 1 - x^2$ está acotada superiormente ($y \leqslant 1$); $y = e^x$ está acotada inferiormente ($y > 0$); $y = \operatorname{sen} x$ está acotada ($-1 \leqslant y \leqslant +1$); $y = \frac{4}{1+x^2}$ está acotada ($0 < y \leqslant 4$).

3) *Funciones pares* son las que verifican la condición $f(-x) = f(+x)$ (fig. 269, *a*); por ejemplo: $y = \cos x$, $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

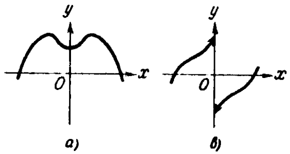



Fig. 269

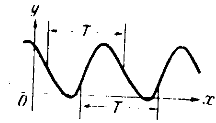



Fig. 270

4) *Funciones impares* son las que verifican la condición $f(-x) = -f(+x)$ (fig. 269, *b*); por ejemplo: $y = \operatorname{sen} x$, $y = x^3 - x$.

5) *Funciones periódicas* son las que verifican la condición $f(x+T) = f(x)$; el número $T$ se llama *período de la función* (fig. 270). Generalmente se llama período **al menor** número $T$ que verifica esta condición.

## 4. *Límite de una función*

El concepto de *límite* se ha considerado aquí sólo para funciones de dos tipos: 1) para las funciones de argumento numérico entero (véase la pág. 314) y 2) para las funciones con campo de definición conexo (véase pág. 313)*.

El límite de una función de argumento numérico entero $y = f(x)$ ($x = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$) se determina sólo para $x \to \infty$; esto es el límite de la sucesión numérica** $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$:

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(n).$$

*Ejemplos:*

$$1)\ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad 2)\ \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Límite de una función de argumento continuo (es decir, con campo de definición conexo).

---

* El concepto de límite subsiste también para funciones con un campo de definición más complicado; véase sobre esto en los cursos completos de análisis.

** Véase la pág. 309.

*Definición.* La función $y = f(x)$ tiene el *límite* $A$, cuando $x \to a$:

$$A = \lim_{x \to a} f(x),$$

si el valor de la función $f(x)$ se hace arbitrariamente próximo al valor $A$ cuando $x$ se aproxima a $a$. Para el valor $x = a$ la función puede no tomar el valor $A$ y, en general, puede no estar determinada.

*Formulación exacta:* $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, si dado un número positivo $\varepsilon$, arbitrariamente pequeño, se puede señalar un número positivo $\eta$ tal que, para todo valor de $x$ del intervalo $a - \eta < x < a + \eta$* (a la posible excepción del valor $x = a$), los valores correspondientes de $f(x)$ están situados en el intervalo $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ (fig. 271).

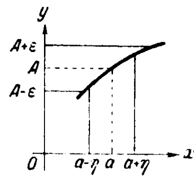


Fig. 271

*Criterios de existencia del límite.*

1) *Reducción al límite de sucesión.* La función $f(x)$ tiene el límite $A$, para $x = a$, si para una sucesión **cualquiera** de valores de $x(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, pertenecientes al campo de definición de la función y que tiene por límite el número $a$, la sucesión de los valores correspondientes de la función $[f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots]$ tiene límite. Este límite $A$ es común para todas estas sucesiones y es el límite de la función $f(x)$.

2) *Criterio de Cauchy.* La condición necesaria y suficiente, para que una función $f(x)$ tenga límite para $x = a$, es que para dos valores cualesquiera del argumento $x_1$ y $x_2$, pertenecientes al campo de definición de la función y suficientemente próximos a $a$, los valores correspondientes de la función $f(x_1)$, $f(x_2)$ estén suficientemente próximos entre sí.

*Formulación exacta.* La condición necesaria y suficiente para que la función $f(x)$ tenga límite para $x = a$ es que para todo valor positivo arbitrariamente pequeño $\varepsilon$, se pueda señalar un número positivo $\eta$ tal, que para cualesquiera $x_1$ y $x_2$, pertenecientes al campo de definición de la función y que verifiquen las condiciones $|x_1 - a| < \eta$ y $|x_2 - a| < \eta$, se cumpla la condición

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

El concepto de *límite infinito de una función* es análogo al de límite infinito de una sucesión (véase la pág. 311); con la notación $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ *(el límite es infinito)* se designa el caso en que el límite de la función no

---

* Si $a$ es un punto frontera del campo de definición conexo, entonces esta desigualdad doble se sustituye por la simple desigualdad: $a - \eta < x$ ó $x < a + \eta$.

existe cuando $x \to a$ debido a que $f(x)$ crece indefinidamente en valor absoluto cuando $x \to a$.

*Formulación exacta:* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ si, dado un número positivo $K$ arbitrariamente grande, existe un número positivo $\eta$ tal, que para todo valor de $x$ del intervalo $a-\eta < x < a+\eta$, los valores correspondientes de $f(x)$ son en valor absoluto mayores que $K$:

$$|f(x)| > K.$$

Si en este caso todos los valores de $f(x)$ son positivos en el intervalo $a-\eta < x < a+\eta$, entonces se escribe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$; si son negativos, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

*Límites de la función a la izquierda y a la derecha.* La función $f(x)$ tiene para $x = a$ el límite $A$ *a la izquierda*, si ésta se aproxima arbitrariamente a $A$ para valores **crecientes** de $x$ que se aproximan a $a$. La designación es: $A = f(a-0)$. Análogamente la función tiene para $x = a$ el límite $A$ *a la derecha*, si la misma se aproxima arbitrariamente a $A$ para valores **decrecientes** de $x$ que se aproximan a $a$. La designación es: $A = f(a+0)$. Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$ tiende a diferentes límites a la izquierda y a la derecha cuando $x \to 1$: $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$ (fig. 272).

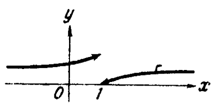



Fig. 272

*Límite de una función cuando* $x \to +\infty$ *y* $x \to -\infty$. El número $A$ se llama límite de la función $y = f(x)$ cuando $x \to +\infty$:

$$A = \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

si, dado un número positivo $\varepsilon$, arbitrariamente pequeño, existe un número $N$ tal, que para todos los valores de $x > N$, los valores correspondientes de $f(x)$ están situados en el intervalo $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$. Análogamente,

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

si, dado un número positivo $\varepsilon$, arbitrariamente pequeño, existe un número $-N$ tal, que para todos los valores de $x < -N$, los valores correspondientes de $f(x)$ están situados en el intervalo $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

Así mismo, si para un crecimiento o un decrecimiento infinito de $x$, la función crece indefinidamente en valor absoluto, entonces no hay límite cuando $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$; lo cual se designa convencionalmente así:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty.$$

Por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = +\infty.$$

TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LÍMITES DE FUNCIONES:

1) El límite de una función constante es igual a este valor:

$$\lim A = A.$$

2) El límite de la suma (de la diferencia) de un número finito de funciones es igual a la suma (diferencia) correspondiente de los límites de estas funciones:

$$\lim_{x \to a} [f(x)+\varphi(x)-\psi(x)] = \lim_{x \to a} f(x)+ \lim_{x \to a} \varphi(x)- \lim_{x \to a} \psi(x).$$

3) El límite del producto de un número finito de funciones es igual al producto de los límites de estas funciones:

$$\lim_{x \to a} [f(x)\cdot\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \lim_{x \to a} f(x)\cdot \lim_{x \to a} \varphi(x)\cdot \lim_{x \to a} \psi(x).$$

4) El límite del cociente de dos funciones es igual a:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x)}, \quad \text{siempre que } \lim_{x \to a} \varphi(x) \neq 0.$$

5) Si la función $f(x)$ está comprendida entre otras dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$: $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$ y si $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = A$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

6) Una función monótona de argumento continuo tiene límite (finito o infinito) para todo valor de $x$ (finito o infinito); una función monótona acotada tiene límite finito para todo valor de $x$.

ALGUNOS LÍMITES BÁSICOS:

1) *El número e*: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71828\ldots$ (es un número irracional). Véase en la pág. 19 la tabla de valores relacionados con $e$. El número $e$ sirve de base del sistema de logaritmos naturales (véase la pág. 150).

2) *El número C*: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}-\ln n\right) = C = 0{,}5772\ldots$ *(la constante de Euler)*.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, si $x$ es la longitud de arco o el ángulo expresado en radianes.

CÁLCULO DE LÍMITES. Para calcular los límites se emplean los teoremas fundamentales indicados anteriormente y también los siguientes procedimientos:

1) Transformación de la función a una forma tal que el límite sea fácil de encontrar.

*Ejemplos:*

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x^2+x+1) = 3;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2(\operatorname{sen} 2x)}{2x} = 2 \lim_{2x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = 2, \quad \text{etc.}$$

2) En los casos que se reducen a límites "indeterminados" de los tipos: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$, se apdlica *la regla de L'Hospital:*

a) *Límites indeterminados de los tipos* $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Si $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, y las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ están definidas en un intervalo que contiene al punto $a$* y poseen en este intervalo derivadas finitas [$\psi'(x) \neq 0$], siendo $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = 0$ ("límite indeterminado, del tipo $\frac{0}{0}$")

o

$\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = \infty$ ("límite indeterminado, del tipo $\frac{\infty}{\infty}$"), se tiene:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)},$$

suponiendo que este límite existe o es igual a $\infty$ *(regla de L'Hospital)*.

---

* En el propio punto $a$ $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ pueden no estar definidas.

Si $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ representa de nuevo un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, entonces se aplica esta regla, por segunda vez, etc.

*Ejemplo:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \operatorname{sen} 2x}{\ln \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{2 \cos 2x}{\operatorname{sen} 2x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{2}{\cos^2 x}}{\dfrac{2}{\cos^2 2x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} = 1.$$

b) *Límite indeterminado, del tipo* $0 \cdot \infty$. Si $f(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$ [con las mismas condiciones que en el caso a)] y $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = \infty$ (**"limite indeterminado del tipo** $0 \cdot \infty$"), entonces para encontrar el límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ se transforma la función al tipo $\dfrac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{\psi(x)}}$ ó $\dfrac{\psi(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$, lo que se reduce al caso $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

*Ejemplo:* $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x - \lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\pi - 2x}{\operatorname{ctg} x} = \lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{-2}{-\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = 2.$

c) *Límite indeterminado del tipo* $\infty - \infty$. Si $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = \infty$ ("límite indeterminado del tipo $\infty - \infty$"), entonces para encontrar el límite $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, la diferencia $\varphi(x) - \psi(x)$ se transforma algebraicamente al tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Esto se puede hacer por diferentes procedimientos $\left[\text{por ejemplo: } \varphi - \psi = \left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\varphi}\right) : \frac{1}{\varphi\psi}\right]$.

*Ejemplo:* $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x \ln x - x + 1}{x \ln x - \ln x}\right) \left\{\dfrac{0}{0}\right\}.$

Aplicando dos veces la regla de L'Hospital obtenemos:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x \ln x - x + 1}{x \ln x - \ln x}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\ln x}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

d) *Límites indeterminados de los tipos* $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$. Si $f(x) = \varphi(x)^{\psi(x)}$ y $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \psi(x) = 0$, entonces se debe primeramente encontrar el límite $A$ de la expresión $\ln f(x) = \psi(x) \cdot \ln \varphi(x)$, el cual tiene la forma $0 \cdot \infty$ (caso b), y después elevarlo a potencia, es decir, calcular $e^A$.

*Ejemplo:* $\lim\limits_{x \to 0} x^x = X$; $\ln x^x = x \ln x$; $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x =$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0, \ln X = 0, \ X = 1.$$

En consecuencia, $\lim\limits_{x \to 0} x^x = 1$.

En los casos $\infty^0$ y $1^\infty$, se procede análogamente.

3) Además de la regla de L'Hospital para calcular los límites indeterminados se emplea el desarrollo de funciones en serie de Taylor. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots\right) = \frac{1}{6}.$$

## 5. *Infinitésimos*

DEFINICIONES. Una función $\alpha$ de la variable $x$ se llama ***infinitamente pequeña*** (también se dice que es un *infinitésimo*) cuando $x \to a$, si su límite es igual a cero $\left(\lim\limits_{x \to a} \alpha = 0\right)$. Si $\alpha = c$ (constante) y $\lim \alpha = 0$, entonces $c = 0$*, es decir, *para las cantidades constantes sólo el cero es un infinitésimo.*

Si la función $A$ de la variable $x$ tiene límite infinito cuando $x \to a$ (véase la pág. 321), entonces la función se llama ***infinitamente grande*** o ***infinita*** para $x \to a$.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES. Si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ son infinitésimos y $a$ es *finito* (es decir, que no tiene límite cero ni infinito), entonces: 1) la suma y la diferencia $\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots$ son infinitésimos (si el número de sumandos está acotado); 2) el producto $\alpha \cdot \beta$ o $\alpha \cdot a$ es un infinitésimo; 3) el cociente $\frac{\alpha}{a}$ es un infinitésimo (si $a \neq 0$); 4) el cociente $\frac{\alpha}{\beta}$ puede ser un infinitésimo, una cantidad finita, una infinita o ser una cantidad que no tiene límite.

*Ejemplos:* 1) $\alpha = \operatorname{sen} x, \beta = 1 - \cos x, \gamma = x^2$. Cuando $x \to 0$ $\alpha, \beta$ y $\gamma$ son infinitésimos; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\beta}{\alpha} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\beta}{\gamma} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$

* El límite de un valor constante es igual a sí mismo.

$= \frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\alpha}{\gamma} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \infty$; por tanto, $\frac{\beta}{\alpha}$ es un infinitésimo, $\frac{\beta}{\gamma}$ es una cantidad finita y $\frac{\alpha}{\gamma}$ es un infinito.

2) $\alpha = \frac{1}{n}$, $\beta = \frac{(-1)^n}{n}$ ($n$ es un número entero). Cuando $n \to \infty$, $\alpha$ y $\beta$ son infinitésimos; el límite $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{n \to \infty} (-1)^n$ no existe.

ORDEN DE LOS INFINITÉSIMOS. Dos infinitésimos tienen *un mismo orden* si su razón es una cantidad finita, si $\frac{\alpha}{\beta}$ es un infinitésimo entonces $\alpha$ es un infinitésimo de *orden superior* a $\beta$; si $\frac{\gamma}{\alpha}$ es un infinito, entonces $\frac{\alpha}{\gamma}$ es un infinitésimo y $\alpha$ es de orden superior a $\gamma$.

*Ejemplo:* Las funciones $\beta = 1 - \cos x$ y $\gamma = x^2$ son infinitésimas del mismo orden; $\beta$ y $\gamma$ son infinitésimos de orden superior a $\alpha = \operatorname{sen} x$.

Un infinitésimo $\alpha$ se llama *de orden m* con respecto a otro infinitésimo $\beta$, si el orden de $\alpha$ es igual al orden del infinitésimo $\beta^m$.

*Ejemplo:* Con respecto al infinitésimo $x$ (cuando $x \to 0$) el $\operatorname{sen} x$ es un infinitésimo de primer orden y $1 - \cos x$ es un infinitésimo de segundo orden.

Dos infinitésimos son *equivalentes* si el límite de la razón de los mismos es igual a 1.

*Ejemplos:* los infinitésimos $x$ y $\operatorname{sen} x$ son equivalentes (cuando $x \to 0$); los infinitésimos $x^2$ y $1 - \cos x$ no son equivalentes.

Cuando se busca el límite de la razón de dos infinitésimos, cualquiera de ellos se puede reemplazar por un infinitésimo equivalente sin variar por ello el límite.

## 6. *Continuidad y discontinuidades de las funciones*

CONCEPTOS DE CONTINUIDAD Y DE DISCONTINUIDAD. La mayoría de las funciones que se estudian en el análisis matemático son *continuas*, es decir, para pequeñas variaciones del argumento $x$, la función $y$ también varía muy poco y la gráfica de esta función es una curva continua "ininterrumpida". Para algunos valores de $x$ la continuidad puede dejar de subsistir, interrumpiéndose la gráfica, o sea, la función tiene una *discontinuidad;* los valores del argumento en los cuales la función tiene discontinuidades, se llaman *puntos de discontinuidad.* En la fig. 273 está representada la gráfica de una función continua en todos los puntos a excepción de los puntos de discontinuidad $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$ (las letras se refieren a las proyecciones de los puntos)*.

---

* Las flechas en la gráfica denotan convencionalmente que el punto que se encuentra en el pico de la flecha no pertenece a la gráfica; el punto en negrilla se considera perteneciente a la gráfica.

DEFINICIONES. Una función $y = f(x)$ se llama *continua* para el valor $x = a$ (en el punto $x = a$), si 1) el valor $a$ pertenece a su campo de definición y 2) existe el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ y éste es igual a $f(a)$*.

Si la función está dada y es continua para todos los valores de $x$ en el intervalo desde $a$ hasta $b$, entonces se llama *continua en este intervalo* (abierto, cerrado o semiabierto, véase pág. 313). La función que está dada y es continua en todos los puntos del eje numérico se llama *continua en todo el eje*. La función es *discontinua* en aquellos puntos $a$ ("*puntos de discontinuidad*")** que están situados en el interior o en la frontera del campo de definición de la función y en los cuales la función no está definida, o el valor $f(a)$ no coincide con el valor del límite $\lim_{x \to a} f(x)$ o el $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.

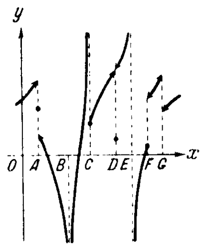


Fig. 273

Si $f(x)$ es continua en todos los puntos de cierto intervalo, a excepción de un número finito de puntos aislados, en los que $f(x)$ tiene discontinuidades **finitas** (véase más adelante), entonces la función se llama *continua a trozos*; su gráfica está formada por varios arcos de curvas.

TIPOS DE DISCONTINUIDADES DE LAS FUNCIONES QUE SE PRESENTAN FRECUENTEMENTE.

1) *Discontinuidad infinita* ("la función tiende a infinito"): es el caso más frecuente que se presenta (los puntos $B$, $C$, $E$ de la fig. 273).

*Ejemplos:*

$f(x) = \operatorname{tg} x$, $f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty$, $f\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty$*** (véase la gráfica en la pág. 106) (tiene una discontinuidad del tipo del punto $E$ de la fig. 273); $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$; $f(1-0) = +\infty$, $f(1+0) = +\infty$ (tiene una discontinuidad del tipo del punto $B$ de la fig. 273); $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$; $f(1-0) = 0$, $f(1+0) = \infty$ (tiene una discontinuidad del tipo del punto $C$ de la fig. 273, con la diferencia de que $f(x)$ no está dada en el punto 1).

---

* La segunda condición se puede reemplazar por la siguiente, que es equivalente: para el infinitésimo $\alpha$, la diferencia $\beta = f(a+\alpha) - f(a)$ es un infinitésimo (a un incremento infinitésimo del argumento corresponde un incremento infinitésimo de la función).

** Si la función está dada sólo hacia un lado del valor dado del argumento $x = a$ (por ejemplo, $+\sqrt{x}$ para $x = 0$, arcos $x$ para $x = 1$), no se habla sobre una discontinuidad de la función, sino sobre una ruptura de la función.

*** Véase en la pág. 322 las designaciones simbólicas de $f(a-0)$ y $f(a+0)$.

2, *Discontinuidad finita:* cuando $x$ pasa por el valor $a$, la función "salta" de un valor finito a otro (los puntos $A$, $F$, $G$, de la fig. 273). El propio valor de $f(x)$ para $x = a$ puede no estar dado (el punto $G$), puede coincidir con el valor $f(a-0)$ ó $f(a+0)$ (el punto $F$) y puede ser distinto tanto de $f(a-0)$ como de $f(a+0)$ (el punto $A$).

*Ejemplos:*

$f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$ (véase la gráfica en la pág. 315). $f(x) = E(x)$ (véase la fig. 265 de la pág. 318) $f(a-0) = a-1$, $f(a+0) = a$; $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ (véase la fig. 267) $f(1-0) = 1$, $f(1+0) = 0$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$.

3) *Discontinuidad evitable:* existe el $\lim\limits_{x\to a} f(x)$: $f(a-0) = f(a+0)$, pero en el punto $x = a$ la función no está dada o tiene un valor $f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$ (el punto $D$ de la fig. 273). Este caso de discontinuidad se llama evitable, pues asignando a $f(a)$ el valor $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ("agregando un punto a la gráfica")* la función se hace continua. Los diferentes casos de "indeterminaciones" que se calculan por la regla de L'Hospital y por otros procedimientos, y que dan como resultado un límite finito (véanse las págs. 324-326), representan ejemplos de discontinuidades evitables.

*Ejemplo:* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ para $x = 0$ da una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$; la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{para } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{para } x = 0 \end{cases}$ es continua.

**Continuidad y puntos de discontinuidad de las funciones elementales.** Todas las funciones elementales son continuas en su campo de definición; los puntos de discontinuidad de estas funciones no pertenecen al campo de definición. Véase en la pág. 286 el estudio completo y la construcción de la gráfica de una función elemental; véanse en las págs. 89-110 las gráficas de las funciones más simples. Aquí sólo se exponen las nociones generales sobre las discontinuidades de las funciones elementales.

---

* O trasladando en la gráfica el punto ($D$) "que ha saltado".

*Las funciones enteras* (los polinomios) son continuas en todo el eje numérico.

*Las funciones fraccionarias* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ [$P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios] son continuas en todo el eje numérico, a excepción de aquellos valores de $a$, para los cuales $Q(x) = 0$, pero $P(x) \neq 0$ para este valor $x = a$ la función tiene una discontinuidad infinita. Si $a$ es una raíz común del denominador y del numerador, entonces la función tiene una discontinuidad infinita solamente si el orden de multiplicidad de la raíz del denominador es mayor que el orden de la raíz del numerador; en caso contrario la discontinuidad es evitable.

*Funciones irracionales.* Los radicales (con exponentes enteros) de las funciones enteras son funciones continuas para todos los valores de $x$ que pertenecen al campo de definición; en las fronteras de estos campos puede haber discontinuidades finitas (la raíz de índice par, donde se considera su valor aritmético, en la frontera entre los valores positivos y negativos del subradical). Los radicales de las funciones fraccionarias tienen discontinuidades en aquellos puntos $x$ en los que la función subradical es discontinua.

*Funciones trigonométricas.* Las funciones sen $x$ y cos $x$ son continuas en todo el eje numérico; tg $x$ y sec $x$ tienen discontinuidades infinitas para $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$; ctg $x$ y cosec $x$ tienen discontinuidades infinitas para $x = n\pi$ ($n$ es el número entero).

*Las funciones trigonométricas inversas* arctg $x$ y arcctg $x$ son continuas en todo el eje numérico, las funciones arcsen $x$ y arccos $x$ tienen discontinuidades en las fronteras del intervalo de su definición ($-1 \leqslant x \leqslant +1$).

*La función exponencial* $e^x$ ó $a^x$ ($a > 0$) es continua en todo el eje numérico.

*La función logarítmica* log $x$ (con cualquier base positiva) es continua para todos los valores positivos de $x$ y es discontinua en el punto $x = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to 0} \log x = -\infty\text{, el límite a la derecha}\right)$.

En el caso de una función elemental complicada, el estudio de las discontinuidades se efectúa para aquellos valores del argumento en los cuales tienen discontinuidades las funciones simples contenidas en la composición de la función complicada (según los casos considerados anteriormente).

*Ejemplo:* Determinar las discontinuidades de la función $y = \frac{e^{-\frac{1}{x-2}}}{x \operatorname{sen} \sqrt[3]{1-x}}$.

El exponente $\frac{1}{x-2}$ tiene una discontinuidad infinita para $x = 2$; $e^{\frac{1}{x-2}}$ tiene una discontinuidad infinita para $x = 2$.

$$\left(e^{\frac{1}{x-2}}\right)_{x=2-0} = 0, \quad \left(e^{\frac{1}{x-2}}\right)_{x=2+0} = \infty.$$

El denominador de la expresión de $y$ es finito para $x = 2$; por tanto, la función, para $x = 2$, tiene una discontinuidad infinita del tipo del punto $C$ de la fig. 273.

El denominador se anula para $x = 0$ y para aquellos valores de $x$ que anulan la función sen $\sqrt[3]{1-x}$; estos últimos corresponden a las raíces de la función $\sqrt[3]{1-x} = n\pi$ ó $x = 1 - n^3\pi^3$, donde $n$ es un número entero. El numerador no se anula para ninguno de estos valores y para los valores $x = 0$, $x = 1$, $x = 1 \pm \pi^3$, $x = 1 \pm 8\pi^3$, $x = 1 \pm 27\pi^3$, ... la función tiene discontinuidades infinitas del tipo del punto $E$ de la fig. 273.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

1) *El paso por cero* (teorema de Cauchy). Si una función $f(x)$ está dada y es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en sus extremos los valores $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, entonces entre $a$ y $b$ existe (por lo menos uno) un valor $c$ en el cual $f(x)$ se anula:

$$f(c) = 0 \, (a < c < b).$$

(Interpretación geométrica: una curva continua que pase de un lado del eje $x$ al otro, corta este eje).

2) *Teorema del valor intermedio*. Si una función $f(x)$ está dada y es continua en un campo conexo y en dos puntos $a$ y $b$ $(a < b)$ de este campo, toma valores desiguales $A$ y $B$:

$$f(a) = A, \quad f(b) = B, \quad (A \neq B),$$

entonces, para cualquier número $C$ comprendido **entre** $A$ y $B$, existe por lo menos un punto $c$ entre $a$ y $b$ tal, que

$$f(c) = C \, (a < c < b; \; A < C < B \text{ ó } A > C > B)$$

("la función $f(x)$ toma todos los valores intermedios entre $A$ y $B$").

3) EXISTENCIA DE LA FUNCIÓN INVERSA*. Si una función $f(x)$ está dada en un campo conexo I en este campo I es continua y **monótona criciente** (o **monótona decreciente**) en sentido estricto (pág. 319), entonces para esta función existe una función inversa $\varphi(x)$, definida en el campo II de los valores que toma la función $f(x)$, la cual es uniforme, continua y

* Véanse las págs. 315-316.

monótona creciente (respectivamente, monótona decreciente) también en sentido estricto (fig. 274 *a* y *b*).

4) *Teorema sobre la acotación de la función.* Si una función $f(x)$ está dada y es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces la función está **acotada** en este intervalo, es decir, existen dos números $m$ y $M$ tales que

$$m \leqslant f(x) \leqslant M,$$

para

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

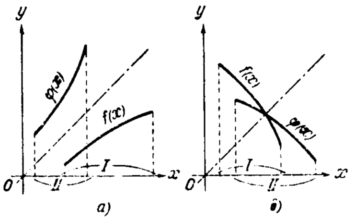


Fig. 274

5) *Existencia del máximo y mínimo absoluto.* Si una función $f(x)$ está dada y es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces en este intervalo existe por lo menos un punto $c$ tal, que el valor $f(c)$ es el máximo entre todos los valores de $f(x)$, y existe por lo menos un punto $d$ tal, que el valor $f(d)$ es el mínimo entre todos los valores de $f(x)$:

$$f(c) \geqslant f(x) \quad \text{y} \quad f(d) \leqslant f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

La diferencia entre el máximo y mínimo absolutos de una función continua se llama *oscilación* de esta función en el intervalo considerado.*

6) Una función continua en un intervalo cerrado es también **uniformemente continua** en este intervalo (véase más adelante).

CONTINUIDAD UNIFORME. Una función $y = f(x)$ se llama *uniformemente continua* en el campo dado de definición, si para cada número positivo $\varepsilon$ se puede señalar un número $\eta$ tal, que para dos puntos **cualesquiera** $x_1$ y $x_2$ pertenecientes al campo de definición de la función y cuya distancia entre sí sea menor que $\eta$, la diferencia entre los valores correspondientes de la función $f(x_1)$ y $f(x_2)$ es en valor absoluto menor que $\varepsilon$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad |x_1 - x_2| < \eta.$$

La continuidad uniforme significa que en todas las partes del campo de definición de la función, es suficiente **un mismo** grado de proximidad de dos valores del argumento para obtener un grado determinado de proximidad de los valores correspondientes de la función.

Una función continua en un campo dado no es siempre uniformemente continua en el mismo.

---

* El concepto de *oscilación* de una función se puede hacer extensible aún a las funciones que no tienen máximo ni mínimo absolutos. Sobre esto, véase en los cursos completos de análisis matemático.

## 7. *Funciones de varias variables*

DEFINICIÓN. La variable $u$ se llama *función de n variables* $x, y, z, \ldots, t$ (los argumentos), si para valores dados de estas variables, el valor $u$ toma un valor determinado *(función uniforme)* o varios valores determinados *(función multiforme)*. Designaciones: la función de dos variables: $u = f(x, y)$, la función de tres variables: $u = F(x, y, z)$, la función de $n$ variables: $u = \varphi(x, y, z, \ldots, t)$. El conjunto de $n$ números que representan los valores correspondientes de cada variable se llama *sistema de valores de los argumentos**.

*Ejemplos:* La función de dos variables $u = f(x, y) = xy^2$, para el sistema de valores $x = 2$, $y = 3$, toma el valor $f(2, 3) = 2 \cdot 3^2 = 18$. La función de cuatro variables $u = \varphi(x, y, z, t) = x \ln(y - zt)$, para el sistema de valores $x = 3, y = 4, z = 3, t = 1$, toma el valor $\varphi(3, 4, 3, 1) = 3 \cdot \ln(4 - 3 \cdot 1) = 0$.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS.

*Representación gráfica del sistema de valores de los argumentos.* El sistema de valores de las dos variables $x$ e $y$ puede ser representado en el plano por un punto $P$ de coordenadas cartesianas $x$ e $y$ (véase la pág. 228); el sistema de valores de las tres variables $x$, $y$, $z$, puede ser representado en el espacio por un punto $P$ de coordenadas cartesianas $x$, $y$, $z$. Para un sistema de cuatro variables o de un número mayor de ellas tal representación es imposible; sin embargo, por analogía, se ha convenido llamar al sistema de $n$ valores de las variables $x, y, z, \ldots, t$, *punto del espació n-dimensional de coordenadas* $x, y, z, \ldots, t$. En el ejemplo anterior el sistema de números (3, 4, 3, 1) es un punto del espacio de cuatro dimensiones con coordenadas $x = 3$, $y = 4$, $z = 3$, $t = 1$. Por esto a la función de varias variables se la llama también *función de un punto* (véase la pág. 608).

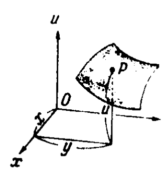


Fig. 275

*Representación gráfica de una función de dos variables* $u = f(x, y)$. Análogamente a la **gráfica** de una función de una variable, la función de dos variables se representa gráficamente por una *superficie* cuya ecuación es: $u - f(x, y) = 0$ (fig. 275) (véase la pág. 253). Por ejemplo, la función $u = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3}$ está representada por un plano (véase la pág. 254), la función $u = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4}$ viene representada por un parabo-

* O punto del espacio $n$-dimensional, véase más adelante.

loide elíptico (véase la pág. 266), la función $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, por una semiesfera, etc.*. (fig. 276).

Campo de definición de una función es el conjunto de aquellos sistemas de valores que pueden tomar los argumentos en el problema considerado. Los campos de definición pueden ser muy diversos**; es frecuente encontrar funciones con campos de definición conexos.

*Recintos o regiones conexos de dos variables.* Los recintos representados en la fig. 277 se llaman *simplemente conexos**** (el plano también es un recinto simplemente conexo). Si en el interior de la parte considerada del plano hay **un** punto o un recinto simplemente conexo acotado que no pertenece al campo de definición de la función, entonces tal

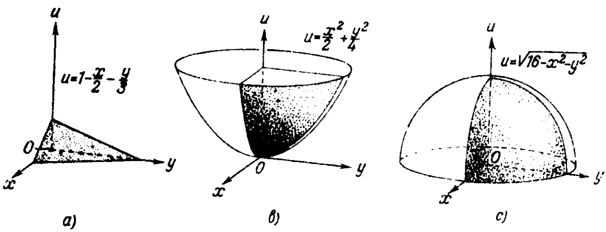



Fig. 276

parte del plano se llama *recinto biconexo*. En la fig. 278 están representados ejemplos de recintos biconexos. Análogamente en la fig. 279 vienen representados recintos *múltiplemente conexos*.

El recinto de la fig. 280 no es conexo.

*Recintos conexos de tres variables* (los casos más simples): todo el espacio o una parte del mismo, limitado por una o varias superficies; los puntos de estas superficies pueden formar parte o no del campo de

* Las funciones de tres variables o de un número mayor de variables no pueden tener una representación geométrica análoga. Pero, por analogía con la superficie del espacio tridimensional, para el espacio $n$-dimensional se introduce un concepto semejante de *hipersuperficie*.

** Pueden ser recintos, regiones, dominios, etc. Las definiciones exactas de estos conceptos, véanse en S. R. Pastor, P. P. Calleja, C. A. Trejo. Análisis matemático, Vol. II § 64-5. *(Nota de la Edit.)*

*** En la fig. 277 están representados los casos más simples de recintos conexos de dos variables y vienen dadas sus denominaciones (los recintos están sombreados; si la frontera del recinto forma parte del campo de definición, entonces está representada por una línea entera; en caso contrario, se representa por una línea de trazos.

definición de la función; las denominaciones de tales recintos son análogas a las dadas para las funciones de dos variables en las figs. 277 – 279. *Para una función de un número mayor de variables* se pueden introducir unas representaciones gráficas análogas en el espacio multidimensional.

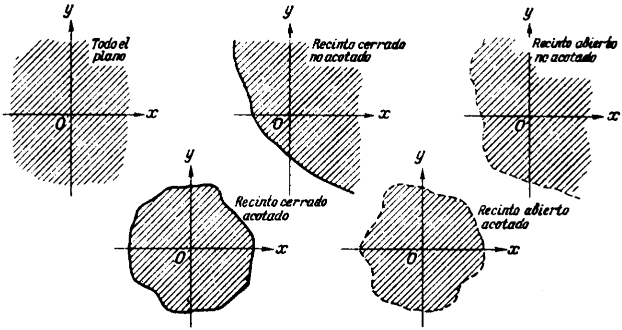



Fig. 277

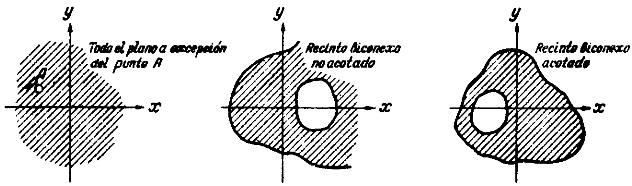



Fig. 278

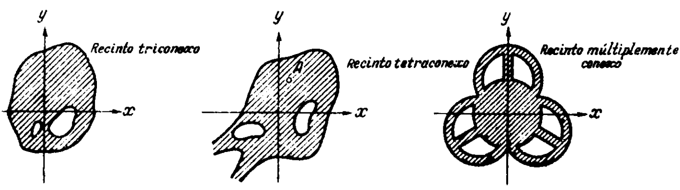



Fig. 279

MÉTODOS DE EXPRESIÓN DE UNA FUNCIÓN.

*Expresión tabular.* Una función de dos variables puede estar dada (o definida) por una tabla de valores (véase en la pág. 85 un ejemplo de tales tablas; las tablas de los valores de las integrales elípticas). En esta tabla los valores de los argumentos están colocados en su extremo superior e izquierdo y el valor de la función se encuentra en la intersección de la columna y fila correspondientes. La tabla de este tipo se llama *tabla con dos entradas.*

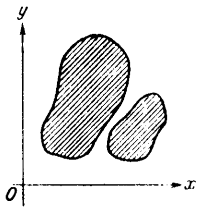


Fig. 280

*Expresión por fórmulas.* Una función de varias variables puede expresarse por una o varias fórmulas. Ejemplos:

$$1)\ u = xy^2; \quad 2)\ u = x \ln(y - zt);$$

$$3)\ u = \begin{cases} x+y & \text{para } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ x-y & \text{para } x \geqslant 0,\ y < 0, \\ -x+y & \text{para } x < 0,\ y \geqslant 0, \\ -x-y & \text{para } x < 0,\ y < 0 \end{cases}$$

(esta función se puede anotar también en la forma $u = |x|+|y|$).

CAMPO DE DETERMINACIÓN DE UNA EXPRESIÓN ANALÍTICA. *(Campo de existencia de una función).* En el análisis matemático se estudian en primer lugar las funciones definidas por **una** fórmula; en este caso, en el campo de definición de tal función se incluyen **todos** aquellos sistemas de valores de los argumentos para los cuales **tiene sentido** la expresión analítica dada, es decir, que ésta toma unos valores reales finitos determinados. Tal campo se llama *campo de determinación de la expresión analítica.* Generalmente, si no hay otras restricciones, se entiende por campo de definición (o de *existencia*) de una función, definida por una fórmula, precisamente el campo de determinación.

*Ejemplos:* 1) $u = x^2+y^2$, el campo de determinación son todos los valores de $x$ e $y$ (todo el plano). 2) $u = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$; el campo de determinación son los sistemas de valores de $x$ e $y$ que verifican la desigualdad $x^2+y^2 < 16$ (recinto abierto en el interior del círculo, fig. 281, *a*). 3) $u = \operatorname{arc\,sen}(x+y)$; el campo de determinación son los sistemas de valores de $x$ e $y$ que verifican las desigualdades $-1 \leqslant x+y \leqslant +1$ (recinto cerrado, la franja entre las rectas paralelas, fig. 281, *b*). 4) $u = \operatorname{arc\,sen}(2x-1)+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{y}+\ln z$; el campo de determinación son los sistemas de valores que verifican las desigualdades $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $z > 0$ (todos los puntos del espacio situados sobre el cuadrado de lado 1, fig. 281, *c*).

FORMAS FUNDAMENTALES DE EXPRESIÓN ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN

Las funciones de varias variables se expresan en *forma explícita* cuando se da su expresión mediante los argumentos: $u = f(x, y, z, \ldots, t)$; en *forma implícita*, cuando los argumentos y la función están relacionados por una ecuación $F(x, y, z, \ldots, t, u) = 0$; en *forma paramétrica*, cuando los $n$ argumentos y la función están expresados explícitamente mediante $n$ variables nuevas (parámetros):

$$x = \varphi(r, s), \quad y = \psi(r, s), \quad u = \chi(r, s)$$

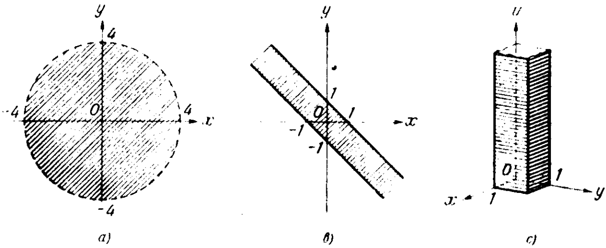



Fig. 281

(función de dos variables);

$$x = \varphi(r, s, t), \quad y = \psi(r, s, t), \quad z = \chi(r, s, t),$$

$u = \chi(r, s, t)$ (función de tres variables), etc.

*Funciones homogéneas* de varias variables son las funciones $f(x, y, z, \ldots, t)$ que verifican la condición

$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \ldots, t) = \lambda^n f(x, y, z, \ldots, t)$ ($\lambda$ – es un número arbitrario); el número $n$ se llama *grado de homogeneidad.* Por ejemplo:

$$u = x^2 - 3xy + y^2 + x\sqrt{xy + \frac{x^3}{y}} \quad (n = 2); \qquad u = \frac{x+z}{2x-3y} \quad (n = 0).$$

Para la función homogénea $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ se cumple el *teorema de Euler:*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + t\frac{\partial f}{\partial t} = n \cdot f(x, y, \ldots, t).$$

DEPENDENCIA DE LAS FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. Dos funciones uniformes de dos variables $u = f(x, y)$ y $v = \varphi(x, y)$ dadas en un recinto, se llaman *dependientes* una de otra, si una de ellas puede expresarse como función de la otra; $u = F(v)$; es decir, para todo punto del campo de definición se cumple la identidad

$$f(x, y) = F[\varphi(x, y)] \quad \text{ó} \quad \Phi(f, \varphi) = 0;$$

si tal función $F$ o $\Phi$ no existe, las funciones se llaman *independientes*. Por ejemplo, las funciones $u = (x^2+y^2)^2$ y $v = \sqrt{x^2+y^2}$, definidas en el recinto $x^2+y^2 \geqslant 0$, son dependientes ya que $u = v^4$.

Análogamente: $m$ funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dadas en un recinto común, se llama *dependientes*, si una de ellas (no importa cuál) puede expresarse como función de las restantes, es decir, si para todo punto del recinto se cumple la identidad

$$u_i = F(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n) \quad \text{ó} \quad \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0;$$

si tal función $F$ o $\Phi$ no existe, las funciones se llaman *independientes*. Por ejemplo, las tres funciones de $n$ variables

$$u = x_1+x_2+ \ldots +x_n, \qquad v = x_1^2+x_2^2+ \ldots +x_n^2,$$
$$w = x_1x_2+x_1x_3+ \ldots +x_1x_n+x_2x_3+ \ldots +x_{n-1}x_n,$$

definidas en el espacio $n$-dimensional, son dependientes ya que $v = u^2-2w$.

*Criterio analítico de independencia* de dos funciones $u = f(x, y)$ y $v = \varphi(x, y)$; su *jacobiano*, es decir, el determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad \text{designado por} \quad \frac{D(f, \varphi)}{D(x, y)} \quad \text{ó} \quad \frac{D(u, v)}{D(x, y)},$$

no debe anularse idénticamente en el recinto considerado. Este mismo criterio se generaliza para el caso de $n$ funciones **del mismo** número $n$ de variables $u_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \equiv \frac{D(f_1, f_2, \ldots f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

En el caso en que el número $m$ de las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_m$ es menor que el número de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, estas funciones son independientes si por lo menos uno de los determinantes de $m$-ésimo orden de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

es distinto de cero. El número de funciones independientes es igual al rango $\mu$ de la matriz indicada*. En este caso, serán independientes precisamente aquellas funciones cuyas derivadas son los elementos del determinante de $\mu$-ésimo orden que es distinto de cero.

Si $m > n$, entre las $m$ funciones dadas no pueden haber más de $n$ funciones independientes.

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES**. Una función de dos variables $u = f(x, y)$ tiene *el límite* $A$ para el sistema de valores $x = a$, $y = b$ [designación: $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$], si **para** una **aproximación arbitraria** de $x$ hacia $a$ y de $y$ hacia $b$, $f(x, y)$ se aproxima cuanto se quiera al número $A$. En el propio punto $P(a, b)$ (es decir, para el sistema de valores $x = a$, $y = b$) la función puede no tomar el valor $A$ ó, en general, puede no estar definida.

*Formulación exacta:* $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ si, dado un número positivo $\varepsilon$, arbitrariamente pequeño, se puede señalar un número positivo $\eta$ tal que para todos los valores de $x$ e $y$, tomados independientemente uno del otro en los intervalos $a-\eta < x < a+\eta$ y $b-\eta < y < b+\eta$ (fig. 282), los valores correspondientes de $f(x, y)$ se sitúan en el intervalo

$$A - \varepsilon < f(x, y) < A + \varepsilon.$$

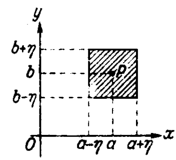



Fig. 282

Análogamente se da el concepto del límite de una función de un número mayor de variables $f(x, y, z, \ldots, t)$.

Los criterios de existencia de límite, considerados para la función de una variable (la reducción al límite de una sucesión, el criterio de Cauchy véase en la pág. 321, se extienden análogamente a las funciones de varias variables.

LÍMITES REITERADOS O SUCESIVOS. Si para una función de dos variables $f(x, y)$ se halla primero el $\lim\limits_{x \to a} f(x, y)$ (suponiendo $y$ constante) y luego se halla el límite de la expresión obtenida (la cual es una función de $y$), para $y \to b$, entonces el número encontrado $B = \lim\limits_{y \to b} [\lim\limits_{x \to a} f(x, y)]$ se llama *límite reiterado o sucesivo*. Cambiando el orden de los límites, obtenemos otro límite reiterado: $C = \lim\limits_{x \to a} [\lim\limits_{y \to b} f(x, y)]$.

* Véase en la pág. 170 el rango de la matriz.

** Aquí se consideran las funciones definidas en un recinto conexo (véanse las págs. 334-335).

En general $B \neq C$ (aunque ambos límites existan), por ejemplo, para la función $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$, cuando $x \to 0$, $y \to 0$ se tiene, $B = -1$, $C = +1$.

Si la función $f(x, y)$ tiene el límite $A = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$, entonces $B = C = A$. Pero de la igualdad de los límites reiterados $B = C$ no se deduce la existencia del límite $A$.

FUNCIONES CONTINUAS DE VARIAS VARIABLES.

*Definición.* Una función de dos variables $u = f(x, y)$ se llama *continua* para el sistema de valores $x = a$, $y = b$ [*en el punto* $P(a, b)$] si: 1) $P(a, b)$ pertenece al campo de definición de la función, 2) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ existe y es igual a $f(a, b)$; en caso contrario, la función es *discontinua* para $x = a$, $y = b$. Si la función está dada y es continua en todos los puntos de un recinto conexo, entonces se llama *continua en este recinto*.

De forma análoga se define la continuidad de una función de varias variables.

*La continuidad uniforme* de una función de varias variables en recinto conexo se define del mismo modo que para la función de una variable (pág. 333). Por ejemplo, una función de dos variables $f(x, y)$ es *uniformemente continua* en un recinto conexo dado, si para todo número positivo $\varepsilon$ se puede señalar un número positivo $\eta$ tal, que para dos puntos **cualesquiera** $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ que verifican la condición $|x_1 - x_2| < \eta$, $|y_1 - y_2| < \eta$, la diferencia de los valores correspondientes de la función es en valor absoluto menor que $\varepsilon$:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Una función continua en un recinto dado no siempre es uniformemente continua en el mismo.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS DE VARIAS VARIABLES

1) *El paso por el cero* (teorema de Cauchy). Si una función $f(x, y)$ está dada y es continua en un recinto conexo, y en dos puntos de este recinto $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ tiene signos distintos, entonces en esta región existe por lo menos un punto $P_3(x_3, y_3)$ tal que $f(x, y)$ se anula en el mismo:

$$f(x_3, y_3) = 0 \quad \text{si} \quad f(x_1, y_1) > 0 \quad \text{y} \quad f(x_2, y_2) < 0.$$

2) *Teorema del valor intermedio.* Si una función $f(x, y)$ está dada y es continua en un recinto conexo, y en dos puntos de este recinto $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ toma valores distintos $A$ y $B$, $f(x_1, y_1) = A$, $f(x_2, y_2) = B$,

entonces, cualquiera que sea el número $C$ **entre** $A$ y $B$, en la región considerada existe por lo menos un punto $P_3(x_3, y_3)$ tal que

$$f(x_3, y_3) = C \ (A < C < B \text{ ó } B < C < A).$$

3) *Teorema de la acotación de la función.* Si una función $f(x, y)$ es continua en un dominio* **acotado** entonces está *acotada* en este dominio; existen dos números $m$ y $M$ tales, que para todo punto $P(x, y)$ perteneciente al dominio,

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

4) *La existencia de los valores máximo y mínimo.* Si una función $f(x, y)$ es continua en un **dominio** acotado, entonces existe en este dominio por lo menos un punto $P'(x', y')$ tal, que el valor $f(x', y')$ es **el máximo** entre todos los valores $f(x, y)$ que toma la función en este dominio, y existe por lo menos un punto $P''(x'', y'')$ tal, que el valor $f(x'', y'')$ es **el mínimo** entre todos los valores $f(x, y)$ que toma la función en este dominio:

$$f(x', y') \geqslant f(x, y) \geqslant f(x'', y'')$$

para todo punto $P(x, y)$ perteneciente al dominio.

5) Una función continua en un **dominio** acotado es uniformemente continua en este dominio**.

## 8. *Series numéricas*

DEFINICIONES. Una expresión del tipo

$$a_1 + a_2 + \ \dots \ + a_n + \ \dots,$$

en que los números $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ forman una sucesión infinita (véase pág. 309), se llama *serie numérica;* las sumas $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \dots$, $S_n = a_1 + a_2 + \ \dots \ + a_n$, se llaman *sumas parciales* de la serie y el término $a_n$, *término general* de la serie. Si la sucesión de las sumas parciales $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ tiene límite (cuando $n \to \infty$) $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, entonces la serie se lama *convergente* y el número $S$ se llama *suma de la serie* (la designación es: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$), si no existe el límite, la serie se llama *divergente;* en el último caso, $S_n$ puede crecer indefinidamente ( $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$) o ser oscilante.

---

* Un recinto cerrado se llama abreviadamente dominio. *(Nota de la Edit.)*

** Véase la pág. 340.

De esta manera, el criterio necesario y suficiente para la convergencia de una serie se reduce al criterio de existencia del límite de la sucesión $S_1, S_2, \ldots, S_n$ (véase la pág. 312).

*Ejemplos:* La serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \ldots\ +\frac{1}{2^n}+\ \ldots \qquad (1)$$

es convergente (progresión geométrica).

Las series

$$1+1+1+\ \ldots\ +1+\ \ldots \qquad (2)$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \ldots\ +\frac{1}{n}+\ \ldots \quad \textit{(la serie armónica)} \qquad (3)$$

$$1-1+1-\ \ldots\ +(-1)^{n-1}+\ \ldots \qquad (4)$$

son divergentes. Para las series (2) y (3), $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, la serie (4) es oscilante.

Se llama *resto* de la serie convergente $a_1+a_2+\ \ldots\ +a_n+\ \ldots$ a la diferencia entre su suma $S$ y la suma parcial $S_n$, y se designa por $R_n$:

$$R_n = S-S_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\ \ldots\ +a_{n+m}+\ \ldots$$

TEOREMAS FUNDAMENTALES SOBRE LA CONVERGENCIA DE LAS SERIES.

1) Al suprimir un número finito de términos iniciales de una serie o al agregar en su comienzo algunos nuevos términos, el carácter del comportamiento de la serie (la convergencia o divergencia) no se altera.

2) Al multiplicar los términos de una serie convergente por un mismo factor $c$, su convergencia no varía (y su suma queda multiplicada por $c$).

3) Las series convergentes se pueden sumar o restar término a término; de la convergencia de las series $a_1+a_2+\ \ldots\ +a_n+\ \ldots$ con la suma $S$ y $b_1+b_2+\ \ldots\ +b_n+\ \ldots$, con la suma $\Sigma$, se deduce que la serie $(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\ \ldots\ +(a_n\pm b_n)+\ \ldots$ es convergente y su suma es igual a $S\pm\Sigma$.

CRITERIO NECESARIO PARA LA CONVERGENCIA DE UNA SERIE: el término general de la serie debe tender a cero cuando $n\to\infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Este criterio *no es suficiente:* por ejemplo, en la serie armónica (3)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \text{no obstante,} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

PRINCIPIO DE COMPARACIÓN DE LAS SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS. Si las series

$$a_1+a_2+\ \ldots\ +a_n+\ \ldots \qquad (A)$$

y

$$b_1+b_2+\ \ldots\ +b_n+\ \ldots \qquad (B)$$

tienen términos positivos y a partir de un cierto $n$ en adelante, $a_n \geqslant b_n$, entonces de la convergencia de la serie (A) se deduce la convergencia de la serie (B) y de la divergencia de la serie (B) se deduce la divergencia de la serie (A).

*Ejemplos:* La serie

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ \dots\ +\frac{1}{n^n}+\ \dots \tag{5}$$

es convergente, pues a partir de $n = 2$ los términos de la serie (5) son menores que los de la serie (1): $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n \geqslant 2)$, y la serie (1) es convergente.

La serie

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ \dots\ +\frac{1}{\sqrt{n}}+\ \dots \tag{6}$$

es divergente, pues comenzando desde $n > 1$ en adelante, los términos de la serie (6) son mayores que los de la serie (3): $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ $(n > 1)$, y la serie (3) es divergente.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE LAS SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS.

*Criterio de D'Alembert.* Si para la serie $a_1+a_2+\ \dots\ +a_n+\ \dots$ todas las razones $\frac{a_n+1}{a_n}$ a partir de un cierto valor, son menores que un cierto número $q < 1$, entonces la serie es convergente; si todas estas razones, a partir de un cierto valor, son mayores que un cierto número $Q > 1$, entonces la serie es divergente.

*Corolario.* Sea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = \rho$, entonces la serie es convergente si $\rho < 1$ y es divergente si $\rho > 1$. Si $\rho = 1$ el criterio no tiene aplicación, pues la serie puede ser convergente o divergente.

*Ejemplos:* 1) Para la serie $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ \dots\ +\frac{n}{2^n}+\ \dots$ (7)

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2};$$ la serie (7) es convergente;

2) para la serie $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\ \dots\ +\frac{n+1}{n^2}+\ \dots$ (8)

$\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{(n+1)^2} : \frac{n+1}{n^2}\right) = 1$, el criterio no es aplicable.

*Criterio de Cauchy.* Si para la serie $a_1+a_2+\ \dots\ +a_n+\ \dots$ todos los números $\sqrt[n]{a_n}$, a partir de un cierto valor, son menores que un número dado $q < 1$, entonces la serie es convergente; si todos estos números, a partir de un cierto valor, son mayores que un número $Q > 1$, entonces la serie es divergente.

*Corolario.* Sea $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$, entonces la serie es convergente si $\rho < 1$ y es divergente si $\rho > 1$; si $\rho = 1$ el criterio no tiene aplicación. Por ejemplo, para la serie

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^9+\ \dots\ +\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}+\ \dots \tag{9}$$

$\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$; la serie (9) es convergente.

*Criterio integral* (de Cauchy). Una serie con el término general $a_n = f(n)$, es convergente si $f(x)$ es una función monótona decreciente y la integral impropia $\int\limits_c^\infty f(x)\,dx$ (véase pág. 455) es convergente; con el término general $f(x)$ la serie es divergente si esta integral es divergente. En estos casos, el límite inferior $c$ se toma arbitrariamente de tal modo que la función $f(x)$ esté definida y no tenga discontinuidades para $c < x < \infty$. Por ejemplo, para la serie (8) se tiene

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}, \quad \int\limits_c^\infty \frac{x+1}{x^2}\,dx = \left[\ln x - \frac{1}{x}\right]_c^\infty = \infty;$$

la integral es divergente y, por consiguiente, la serie (8) es divergente.

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONVERGENCIA CONDICIONAL. Simultáneamente con la serie

$$a_1+a_2+\ \dots\ +a_n+\ \dots, \tag{A}$$

cuyos términos tienen signos desiguales (serie de términos positivos y negativos), es conveniente considerar la serie

$$|a_1|+|a_2|+\ \dots\ +|a_n|+\ \dots, \tag{B}$$

formada de los valores absolutos de los términos de la serie (A). Si la serie (B) es convergente, entonces la serie (A) también es convergente; en este caso la serie (A) se llama *absolutamente convergente*. Si la serie (B) es divergente, entonces la serie (A) puede ser divergente o convergente: en el último caso se llama *condicionalmente convergente*. Por ejemplo, la serie

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{2}+\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2^2}+\ \dots\ +\frac{\operatorname{sen}n\alpha}{2^n}+\ \dots, \tag{10}$$

donde $\alpha$ es un número constante arbitrario, es absolutamente convergente, ya que la serie con el término general $\left|\frac{\operatorname{sen}n\alpha}{2^n}\right|$ es convergente

$\left[\text{esto resulta evidente al compararla con la serie (1): } \left|\frac{\operatorname{sen} n\alpha}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}\right]$. La serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ \ldots \ + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ \ldots \tag{11}$$

es convergente (véase más adelante el teorema de Leibniz), pero condicionalmente, pues la serie (3) con el término general $|a_n| = \frac{1}{n}$ es divergente.

PROPIEDADES DE LAS SERIES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES.

1) En una serie absolutamente convergente los términos se pueden reordenar por cualquier procedimiento, con lo cual la suma de la serie no varía. Reordenando los términos de una serie condicionalmente convergente (de modo que quede reordenado un conjunto infinito de términos de la serie) se puede hacer variar su suma, o hacerla igual a un número **arbitrario** *(teorema de Riemann)* o inclusive hacer la serie divergente.

2) Las series absolutamente convergentes no sólo se pueden sumar y restar término a término (véase la pág. 342), sino que también se pueden **multiplicar** como los polinomios ordinarios, expresando el resultado en forma de serie, por ejemplo, de la siguiente manera:

$$(a_1 + a_2 + \ \ldots \ + a_n + \ \ldots)(b_1 + b_2 + \ \ldots \ + b_n + \ldots) =$$
$$= \underbrace{a_1b_1} + \underbrace{a_2b_1 + a_1b_2} + \underbrace{a_3b_1 + a_2b_2 + a_1b_3} + \ \ldots \ +$$
$$+ \underbrace{a_nb_1 + a_{n-1}b_2 + \ \ldots \ + a_1b_n} + \ \ldots$$

Si $\Sigma a_n = S_a$ y $\Sigma b_n = S_b$, entonces la suma de la serie obtenida como resultado de la multiplicación es igual a $S_aS_b$*.

SERIES ALTERNADAS. Para la convergencia de la serie $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots \pm a_n \mp \ldots$, donde $a_n$ son números positivos, es suficiente que se cumplan las dos condiciones:

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{y} \quad 2) \quad a_1 > a_2 > a_3 > \ \ldots \ > a_n > \ \ldots$$

*(teorema de Leibniz)*. Por ejemplo, la serie (11) es convergente.

*Acotación del resto de una serie alternada.* Si en una serie alternada convergente nos limitamos con los $n$ primeros términos, entonces el resto $R_n = S - S_n$ tiene el signo del primer término despreciado y es en

* Si las series $a_1 + a_2 + \ \ldots \ + a_n + \ \ldots$ y $b_1 + b_2 + \ \ldots \ + b_n + \ \ldots$ son convergentes y por lo menos una de ellas es absolutamente convergente, entonces la serie obtenida como resultado de su multiplicación es convergente, pero su convergencia no es necesariamente absoluta.

valor absoluto menor que él: $|S-S_n| < |a_{n+1}|$. Así, en la serie

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ \pm\frac{1}{n}\mp\ \dots,$$

cuya suma es igual a $\ln 2$, el resto es $|\ln 2-S_n| < \frac{1}{n+1}$.

TABLA DE SUMAS DE ALGUNAS SERIES NUMÉRICAS:

1) $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ \dots\ +\frac{1}{n!}+\ \dots = e.$

2) $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ \dots\ \pm\frac{1}{n!}\mp\ \dots = \frac{1}{e},$

3) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \dots\ \pm\frac{1}{n}\mp\ \dots = \ln 2,$

4) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ \dots\ +\frac{1}{2^n}+\ \dots = 2,$

5) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ \dots\ \pm\frac{1}{2^n}\mp\ \dots = \frac{2}{3},$

6) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ \dots\ \pm\frac{1}{2n-1}\mp\ \dots = \frac{\pi}{4},$

7) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}+\ \dots = 1,$

8) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ \dots = \frac{1}{2},$

9) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ \dots\ +\frac{1}{(n-1)(n+1)}+\ \dots = \frac{3}{4},$

10) $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 9}+\frac{1}{11\cdot 13}+\ \dots\ +\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\ \dots = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{8},$

11) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ \dots = \frac{1}{4},$

12) $\frac{1}{1\cdot 2\ \dots\ l}+\frac{1}{2\cdot 3\ \dots (l+1)}+\ \dots\ +\frac{1}{n\ \dots\ (n+l-1)}+\ \dots = \frac{1}{(l-1)(l-1)!},$

13) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ \dots\ +\frac{1}{n^2}+\ \dots = \frac{\pi^2}{6},$

14) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ \dots\ \pm\frac{1}{n^2}\mp\ \dots = \frac{\pi^2}{12},$

15) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n+1)^2}+\ \dots = \frac{\pi^2}{8},$

16) $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ \dots\ +\frac{1}{n^4}+\ \dots = \frac{\pi^4}{90},$

17) $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\ \dots\ \pm\frac{1}{n^4}\mp\ \dots = \frac{7\pi^4}{720},$

18) $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ \dots\ +\frac{1}{(2n+1)^4}+\ \dots = \frac{\pi^4}{96}.$

*Los números de Bernoulli $B_k$:*

19) $1+\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{4^{2k}}+\ldots+\frac{1}{n^{2k}}+\ldots=\frac{\pi^{2k}2^{2k-1}}{(2k)!}B_k,$

20) $1-\frac{1}{2^{2k}}+\frac{1}{3^{2k}}-\frac{1}{4^{2k}}+\ldots\pm\frac{1}{n^{2k}}\mp\ldots=\frac{\pi^{2k}(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k,$

21) $1+\frac{1}{3^{2k}}+\frac{1}{5^{2k}}+\frac{1}{7^{2k}}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^{2k}}+\ldots=\frac{\pi^{2k}(2^{2k}-1)}{2\cdot(2k)!}B_k.$

*Tabla de los primeros números de Bernoulli*

| $k$ | $B_k$ | $k$ | $B_k$ | $k$ | $B_k$ | $k$ | $B_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{6}$ | 4 | $\frac{1}{30}$ | 7 | $\frac{7}{6}$ | 10 | $\frac{174\,611}{330}$ |
| 2 | $\frac{1}{30}$ | 5 | $\frac{5}{66}$ | 8 | $\frac{3617}{510}$ | 11 | $\frac{854\,513}{138}$ |
| 3 | $\frac{1}{42}$ | 6 | $\frac{691}{2730}$ | 9 | $\frac{43\,867}{798}$ | | |

*Los números de Euler $E_k$:*

22) $1-\frac{1}{3^{2k+1}}+\frac{1}{5^{2k+1}}-\frac{1}{7^{2k+1}}+\ldots\pm\frac{1}{(2n-1)^{2k+1}}\mp\ldots=\frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!}E_k.$

*Tabla de los primeros números de Euler*

| $k$ | $E_k$ | $k$ | $E_k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 5 | 50 521 |
| 2 | 5 | 6 | 2 702 765 |
| 3 | 61 | 7 | 199 360 981 |
| 4 | 1385 | | |

Algunos autores emplean otras notaciones para los números de Bernoulli y Euler:

$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},$$
$$B_7=0,\ B_8=-\frac{1}{30},\ \text{etc.}$$
$$E_1=0,\ E_2=-1,\ E_3=0,\ E_4=5,\ E_5=0,\ E_6=-61,\ E_7=0,$$
$$E_8=1385,\ \text{etc.}$$

## 9. *Series de funciones*

DEFINICIONES. Una serie formada por funciones de una misma variable $x$:

$$f_1(x)+f_2(x)+\ \dots\ +f_n(x)+\ \dots\ =\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{1}$$

se llama *serie de funciones.* Todos aquellos valores $x=a$, que están contenidos en el campo de definición de **todas** las funciones $f_n(x)$ y para los cuales las series numéricas

$$f_1(a)+f_2(a)+\ \dots\ +f_n(a)+\ \dots$$

son convergentes [es decir, para los cuales existe el límite de las sumas parciales $S_n(a)$: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(a)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(a)=S(a)$], forman *el campo de convergencia* de la serie de funciones (1). La función $S(x)$ se llama *suma de la serie* (1), [la serie (1) "converge hacia la función $S(x)$"]. La suma de los $n$ primeros términos de la serie (1) se llama *suma parcial:* $S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ \dots\ +f_n(x)$. La diferencia entre la suma $S(x)$ de una serie de funciones convergente y su suma parcial $S_n(x)$ se llama *resto* de la serie (1); éste se designa por $R_n(x)$:

$$R_n(x)=S(x)-S_n(x)=f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ \dots\ +f_{n+m}(x)+\ \dots$$

CONVERGENCIA UNIFORME Y NO UNIFORME DE UNA SERIE. Según la definición del límite de la sucesión numérica (pág. 310), la serie (1) *converge* en un recinto dado, si para un número arbitrariamente pequeño $\varepsilon>0$ se puede señalar un número entero $N$ tal, que $|S(x)-S_n(x)|<\varepsilon$ para $n>N$. Para las series de funciones pueden presentarse dos casos:

1) Se puede hallar un número $N$, **general** para todos los valores de $x$ pertenecientes al campo de convergencia de la serie; en este caso, la serie (1) se llama *uniformemente convergente* en el recinto dado. 2) No existe tal número general para todos los $x$ que están situados en el campo de convergencia: para un número cualquiera $n$ siempre existe en el campo de convergencia un número $x$ tal, que $|S(x)-S_n(x)|>\varepsilon$. En este caso, *la convergencia* de la serie (1) en el recinto dado no *es uniforme.*

*Ejemplos:* 1) La serie

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ \dots\ +\frac{x^n}{n!}+\ \dots \tag{$*$}$$

es convergente para todos los valores de $x$; su suma es igual a $e^x$ (véase pág. 381). Esta convergencia es uniforme para todo recinto **finito** de determinación del valor $x$. En efecto, para $|x| < a$ se tiene que $|S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{0x}\right|^{*} < \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$; pero $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a$ para $n$ suficientemente grande (independiente de $x$), se puede hacer menor que $\varepsilon$, puesto que $(n+1)!$ crece más rápidamente que $a^{n+1}$. Esta serie no es uniformemente convergente en **todo** el eje numérico: cualquiera que sea el número $n$ dado, se puede encontrar un $x$ tal que $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{0x}\right|$ será mayor que cualquier $\varepsilon$ prefijado.

2) La serie

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots + x(1-x)^n + \ldots \qquad (**)$$

converge para todos los valores de $x$ en el intervalo cerrado $[0, 1]$ ya que, según el criterio de D'Alembert (el corolario de la pág. 343), $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |1-x| < 1$ para $0 < x \leqslant 1$ (y para $x = 0$ $S = 0$). Pero esta convergencia no es uniforme:

$$S(x) - S_n(x) = x\,[(1-x)^{n+1} + (1-x)^{n+2} + \ldots] = (1-x)^{n+1},$$

y para todo $n$ siempre existe un $x$ tan pequeño que $(1-x)^{n+1}$ estará arbitrariamente próximo a 1, es decir, no será menor que $\varepsilon$. En el intervalo cerrado $a \leqslant x \leqslant 1$ (donde $0 < a < 1$) la serie es uniformemente convergente.

*Criterio* (de Weierstrass) *de convergencia uniforme de las series.* La serie

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

es uniformemente convergente en un recinto dado, si existe una serie numérica convergente

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \qquad (2$$

tal que para todos los valores de $x$ pertenecientes a esta región se cumple la desigualdad

$$|f_n(x)| \leqslant c_n$$

En este caso, la serie (2) se llama *mayorante* de la serie (1).

*Ejemplo*: Las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx$ son uniformemente convergentes en cualquier recinto, si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, puesto que $|a_n \cos nx| \leqslant |a_n|$ y $|a_n \operatorname{sen} nx| \leqslant |a_n|$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

---

* Según la fórmula del resto de la serie de Mac-Laurin, véase en la pág. 378.

*Propiedades de las series uniformemente convergentes:*

1) Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ son funciones continuas en el campo de su definición y la serie $f_1(x)+f_2(x)+ \ldots +f_n(x)+ \ldots$ es uniformemente convergente en el mismo, entonces su suma $S(x)$ es también una función continua en este campo. Así mismo, si la serie no es uniformemente convergente en un recinto **finito**, entonces su suma $S(x)$ puede ser discontinua en este recinto [en el ejemplo anteriormente estudiado (* *) la suma de la serie es discontinua: $S(x)$ es igual a cero para $x = 0$ y es igual a 1 para $x > 0$; en el ejemplo (*) la función $e^x$ es continua: la serie no es uniformemente convergente en todo el eje numérico, pero no en un recinto finito.

2) Una serie uniformemente convergente se puede integrar término a término en la región dada y la suma de las integrales de los términos de la serie es igual a la integral de la suma de la serie dada.

SERIES DE POTENCIAS son las series de funciones de la forma

$$a_0+a_1x+a_2x^2+ \ldots +a_nx^n+ \ldots \tag{A}$$

o de la forma

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+ \ldots +a_n(x-a)^n+ \ldots, \tag{B}$$

donde $a_i$ son coeficientes constantes.

*Propiedades fundamentales de las series de potencias.*

1) La serie (A) es absolutamente convergente para todos los valores de $x$ que son menores en valor absoluto a un cierto número $\rho$ ($|x| < \rho$), llamado *radio de convergencia* de la serie de potencias. La serie (B) es absolutamente convergente para todos los valores de $x$ que verifican la desigualdad $|x-a| < \rho$($\rho$ es el radio de convergencia). El radio de convergencia puede determinarse por las fórmulas

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n+1|}{|a_n|}, \qquad \frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\ ^*$$

En las fronteras del campo de convergencia [para $x = +\rho$ y para $x = -\rho$ en la serie (A); para $x = a+\rho$ y $x = a-\rho$ en la serie (B)] la serie puede ser convergente o divergente.

2) Si la serie (A) es convergente para el valor positivo $x = x_1$, entonces es **uniformemente** convergente en el interior del intervalo $(-x_1+\varepsilon, x_1)$ *(teorema de Abel).*

---

* Cuando estos límites no existen, en las fórmulas indicadas en lugar del límite se toma el *límite superior* ($\overline{\lim}$).

*Ejemplo*: para la serie $1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ \dots\ +\frac{x^n}{n}+\ \dots\ \frac{1}{\rho}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$ $=1$, es decir $\rho=1$, y para $-1<x<+1$ la serie es absolutamente convergente, además, para $x=-1$ la serie es condicionalmente convergente [véase en la pág. 345 la serie (11)] y para $x=1$ la serie es divergente [véase en la pág. 342 la serie (3)]. Según el teorema de Abel, esta serie es uniformemente convergente en el intervalo cerrado $[-x_1, +x_1]$, donde $x_1$ es un número cualquiera comprendido entre 0 y 1.

*Tabla de los primeros términos de algunas potencias de una serie de potencias.*

$$S = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5+\ \dots,$$

$$S^2 = a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+2(ad+bc)x^3+(c^2+2ae+ \\ +2bd)x^4+2(af+be+cd)x^5+\ \dots,$$

$$\sqrt{S} = S^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,x+\left(\frac{1}{2}\,\frac{c}{a}-\frac{1}{8}\,\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+\right. \\ +\left(\frac{1}{2}\,\frac{d}{a}-\frac{1}{4}\,\frac{bc}{a^2}+\frac{1}{16}\,\frac{b^3}{a^3}\right)x^3+ \\ \left.+\left(\frac{1}{2}\,\frac{e}{a}-\frac{1}{4}\,\frac{bd}{a^2}-\frac{1}{8}\,\frac{c^2}{a^2}+\frac{3}{16}\,\frac{b^2c}{a^3}-\frac{5}{128}\,\frac{b^4}{a^4}\right)x^4+\ \dots\right],$$

$$\frac{1}{\sqrt{S}} = S^{-\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{2}}\left[1-\frac{1}{2}\,\frac{b}{a}\,x+\left(\frac{3}{8}\,\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{2}\,\frac{c}{a}\right)x^2+\right. \\ +\left(\frac{3}{4}\,\frac{bc}{a^2}-\frac{1}{2}\,\frac{d}{a}-\frac{5}{16}\,\frac{b^3}{a^3}\right)x^3+ \\ \left.+\left(\frac{3}{4}\,\frac{bd}{a^2}+\frac{3}{8}\,\frac{c^2}{a^2}-\frac{1}{2}\,\frac{e}{a}-\frac{15}{16}\,\frac{b^2c}{a^3}+\frac{35}{128}\,\frac{b^4}{a^4}\right)x^4+\ \dots\right],$$

$$\frac{1}{S} = S^{-1} = a^{-1}\left[1-\frac{b}{a}\,x+\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right)x^2+\left(\frac{2bc}{a^2}-\frac{d}{a}-\frac{b^3}{a^3}\right)x^3+\right. \\ \left.+\left(\frac{2bd}{a^2}-\frac{c^2}{a^2}-\frac{e}{a}-3\,\frac{b^2c}{a^3}+\frac{b^4}{a^4}\right)x^4+\ \dots\right],$$

$$\frac{1}{S^2} = S^{-2} = a^{-2}\left[1-2\,\frac{b}{a}\,x+\left(3\,\frac{b^2}{a^2}-2\,\frac{c}{a}\right)x^2+\left(6\frac{bc}{a^2}-2\,\frac{d}{a}-4\,\frac{b^3}{a^3}\right)x^3+\right. \\ \left.+\left(6\,\frac{bd}{a^2}+3\,\frac{c^2}{a^2}-2\,\frac{e}{a}-12\,\frac{b^2c}{a^3}+5\,\frac{b^4}{a^4}\right)x^4+\ \dots\right].$$

*Inversión de una serie de potencias.* Dada la serie

$$y=f(x)=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6+\ \dots(a\neq 0),$$

el desarrollo en serie de la función inversa

$$x=\varphi(y)=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+Ey^5+Fy^6+\ \dots$$

tiene los siguientes coeficientes:

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = -\frac{b}{a^3}, \quad C = \frac{1}{a^5}(2b^2 - ac), \quad D = \frac{1}{a^7}(5abc - a^2d - 5b^3),$$

$$E = \frac{1}{a^9}(6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c),$$

$$F = \frac{1}{a^{11}}(7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 - 42b^5).$$

*Sobre el desarrollo de las funciones en series*, de potencias véase en la pág. 377, en series trigonométricas, véase en la pág. 632.

# II. CÁLCULO DIFERENCIAL

## 1. Conceptos fundamentales

La derivada de una función de una variable* $y = f(x)$ es una nueva función de $x$ $\left[\text{notaciones: } y',\ \dot{y},\ Dy,\ \frac{dy}{dx},\ f'(x),\ Df(x),\ \frac{df(x)}{dx}\right]$ que para cada valor de $x$ es igual al límite de la razón entre el incremento de la función $\Delta y$ y el incremento correspondiente del argumento $\Delta x$, cuando $\Delta x$ tiende a cero:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

*Interpretación geométrica de la derivada.* Si $y = f(x)$ está representada por su gráfica, o sea, por una curva en coordenadas cartesianas (fig. 283), entonces $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, donde $\alpha$ es el ángulo formado por el eje $Ox$ y la tangente a la curva en su punto dado; el ángulo se considera desde la dirección positiva del eje $Ox$ en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj**.

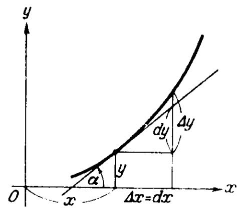


Fig. 283

*Existencia de la derivada.* La derivada existe para aquellos valores del argumento $x$, en los que 1) la función $y = f(x)$ está dada y es continua y 2) la razón indicada tiene límite finito (1). La no existencia de la derivada para un valor dado $x_1$ indica que en el punto correspondiente de la gráfica de la función no existe una tangente determinada o esta

* En este capítulo sólo se estudian funciones uniformes.

** La fórmula $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ es válida sólo si en los ejes $Ox$ y $Oy$ se han tomado unidades de escala iguales.

tangente forma con el eje $Ox$ un ángulo de 90°. En el último caso el límite (1) es infinito; esto se denota así: $f'(x_1) = \infty$ ("la derivada es infinita").

*Ejemplos* de no existencia de derivada en un punto dado:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(0) = \infty$ en el punto 0 la derivada es infinita (fig. 284, *a*); 2) $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, límite (1) no existe para $x = 0$

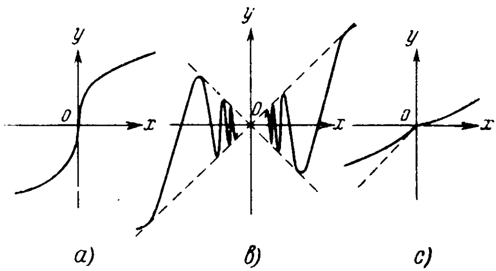


Fig. 284

(fig. 284, *b*); 3) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, límite (1) no existe para $x = 0$, pero existe el límite a la izquierda $f'(-0) = 1$ y el límite a la derecha $f'(+0) = 0$; en este caso la curva tiene un punto anguloso (fig. 284, *c*).

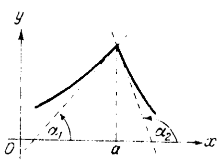


Fig. 285

*Derivada a la izquierda y a la derecha.* Si para un valor dado $x = a$ no existe el límite (1), pero existen los límites a la izquierda y a la derecha (como en el ejemplo 3, fig. 284, *c*) entonces éstos se llaman *derivada a la izquierda y derivada a la derecha* respectivamente. La interpretación geométrica de tales derivadas es: $f'(a-0) = \operatorname{tg} \alpha_1$, $f'(a+0) = \operatorname{tg} \alpha_2$ (fig. 285); la curva tiene un punto anguloso.

*Las funciones elementales* tienen derivada en todo su campo de existencia, a excepción de puntos aislados, en los que pueden presentarse los casos de tipos indicados (fig. 284 *a*, *b*, *c*).

DERIVADA PARCIAL DE UNA FUNCIÓN de varias variables $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ con respecto a una de ellas, por ejemplo, con respecto a $x$

[notaciones $\frac{\partial u}{\partial x}$, $u'_x$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_x$], se define por la igualdad

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z, \ldots, t) - f(x, y, z, \ldots, t)}{\Delta x};$$

en este caso sólo una de las variables independientes obtiene incremento. Una función de $n$ variables tiene $n$ derivadas parciales de primer orden: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\ldots$, $\frac{\partial u}{\partial t}$. La derivada parcial se halla según las reglas de derivación de la función de una variable (véanse las págs. 358-361); en el caso dado las variables restantes se consideran como constantes. Por ejemplo,

$$u = \frac{x^2 y}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2xy}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^2 y}{z^2}.$$

*Interpretación geométrica de la derivada parcial de una función de dos variables.* Si la función $u = f(x, y)$ está representada por una superficie en coordenadas cartesianas, entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, donde $\alpha$ es el ángulo entre la dirección positiva del eje $Ox$ y la tangente a la sección de la superficie en su punto dado que es paralela al plano $xOu$ ($\alpha$ se considera desde el eje $Ox$ en la dirección positiva, o sea, en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, al mirar desde el lado positivo del eje $Oy$). Análogamente, $\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$ ($\beta$ se considera en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj; fig. 286; en este dibujo ambos ángulos $\alpha$ y $\beta$ son positivos).

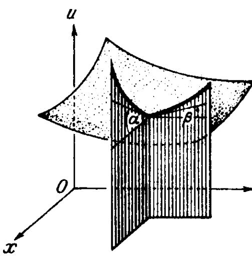


Fig. 286

LA DERIVADA EN UNA DIRECCIÓN DADA Y LA DERIVADA DE VOLUMEN, véanse en la teoría de campo (pág. 615 y pág. 623).

LAS DIFERENCIALES de las variables $x$, $y$, etc. (de denotan: $dx$, $dy$, etc.) se definen de diferente manera, según que la variable sea independiente o una función. *La diferencial de la variable independiente* $x$, es el incremento, al cual se le puede asignar un valor arbitrario ($dx = \Delta x$). *La diferencial de la función* $y = f(x)$ *de una variable* $x$, para un valor dado $x$ y para una diferencial dada del argumento $dx$, es el producto de $f'(x)$ por $dx$:

$$dy = f'(x)\, dx.$$

*Interpretación geométrica de la diferencial.* Si la función está representada gráficamente en coordenadas cartesianas, entonces $dy$ representa el incremento que recibe la ordenada de la tangente a la curva en el punto dado $x$, para el incremento dado $dx$ (véase fig. 283 de la pág. 353).

*Propiedades fundamentales de la diferencial.* 1) *Invariancia:* la igualdad $dy = f'(x)\,dx$ sigue siendo válida, sea $x$ variable independiente o función de una nueva variable $t$. 2) *Orden infinitesimal:* si $dx$ es un infinitésimo, entonces $dy$ y $\Delta y$ son infinitésimos equivalentes $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1\right)$ y la diferencia entre ellos es un infinitésimo de orden superior a $dx$, $dy$, $\Delta y$. Esta propiedad permite reemplazar las funciones por sus diferenciales, en el cálculo de incrementos infinitesimales; esto se aplica tanto en los cálculos de aproximaciones (pág. 128) como en el cálculo diferencial e integral.

LA DIFERENCIAL PARCIAL de una función de varias variables $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ con respecto a una de las variables, por ejemplo con respecto a $x$ [se designa $d_x u$ ó $d_x f$], se define por la igualdad

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx.$$

FUNCIÓN DIFERENCIABLE Y DIFERENCIAL TOTAL. Una función de varias variables $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ se llama *diferenciable* en el punto $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ si al pasar a un punto infinitamente próximo $M(x_0+dx, y_0+dy, \ldots, t_0+dt)$ (donde $dx, dy, \ldots, dt$ son infinitésimos) *el incremento total* de la función $\Delta u = f(x_0+dx, y_0+dy, \ldots, t_0+dt) - f(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ se diferencia de la suma de sus diferenciales parciales con respecto a todas las variables

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\,dt\right)_{x_0, y_0, \ldots, t_0} \qquad (*)$$

en un infinitésimo de orden mayor que la distancia

$$M_0 M = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \ldots + dt^2}.$$

Si $u$ es una función diferenciable, entonces la suma $(*)$ se llama *diferencial total* y se designa por $du$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\,dt\,^{*}. \qquad (**)$$

Toda función continua de varias variables que tiene derivadas parciales continuas con respecto a todas las variables es diferenciable. Sin embargo, sólo de la existencia de las derivadas parciales de la función con respecto a todas las variables no se deduce su diferencia bilidad.

---

* La diferencial total en forma vectorial véase en la teoría de campo en la pág. 616.

*Interpretación geométrica* de la diferencial total de una función de dos variables $u = f(x, y)$ representada por una superficie en coordenadas cartesianas (fig. 287): $du$ es el incremento de la cota del plano tangente en el punto dado, si $x$ e $y$ obtuvieron los incrementos $dx$ y $dy$, respectivamente.

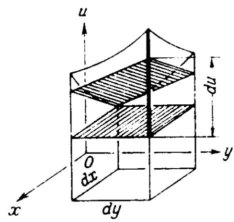


Fig. 287

*La propiedad fundamental* de la diferencial total es análoga a la de la diferencial de una variable*: la *invariancia* de la expresión (✳ ✳) con respecto a las variables contenidas en ella.

LINEALIDAD DE LAS EXPRESIONES DIFERENCIALES. Las diferenciales de las variables que están ligadas por una dependencia funcional *(por una ecuación finita)*, siempre están relacionadas entre sí por una dependencia **lineal** (*ecuación diferencial* de primer orden). Esto se refiere tanto a las diferenciales de las variables independientes como a las diferenciales (parciales y totales) de las funciones de una o varias variables.

La obtención de la ecuación diferencial de la ecuación finita se llama *diferenciación.* En sentido más estricto, se llama diferenciación a la búsqueda de la derivada o de la diferencial.

DERIVADAS Y DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR. *La derivada segunda* de una función de una variable $y = f(x)$ $\left[\text{se designa por: } y'', \ddot{y}, D^2y, \frac{d^2y}{dx^2}^{**}, f''(x), D^2f(x), \frac{d^2f(x)}{dx^2}^{**}\right]$ es la derivada de la derivada: $f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x)$. Las derivadas de cualquier orden $\left[\text{se designan: } y''', \dddot{y}, \frac{d^3y}{dx^3}^{**}, f^{[IV]}(x), D^nf(x)\ \frac{d^5f(x)}{dx^5}^{**}\right]$ se definen análogamente.

*La derivada parcial de segundo orden* de la función $u=f(x, y, z, \ldots, t)$ puede ser tomada respecto de la misma variable que la primera $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots\right)$, o también respecto de otra $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}, \ldots\right)$; en el último caso la derivada se llama *mixta.* El valor de la derivada mixta, si ésta es continua para los valores dados de $x$ e $y$, no depende del orden de las variables, respecto de las cuales se toman las derivadas $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} =\right.$

---

* Véase la pág. 356.

** Estas designaciones sólo son válidas cuando $x$ es una variable independiente y no son aplicables si $x = \varphi(v)$; véase la pág. 366 (cambio de variables).

$= \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}\Big)$. Las derivadas parciales de orden superior se definen análogamente. [Se designan:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z}, \ldots \Big].$$

*La diferencial segunda* de una función de una variable $y = f(x)$ [se designa $d^2y$, $d^2f(x)$] representa la diferencial de la diferencial primera: $d^2y = d(dy) = f''(x)\, dx^2$*. Análogamente se definen las diferenciales de orden superior: $d^3y = d(d^2y) = f'''(x)\, dx^3$*, etc.

*La diferencial total de segundo orden* de una función de dos variables $u = f(x, y)$ es:

$$d^2u = d(du) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\, dy^2$$

o en forma simbólica: $d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^2 u$**.

*La diferencial total de n-ésimo orden* de una función de dos variables es:

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^n u^{**};$$

para la función de un número mayor de variables es:

$$d^nu = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy + \frac{\partial}{\partial z}\, dz + \ldots + \frac{\partial}{\partial t}\, dt\right)^n u^{**}.$$

## 2. *Reglas de derivación*

INDICACIONES GENERALES. Empleando las reglas de derivación dadas más adelante y la tabla de derivadas, se puede hallar la derivada de cualquier función elemental; tal derivada siempre es una función elemental. Es de importancia primordial la regla de derivación de una función de función (de *una función compuesta*), la llamada "regla de la cadena" (pág. 361); por ejemplo,

$$y = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}; \quad \frac{dy}{dx} = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \cdot \frac{d(\operatorname{tg}\sqrt{x})}{dx} = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \times$$

$$\times \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{d\sqrt{x}}{dx} = e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

---

* Estas designaciones sólo son válidas cuando $x$ es una variable independiente y no son aplicables si $x = \varphi(v)$; véase la pág. 366 (cambio de variables).

** En el caso en que las variables $x, y, \ldots, t$ son ellas mismas funciones de nuevas variables, las fórmulas son más complicadas. Véanse las págs. 367-368.

## TABLA DE DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

| Función | Derivada | Función | Derivada |
|---|---|---|---|
| $C$ (constante) | $0$ | $\operatorname{arcsen} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $x$ | $1$ | $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | | |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\frac{1}{x^n}$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ | $\operatorname{arcctg} x$ | $-\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\operatorname{arcsec} x$ | $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $\operatorname{arccosec} x$ | $-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ | $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{sh} x$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $\operatorname{th} x$ | $\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$ | $\operatorname{cth} x$ | $-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ |
| $\lg x$ | $\frac{1}{x}\lg e \approx \frac{0{,}4343}{x}$ | $\operatorname{Arsh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ |
| $\operatorname{sen} x$ | $\cos x$ | $\operatorname{Arch} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ |
| $\cos x$ | $-\operatorname{sen} x$ | $\operatorname{Arth} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $\frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ | | |
| $\operatorname{ctg} x$ | $-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$ | $\operatorname{Arcth} x$ | $-\frac{1}{x^2-1}$ |
| $\sec x$ | $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \sec x$ | | |
| $\operatorname{cosec} x$ | $-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$ | | |

Antes de derivar es útil, si es posible, transformar la función en forma de una suma: abriendo los paréntesis (pág. 142), separando la parte entera (págs. 144-145), tomando el logaritmo de la expresión (pág. 151), etc.

*Ejemplos:*

1) $$y = \frac{2-3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}+x^2}{x} = \frac{2}{x} - 3x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{2}{3}} + x;$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}} + 1.$$

2) $$y = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(x^2-1);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) = -\frac{2x}{x^4-1}.$$

REGLAS PRINCIPALES DE DERIVACIÓN. ($u$, $v$, $w$, son funciones de la variable independiente $x$; $u'$, $v'$, $w'$, ... son las derivadas de estas funciones con respecto a $x$).

1) *La derivada (o la diferencial) de una suma algebraica de* dos o más funciones, es igual a la suma algebraica de las derivadas (diferenciales) de cada función:

$$(u+v-w+\ \dots\ +t)' = u'+v'-w'+\ \dots\ +t';$$
$$d(u+v-w+\ \dots\ +t) = du+dv-dw+\ \dots\ +dt.$$

2) *La derivada (diferencial) del producto* de dos o más funciones es igual a la suma de los $n$ términos (donde $n$ es el número de las funciones que se multiplican); cada sumando está formado igual que el producto dado, con la diferencia de que uno de los factores se sustituye sucesivamente por su derivada (diferencial):

para dos funciones es: $(uv)' = uv'+u'v$, $d(uv) = u\,dv+v\,du$;

para tres funciones es: $(uvw)' = uvw'+uv'w+u'vw$, $d(uvw) =$
$= uv\,dw+uw\,dv+vw\,du$, etc.

Frecuentemente, para calcular la derivada del producto de varias funciones, primero se halla *la derivada logarítmica* $\left(\text{es decir, la derivada del logaritmo de la función dada } (\ln y)' = \frac{y'}{y}\right)$; por ejemplo:

$$y = \sqrt{x^3e^{4x}\,\mathrm{sen}\,x}\,; \qquad \ln y = \frac{1}{2}(3\ln x + 4x + \ln \mathrm{sen}\,x),$$

$$\frac{d\ln y}{dx} = \frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}+4+\operatorname{ctg} x\right),$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{3}{2x}+2+\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x\right)\sqrt{x^3e^{4x}\operatorname{sen} x}\,*.$$

3) *Derivada (diferencial) de una función que tiene un factor* **constante.** El factor constante se puede sacar fuera del signo de la derivada (diferencial):

$$(cu)' = cu', \quad d(cu) = c\,du.$$

4) *Derivada (diferencial) del cociente* se calcula por la siguiente fórmula:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv'}{v^2}\cdot d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

5) *Derivada de una función de función (función compuesta)*. Si $y = f(u)$ y $u = \varphi(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\cdot\varphi'(x);$$

si $y = f(u), u = \varphi(t), t = \varphi(x)$, entonces $\frac{dy}{dx} = f'(u)\cdot\varphi'(t)\cdot\psi'(x)$ ("regla de la cadena").

En el caso "de una cadena" de un número mayor de funciones, se procede análogamente.

La derivada de $n$-ésimo orden del producto de dos funciones *(fórmula de Leibniz)* es:

$$D^n(uv) = u\cdot D^n v+\frac{n}{1}DuD^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{2}D^2uD^{n-2}v+\ \dots$$
$$\dots+\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}D^muD^{n-m}v+\ \dots\ +D^nu\cdot v,$$

o (haciendo $D^0u = u$, $D^0v = v$) es:

$$D^n(uv) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m D^muD^{n-m}v$$

(la fórmula es similar al binomio de Newton, véase la pág. 187).

* Este mismo procedimiento es aplicable para la derivación de una función de la forma $u^v$: por ejemplo,

$$y = (2x+1)^{3x}, \quad \ln y = 3x\ln(2x+1), \quad \frac{y'}{y} = 3\left[\frac{2x}{2x+1}+\ln(2x+1)\right],$$

$$y' = 3\left[\frac{2x}{2x+1}+\ln(2x+1)\right]y = 3\left[\frac{2x}{2x+1}+\ln(2x+1)\right](2x+1)^{3x}.$$

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR DE LAS FUNCIONES MAS SIMPLES

| Función | La derivada $n$-ésima |
|---|---|
| $x^m$ | $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$ |
| | (Para $m$ entero y $n > m$ la derivada es igual a cero) |
| $\ln x$ | $(-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{x^n}$ |
| $\log_a x$ | $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\ln a}\,\frac{1}{x^n}$ |
| $e^{kx}$ | $k^n e^{kx}$ |
| $a^x$ | $(\ln a)^n a^x$ |
| $a^{kx}$ | $(k \ln a)^n a^{kx}$ |
| $\operatorname{sen} x$ | $\operatorname{sen}\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ |
| $\cos x$ | $\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ |
| $\operatorname{sen} kx$ | $k^n \operatorname{sen}\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$ |
| $\cos kx$ | $k^n \cos\left(kx+\frac{n\pi}{2}\right)$ |
| $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{sh} x$ para $n$ par, $\operatorname{ch} x$ para $n$ impar |
| $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{ch} x$ para $n$ par, $\operatorname{sh} x$ para $n$ impar |

**LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA DE VARIAS VARIABLES.** En el caso de una variable independiente

$$u = f(x, y, \ldots, t),$$

donde

$$x = \varphi(\xi), y = \psi(\xi), \ldots, t = \chi(\xi), \text{ se tiene:}$$

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{d\xi} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{dt}{d\xi}. \qquad (*)$$

En el caso de varias variables independientes $u = f(x, y, \ldots, t)$, donde $x = \varphi(\xi, \eta, \ldots, \tau)$, $y = \psi(\xi, \eta, \ldots, \tau)$, $\ldots$, $t = \chi(\xi, \eta, \ldots, \tau)$ se tiene:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \xi} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \xi},\\
\frac{\partial u}{\partial \eta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \eta},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial \tau}
\end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

DERIVACIÓN DE UNA FUNCIÓN IMPLÍCITA.

1) La función de una variable $y = f(x)$ viene dada por la ecuación

$$F(x, y) = 0. \tag{A}$$

La derivación de (A) con respecto a $x$ se basa en las fórmulas (✻) y da

$$F'_x + F'_y y' = 0, \tag{B}$$

de donde

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Derivando (B) con respecto a $x$ por la misma fórmula, se tiene:

$$F''_{xx} + 2F''_{xy} y' + F''_{yy} (y')^2 + F'_y y'' = 0, \tag{C}$$

de donde, teniendo en cuenta (B):

$$y'' = \frac{2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_y)^2 F''_{xx} - (F'_x)^2 F''_{yy}}{(F'_y)^3}. \tag{D}$$

De la misma manera se obtiene

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy} y' + 3F'''_{xyy} (y')^2 + F'''_{yyy} (y')^3 +$$
$$+ 3F''_{xy} y'' + 3F''_{yy} y' y'' + F'_y y''' = 0, \tag{E}$$

de donde, teniendo en cuenta (B) y (E) se obtiene $y'''$, etc.

2) *La función de varias variables* $u = f(x, y, \ldots, t)$ viene dada por una ecuación $F(x, y, \ldots, t, u) = 0$.

Las derivadas parciales se hallan análogamente (empleando las fórmulas (✻✻) de la pág. 362):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -F'_x / F'_u, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -F'_y / F'_u, \; \ldots, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -F'_t / F'_u;$$

por el mismo procedimiento se hallan las derivadas parciales de orden superior.

3) *Dos funciones de una variable* $y = f(x)$ y $z = \varphi(x)$ dadas por un sistema de ecuaciones

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{y} \quad \Phi(x, y, z) = 0. \tag{A}$$

Derivando (A) por la fórmula (✻) de la pág. 362 se tiene:

$$F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' = 0, \qquad \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' + \Phi'_z \cdot z' = 0, \tag{B}$$

de donde

$$y' = \frac{F'_z \Phi'_x - \Phi'_z F'_x}{F'_y \Phi'_z - F'_z \Phi'_y}, \qquad z' = \frac{F'_x \Phi'_y - F'_y \Phi'_x}{F'_y \Phi'_z - F'_z \Phi'_y};$$

por este mismo procedimiento [derivando (B) y teniendo en cuenta los valores de $y'$ y $z'$] se hallan las derivadas segundas $y''$ y $z''$, etc.

4) *n funciones de una variable* $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, $\ldots$, $t = \psi(x)$, dadas por un sistema de $n$ ecuaciones:

$$F(x, y, z, \ldots, t) = 0,\ \Phi(x, y, z, \ldots, t) = 0,\ \ldots,\ \Psi(x, y, z, \ldots, t) = 0. \quad \text{(A)}$$

Derivando (A) según la fórmula (✳) de la pág. 362, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} F'_x + F'_y \cdot y' + F'_z \cdot z' + \ldots + F'_t \cdot t' &= 0,\\ \Phi'_x + \Phi'_y \cdot y' + \Phi'_z \cdot z' + \ldots + \Phi'_t \cdot t' &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ \Psi'_x + \Psi'_y \cdot y' + \Psi'_z \cdot z' + \ldots + \Psi'_t \cdot t' &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \text{(B)}$$

resolviendo el sistema (B) con respecto a $y'$, $z'$, $\ldots$, $t'$, hallamos las derivadas primeras; por el mismo procedimiento hallamos las derivadas de orden superior.

5) *Dos funciones de dos variables* $u = f(x, y)$, $v = \varphi(x, y)$ dadas por un sistema de dos ecuaciones

$$F(x, y, u, v) = 0 \quad \text{y} \quad \Phi(x, y, u, v) = 0. \quad \text{(A)}$$

Derivando las ecuaciones (A) con respecto a $x$ e $y$ [según las fórmulas (✳✳) de la pág. 362], obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= 0,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{B}_x)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= 0,\\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{B}_y)$$

resolviendo el sistema $(\mathrm{B}_x)$ con respecto a $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y el sistema $(\mathrm{B}_y)$ con respecto a $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, obtenemos las derivadas parciales de primer orden; por el mismo procedimiento se hallan las derivadas de orden superior.

6) *n funciones de m variables dadas por un sistema de n ecuaciones.* Las derivadas parciales de primer orden o de orden cualquiera se hallan por un procedimiento análogo.

**Las derivadas de una función** $y = f(x)$, **dada en forma paramétrica**: $x = x(t)$, $y = y(t)$ (las derivadas con respecto a $t$ están designadas con rayitas), son:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5}, \ \ldots$$

La derivada de una función inversa. Si la función $y = f(x)$ es inversa con respecto a $y = \varphi(x)$, entonces sus derivadas se calculan por las siguientes fórmulas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(y)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)^3]}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} =$$

$$= \frac{3\,[\varphi''(y)]^2 - \varphi'(y)\varphi'''(y)}{[\varphi'(y)]^5}, \ \ldots$$

Por ejemplo, $y = \operatorname{arcsen} x$; la función directa es: $y = \operatorname{sen} x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\operatorname{sen} y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivación gráfica. Si la función diferenciable $y = f(x)$ está representada [en coordenadas cartesianas] por la gráfica $(\Gamma)$ en un intervalo $a < x < b$, entonces la gráfica de su derivada $(\Gamma')$ puede construirse aproximadamente de la siguiente manera.

*Problema preliminar: el trazado de la tangente* a la curva en un punto dado de la misma puede efectuarse "a ojo" no muy exactamente; si se ha dado la **dirección** de la tangente ($MN$, fig. 288), entonces el punto de contacto $A$ puede construirse con más exactitud. Construimos dos cuerdas $M_1N_1$ y $M_2N_2$ paralelas a $MN$ y que corten a la curva en puntos muy próximos, después construimos los puntos medios $R_1$ y $R_2$ de estas cuerdas y trazamos por $R_1$ y $R_2$ la recta $PQ$; esta última cortará a la curva en un punto $A$ cuya tangente tiene (aproximadamente) la dirección dada. Para controlar la exactitud de esta construcción se puede trazar una tercera cuerda, paralela a las dos primeras y próxima a ellas; ésta tiene que cortarse con la recta $PQ$ en el punto medio.

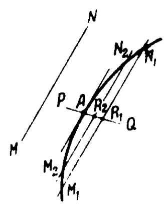


Fig. 288

*Construcción de la gráfica de la derivada.* 1) Dando varias direcciones ($l_1$, $l_2$, ...) de las tangentes a la curva $y = f(x)$ (fig. 289), de modo que ellas correspondan a ojo al intervalo considerado de la curva, determinamos los puntos de contacto $A_1$, $A_2$, ... mediante la construcción anterior (se puede no trazar las propias tangentes).

2) En la parte negativa del eje $Ox$ elegimos un punto arbitrario $P$ ("el polo"); el segmento $PO = a$ debe ser tanto mayor, cuanto menor sea el declive que lleve la curva.

3) Desde el polo $P$ trazamos las rectas $PB_1$, $PB_2$, ... paralelas a las direcciones $l_1$, $l_2$, ... hasta la intersección con el eje $Oy$ en los puntos $B_1$, $B_2$, ....

4) Por $B_1$, $B_2$,... trazamos las rectas horizontales $B_1C_1$, $B_2C_2$,... hasta

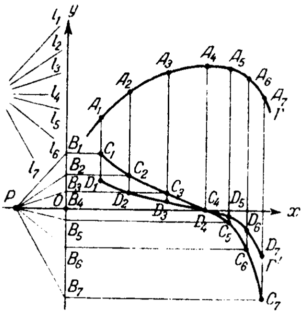



Fig. 289

las intersecciones, en los puntos $C_1$, $C_2, \ldots$, con las ordenadas correspondientes de los puntos $A_1$, $A_2$, ...

5) Unimos suavemente los puntos $C_1$, $C_2$, ... mediante una curva; su ecuación será $y = a \cdot f'(x)$; ésta es la gráfica buscada de la derivada si por unidad de escala en el eje $Oy$ se toma el segmento $a$. Para la obtención de la gráfica en la escala corriente (la curva $\Gamma'$) construimos los puntos $D_1$, $D_2$, ..., cuyas ordenadas son iguales a las ordenadas de los puntos $C_1, C_2, \ldots$, divididas por $a$ ($a = PO$ en la fig. 289).

## 3. *Cambio de variables en las expresiones diferenciales*

FUNCIÓN DE UNA VARIABLE. Si $y = f(x)$ y se tiene la expresión

$$H = F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots\right),$$

que contiene el argumento, la función y sus derivadas, entonces si se cambian las variables por nuevas, las derivadas se calculan por las siguientes fórmulas:

1) Si se cambia el argumento $x$ por un argumento $t$ que está ligado con $x$ por la fórmula $x = \varphi(t)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\,\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^3}\left\{\varphi'(t)\,\frac{d^2y}{dt^2} - \varphi''(t)\,\frac{dy}{dt}\right\},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{[\varphi'(t)]^5}\left\{[\varphi'(t)]^2\,\frac{d^3y}{dt^3} - 3\varphi'(t)\,\varphi''(t)\,\frac{d^2y}{dt^2} + \right.$$
$$\left. + [3[\varphi''(t)]^2 - \varphi'(t)\,\varphi'''(t)]\,\frac{dy}{dt}\right\}.*$$

* Si la fórmula de transformación se da en la forma $\Phi(x, t) = 0$, no resuelta con respecto a $x$, entonces las derivadas $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ se calculan por las mismas fórmulas, pero en ellas las derivadas $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\varphi'''(t)$ se calculan por las reglas de derivación de una función implícita. La expresión final $H$ puede contener la variable $x$, la cual debe eliminarse mediante la ecuación $\Phi(x, t) = 0$.

2) Si se cambia la función $y$ por una función $u$ que está ligada con $y$ por la fórmula $y = \varphi(u)$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(u)\,\frac{du}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'(u)\,\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi'(u)\,\frac{d^3u}{dx^3} + 3\varphi''(u)\,\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dx^2} + \varphi'''(u)\left(\frac{du}{dx}\right)^3, \ \ldots$$

3) Si se cambia el argumento $x$ y la función $y$ por un nuevo argumento $t$ y por una nueva función $u$, que están ligados con $x$ e $y$ por las fórmulas $x = \varphi(t, u)$, $y = \psi(t, u)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}}\,\frac{d}{dt}\left[\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}}\right] = \frac{1}{B}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{1}{B^3}\left(B\,\frac{dA}{dt} - A\,\frac{dB}{dt}\right),$$

donde $A = \dfrac{\partial\psi}{\partial t} + \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}$, $B = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\,\dfrac{du}{dt}$,

$\dfrac{d^3y}{dx^3}$ se calcula análogamente.

*Ejemplo:* Al transformar las coordenadas cartesianas a las polares según las fórmulas $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi$, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho'\,\mathrm{sen}\,\varphi + \rho\cos\varphi}{\rho'\cos\varphi - \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho'\cos\varphi - \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi)^3}.$$

FUNCIÓN DE DOS VARIABLES. Si

$$\omega = f(x, y)$$

y se tiene la expresión

$$H = F\left(x, y, \omega, \frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}, \ldots\right)$$

que contiene los argumentos, la función y sus derivadas parciales, entonces, en el caso de cambio de las variables $x$ e $y$ por unas nuevas $u$ y $v$ que estén ligadas con $x$ e $y$ por las fórmulas $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, las derivadas parciales de primer orden $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial y}$ se hallan del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial\omega}{\partial u} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\ \frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial v} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\ \frac{\partial\psi}{\partial v},$$

de donde obtenemos que:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = A\frac{\partial\omega}{\partial u} + B\frac{\partial\omega}{\partial v}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = C\frac{\partial\omega}{\partial u} + D\frac{\partial\omega}{\partial v},$$

donde $A$, $B$, $C$, $D$ son funciones de $u$, $v$. Las derivadas parciales segundas se calculan por estas mismas fórmulas, pero aplicándolas no a la función $\omega$, sino a $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ y $\frac{\partial\omega}{\partial y}$; por ejemplo:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial\omega}{\partial u} + B\frac{\partial\omega}{\partial v}\right) =$$

$$= A\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial A}{\partial u}\ \frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial u}\ \frac{\partial\omega}{\partial v}\right) +$$

$$+ B\left(A\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} + B\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} + \frac{\partial A}{\partial v}\ \frac{\partial\omega}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}\ \frac{\partial\omega}{\partial v}\right).$$

Así mismo se obtienen las derivadas parciales de orden superior.

*Por ejemplo:* Expresar el operador de Laplace*

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$$

en coordenadas polares $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\varphi$.

Tenemos que:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\,\text{sen}\,\varphi, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}\,\rho\,\text{sen}\,\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial y}\,\rho\cos\varphi;$$

de donde

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\text{sen}\,\varphi}{\rho}\ \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = \text{sen}\,\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\ \frac{\partial\omega}{\partial\varphi};$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\text{sen}\,\varphi}{\rho}\ \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right) -$$

$$-\frac{\text{sen}\,\varphi}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\omega}{\partial\rho} - \frac{\text{sen}\,\varphi}{\rho}\ \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\right).$$

Calculando análogamente $\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$, obtenemos que:

$$\Delta\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2\omega}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\omega}{\partial\rho}.$$

Para una función de un número mayor de variables, las fórmulas de cambio se obtienen por un procedimiento análogo.

---

* Véase la pág. 627.

## 4. *Teoremas fundamentales del cálculo diferencial*

CONDICIÓN DE MONOTONÍA DE UNA FUNCIÓN. Si una función $f(x)$ está dada y es continua en una región conexa y tiene derivada en todos los puntos interiores de esta región*, entonces la condición necesaria y suficiente para que la función sea monótona en esta región es que sea

$f'(x) \geqslant 0$, para la función monótona creciente,

$f'(x) \leqslant 0$, para la función monótona decreciente**

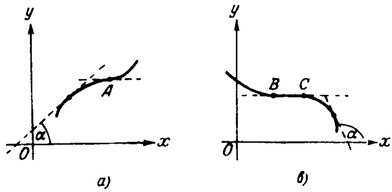



Fig. 290

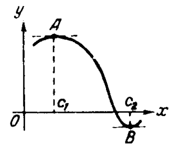



Fig. 291

*Interpretación geómetrica.* La gráfica de una función monótona creciente es una curva que, al examinarla de izquierda a derecha, en ninguna parte desciende (se eleva o va horizontalmente, fig. 290, *a*); la tangente en los puntos de esta curva forma con la dirección positiva del eje $Ox$ un ángulo agudo o es paralela a él. La situación es análoga para una función monótona decreciente (fig. 290, *b*)***.

TEOREMA DE FERMAT. Si una función $y = f(x)$, dada en una región conexa, tiene en un punto interior de ella**** $x = c$ un valor máximo o mínimo, es decir $f(c) < f(x)$ ó $f(c) > f(x)$ y posee en el punto $c$ derivada **finita**, entonces esta derivada es igual a cero:

$$f(c) = 0.$$

* Es decir, en los puntos que no son los extremos del intervalo.

** Esta condición se cumple para el crecimiento o decrecimiento monótono en sentido **amplio** (véase la llamada de la pág. 319). Para que la función sea monótona creciente o decreciente en sentido estricto, a la condición indicada es necesario agregar una segunda: la derivada $f'(x)$ no debe anularse idénticamente en ningún intervalo que forme una parte de la región considerada. Por ejemplo, en el segmento $BC$ de la fig. 290, *b* no se cumple esta condición.

*** En el caso en que la función sea monótona en sentido estricto, la tangente puede ser paralela al eje $Ox$ sólo en algunos puntos aislados (por ejemplo, en el punto $A$ de la fig. 290, *a*), pero no en todo un intervalo ($BC$ de la fig. 290, *b*).

**** Es decir, en un punto que no es extremo del intervalo.

*Interpretación geométrica.* En los puntos $A$ y $B$ de la gráfica de la función que verifica a la condición del teorema, la tangente es paralela al eje $Ox$ (fig. 291).

El teorema de Fermat sólo da una condición necesaria de existencia del valor máximo o mínimo de la función; pero ésta no es suficiente: en la fig. 290, *a* en el punto $A$ $f'(x) = 0$, pero ahí no hay ni un máximo ni un mínimo.

La condición de que la derivada sea **finita**, es esencial en el teorema de Fermat: en la fig. 292, *d* la función tiene un valor máximo en el punto $E$, pero la derivada no se anula.

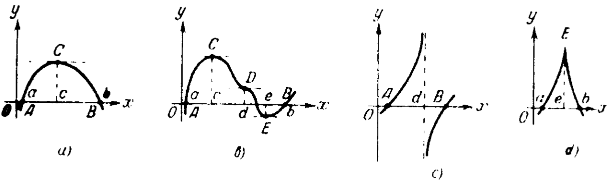



Fig. 292

Teorema de Rolle. Si una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, tiene derivada finita en este intervalo y se anula en sus extremos:

$$f(a) = 0, \quad f(b) = 0 \qquad (a < b),$$

entonces existe por lo menos un número $c$ entre $a$ y $b$ tal que

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b).$$

*Interpretación geométrica.* Si la curva que es la gráfica de la función $y = f(x)$, corta al eje $Ox$ en los dos puntos $A$ y $B$, es continua y tiene tangente desde $A$ hasta $B$, entonces existe en la curva por lo menos un punto $C$ entre $A$ y $B$ tal, que en él la tangente es paralela al eje $Ox$ (fig. 292, *a*).

Puede haber unos cuantos puntos de estos (los puntos $C$, $D$, $E$ de la fig. 292, *b*). La condición de continuidad de la función o de su derivada es esencial: en la fig. 292, *c*, la función tiene una discontinuidad para $x = d$; en la fig. 292, *d* la derivada tiene una discontinuidad en el punto $E$. En ambos casos no existe un punto $C$, en el que $f'(x) = 0$.

Teorema de Lagrange *(teorema del incremento finito).* Si una función $y = f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y tiene derivada finita en este intervalo, entonces existe por lo menos un punto $c$ entre $a$ y $b$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b).$$

Empleando otras notaciones (haciendo $b=a+h$ y designando por $\theta$ un número comprendido entre 0 y 1) se tiene:

$$f(a+h)=f(a)+h\cdot f'(a+\theta h)$$
$$(0<\theta<1).$$

*Interpretación geométrica.* Si la curva $y=f(x)$ (fig. 293) es continua y tiene tangente en el intervalo $AB$, entonces entre $A$ y $B$ existe un punto $C$ de la curva tal, que la tangente en él es paralela a la cuerda $AB$.

Puede haber varios puntos de estos; las condiciones de continuidad de la función y de su derivada son esenciales (es fácil construir ejemplos que ilustran esto análogamente a la fig. 292 $b$, $c$, $d$).

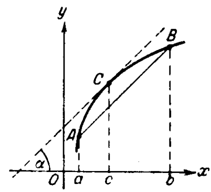


Fig. 293

Teorema de Taylor *(generalización del teorema de Lagrange)*. Si una función $y=f(x)$ es continua en el intervalo $[a, a+h]$* y tiene derivadas continuas desde la primera hasta la $n$-ésima inclusive, entonces se cumple la igualdad *(fórmula de Taylor)*:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1!}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\ldots+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),$$

donde $\theta$ es cierto número comprendido entre 0 y 1 $(0<\theta<1)$.

Teorema de Cauchy. Si las funciones $y=f(x)$ e $y=\varphi(x)$ están dadas en un intervalo cerrado $[a, b]$, son continuas y tienen derivadas finitas en este intervalo, y $\varphi'(x)$ no se anula en ningún punto, entonces existe un número $c$ entre $a$ y $b$ tal, que se cumple la igualdad

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (a<c<b).$$

*La interpretación geométrica* del teorema de Cauchy es la misma que la del teorema de Lagrange; considerando la curva de la fig. 293, dada en la forma paramétrica $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$, donde el punto $A$ corres-

* Aquí $h$ puede ser tanto positivo como negativo.

ponde al valor del parámetro $t = a$ y el punto $B$ corresponde al valor $t = b$, resulta que para el punto $C$ la pendiente de la tangente a la curva es

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

## 5. *Determinación de máximos y mínimos*

FUNCIÓN DE UNA VARIABLE.

***Definición.*** ***Máximo*** $(M)$ o ***mínimo*** $(m)$* de una función $y = f(x)$ se llaman aquellos valores $f(x_0)$ para los cuales se cumplen las desigualdades

$$f(x_0+h) < f(x_0) \quad \text{(para el caso de máximo)}$$
y
$$f(x_0+h) > f(x_0) \quad \text{(para el caso de mínimo)}$$

para todos los valores suficientemente pequeños de $h$, positivos o negativos. De esta manera, en los puntos de máximo (de mínimo) el valor $f(x_0)$ es mayor (respectivamente menor) que todos los valores "**vecinos**" de la función.

*Condición necesaria de máximo o mínimo de una función continua.* Para una función continua puede haber máximo o mínimo sólo en

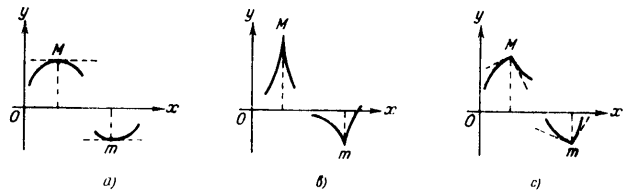



Fig. 294

aquellos puntos en que la derivada es igual a cero o no existe (en particular, es infinita).

*Interpretación geométrica.* En los puntos de la gráfica de la función que corresponden al máximo o al mínimo, la tangente es paralela al eje $Ox$ (fig. 294, $a$), o es paralela al eje $Oy$ (fig. 294, $b$), o no existe (fig. 294, $c$).

Esta condición no es suficiente: en la fig. 295 en los puntos $A$, $B$, $C$ las condiciones necesarias se cumplen, pero en ellos no hay máximo ni mínimo.

---

* En el análisis matemático, para los conceptos de máximo y mínimo se emplea un sólo término "*extremo*".

Para las funciones continuas los máximos y los mínimos **se alternan**: entre dos máximos vecinos hay un mínimo y entre dos mínimos vecinos hay un máximo.

*Determinación de los máximos y mínimos de una función continua dada en forma explícita $y = f(x)$ y que tiene derivada continua.* Primero se hallan los puntos que verifican la condición necesaria $f'(x) = 0$ *(puntos estacionarios)*, es decir, se calcula la derivada $f'(x)$ y se hallan todas las raíces reales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la ecuación $f'(x) = 0$.

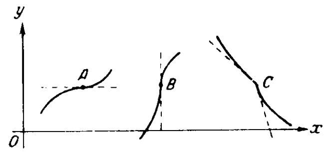


Fig. 295

Después, cada una de las raíces encontradas, por ejemplo $x_1$, se ensaya por alguno de los siguientes procedimientos.

1) *Métodos de comparación de los signos de la derivada.* Se determina el signo de $f'(x)$ para los valores $\tilde{x}$ que son algo menores que $x_1$ y para los valores $\tilde{\tilde{x}}$ que son algo mayores que $x_1$ [más exactamente, que están situados a ambos lados de $x_1$ y distan de él tan poco que entre $\tilde{x}$ y $x_1$ y entre $x_1$ y $\tilde{\tilde{x}}$ no existen más raíces de la ecuación $f'(x) = 0$]. Si en este

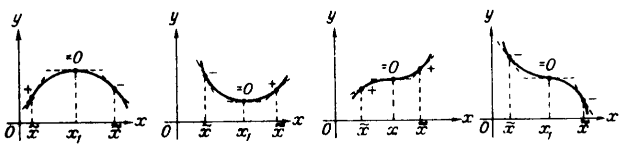


Fig. 296

caso, el signo de $f'(x)$ se cambia de «+» a «−» (fig. 296, *a*) entonces para $x = x_1$ la función $f(x)$ tiene un máximo; si el signo de $f'(x)$ se cambia de «−» a «+» la función tiene un mínimo (fig. 296, *b*); si el signo de la derivada no varía (fig. 296, *c* y *d*), entonces para $x = x_1$ no existe ni $M$ ni $m$ y en la gráfica hay un punto de inflexión con la tangente paralela al eje $Ox$.

2) *Método de las derivadas superiores* (puede aplicarse a aquellos casos en que para $x = x_1$ existen derivadas de órdenes superiores). Se reemplaza cada raíz $x_1$ en la segunda derivada $f''(x)$. Si $f''(x_1) < 0$, entonces para $x = x_1$ se tiene $M$; si $f''(x_1) > 0$, se tiene $m$; si $f''(x_1) = 0$, entonces se reemplaza $x_1$ en la tercera derivada $f'''(x)$. Si en este caso $f'''(x_1) \neq 0$, para $x = x_1$ no existe $M$ ni $m$ (punto de inflexión); si $f'''(x_1) = 0$, se reemplaza $x_1$ en la cuarta derivada, etc.

*Regla general:* si el orden de la primera derivada que no se anula para $x = x_1$ es par, entonces $f(x)$ tiene para $x = x_1$ un $M$ o un $m$, según que esta derivada sea negativa o positiva, respectivamente. Si este orden es impar, entonces la función no tiene para $x = x_1$ $M$ ni $m$.

El método de comparación de los signos de la derivada se puede aplicar para aquellos valores de la función en que la derivada no existe (véase la fig. 294, *b* y *c* y la fig. 295).

Para hallar *el máximo absoluto* y *el mínimo absoluto* de la función en el intervalo dado $a \leqslant x \leqslant b$, se buscan todos los $M$ y $m$ en el interior de este intervalo y se hallan los valores de la función en los extremos del intervalo, en los puntos de discontinuidad de la función y en los puntos de discontinuidad de su derivada. Los valores buscados se encuentran entre los puntos considerados; es necesario calcular todos estos valores y establecer cuál de ellos es el mayor y cuál es el menor.

*Ejemplos* de determinación del máximo absoluto:

a) $y = e^{-x^2}$ en el intervalo $[-1, +1]$. El máximo absoluto está en el punto $x = 0$ (máximo, fig. 297, *a*).

b) $y = x^3 - x^2$ en el intervalo $[-1, +2]$. El máximo absoluto está en el punto $x = +2$ (el extremo derecho del intervalo, fig. 297, *b*).

c) $y = \frac{1}{1+e^{1/x}}$ en el intervalo $[-3, 3]$. El máximo absoluto está en el punto $x = 0$ (discontinuidad de la función fig. 297, *c*) [haciendo $y = 1$ para $x = 0$].

d) $y = 2 - x^{\frac{2}{3}}$ en el intervalo $[-1, +1]$. El máximo absoluto está en el punto $x = 0$ es un máximo, la derivada es infinita, fig. 297, *d*.

*Determinación de los máximos y mínimos de una función dada en forma implícita.* Para determinar los $M$ y $m$ de una función $y = f(x)$ dada en forma implícita por una ecuación $F(x, y) = 0$ (si $F$, $F'_x$ y $F'_y$ son continuas), se procede de la siguiente manera. Se resuelve el sistema de ecuaciones

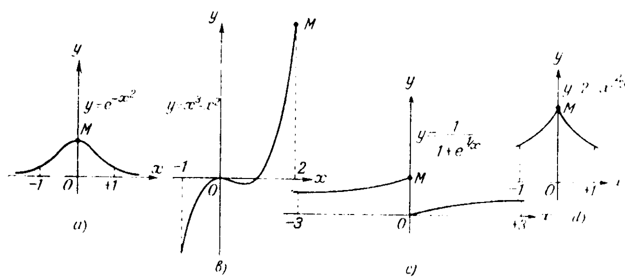



Fig. 297

$F(x, y) = 0$, $F'_x(x, y) = 0$ y las soluciones obtenidas $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ... se reemplazan en $F'_y$ y $F''_{xx}$. Si en el punto $(x_i, y_i)$, $F'_y$ y $F''_{xx}$ tienen signos **diferentes**, entonces para el $x_i$ dado la función $y_i$ tiene un $m$; si $F'_y$ y $F''_{xx}$ son de un mismo signo, entonces la función para el $x_i$ dado tiene un $M$. Si una de las expresiones $F'_y$ o $F''_{xx}$ es igual a cero en el punto considerado, entonces los métodos analíticos posteriores se hacen más complicados.

FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES.

*Definición.* La función $u = f(x, y, \ldots, t)$ tiene para el sistema de valores $x_0, y_0, \ldots, t_0$ ("en el punto $P_0$") un máximo (un mínimo), si se puede señalar un número $\varepsilon$ tal, que la región $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon, \ldots, t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ está contenida en el campo de definición de la función y para cada sistema de valores de esta región, a excepción del propio sistema $x_0, y_0, \ldots, t_0$, se verifican las condiciones:

$$f(x, y, \ldots, t) < f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \quad \text{(para el caso de máximo)}$$

y

$$f(x, y, \ldots, t) > f(x_0, y_0, \ldots, t_0) \quad \text{(para el caso de mínimo).}$$

Empleando el concepto de espacio $n$-dimensional*, se puede decir que en los puntos de máximo (mínimo) el valor de la función $u$ es mayor (respectivamente menor) que en todos los puntos vecinos.

*Interpretación geométrica* del máximo (mínimo) de una función de dos variables, representada por una superficie en coordenadas cartesianas (véase la pág. 333); en el punto $A$ de máximo (mínimo) la cota de la superficie es mayor (respectivamente menor) que la cota de cualquier punto situado en un entorno suficientemente pequeño del punto $A$ (es decir, en una región de dimensión pequeña, para la cual el punto $A$ es interior), véase la fig. 298: *a*) es un máximo, *b)* es un mínimo.

Si la superficie tiene plano tangente en el punto $P$ de máximo o mínimo, entonces este plano es paralelo al plano $xOy$ (fig. 298, *a* y *b*). Esta condición es necesaria, pero no suficiente, para que en el punto $P$ haya un $M$ o un $m$: en la fig. 298, *c* la superficie tiene en el punto $P$ un plano tangente horizontal, pero la función no tiene en él ni $M$, ni $m$ ($P$ es un punto de ensilladura).

*Determinación de máximos y mínimos de una función de dos variables* $u = f(x, y)$. Se resuelve el sistema de ecuaciones

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0;$$

los sistemas de soluciones obtenidos $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, ... se reemplazan en $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ y $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Se forma la expresión

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = \left[f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2\right]_{x=x_1,\ y=y_1}.$$

* Véase la pág. 333.

Si $\Delta > 0$, la función $f(x, y)$ para el sistema de valores $(x_1, y_1)$ tiene $M$, si $f''_{xx} < 0$ y tiene $m$, si $f''_{xx} > 0$. Si $\Delta < 0$, entonces $f(x, y)$ no tiene ni $M$ ni $m$. Si $\Delta = 0$, deben aplicarse métodos más complicados.

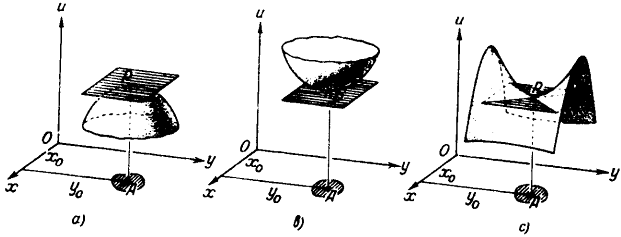



Fig. 298

*Determinación de máximos y mínimos de una función de n variables* $u = F(x, y, \ldots, t)$. Las condiciones *necesarias*, pero **no suficientes**, para que la función diferenciable $u$ tenga un $M$ o un $m$ para el sistema de valores $(x, y, \ldots, t)$, son: este sistema debe verificar las $n$ ecuaciones

$$F'_x = 0, \quad F'_y = 0, \ \ldots \ F'_t = 0. \tag{A}$$

En el caso general las condiciones suficientes son complicadas; prácticamente, para establecer, si para el sistema de soluciones $x_1, y_1, \ldots, t_1$ de las ecuaciones (A) hay o no $M$, $m$, se debe estudiar la función para los valores próximos a $x_1, y_1, \ldots, t_1$.

*Máximo y mínimo condicionados* (método de Lagrange). Si se pide hallar un $M$ o un $m$ de una función de varias ($n$) variables $u = F(x, y, \ldots, t)$, las cuales no son independientes entre sí sino que están relacionadas por condiciones suplementarias (el número de condiciones es igual a $k < n$):

$$\varphi(x, y, \ldots, t) = 0, \quad \psi(x, y, \ldots, t) = 0, \quad \chi(x, y, \ldots, t) = 0,$$

entonces se introducen $k$ multiplicadores indeterminados $\lambda, \mu, \ldots, \varkappa$ y se estudia la siguiente función de $n+k$ variables $x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa$:

$$\Phi(x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa) = F(x, y, \ldots, t) + \\ + \lambda \cdot \varphi(x, y, \ldots, t) + \mu \cdot \psi(x, y, \ldots, t) + \ldots + \varkappa \cdot \chi(x, y, \ldots, t);$$

las condiciones necesarias de máximo o mínimo de la función $\Phi$ proporcionan un sistema de $n+k$ ecuaciones (A) con las incógnitas $x, y, \ldots, t, \lambda, \mu, \ldots, \varkappa$. Estas ecuaciones tienen la forma:

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0, \ldots, \quad \varkappa = 0, \quad \Phi'_x = 0, \quad \Phi'_y = 0, \ldots, \quad \Phi' = 0,$$

El sistema de soluciones $(x_1, y_1, \ldots, t_1)$ que verifican a estas ecuaciones puede dar un $M$ o un $m$ para la función $F$; ésta es sólo una condición **necesaria**.

Por ejemplo, para la función $u = f(x, y)$, si $\varphi(x, y) = 0$, el punto máximo (mínimo) se determina de las tres ecuaciones:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}[f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}[f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)] = 0,$$

con tres incógnitas $x$, $y$, $\lambda$.

## 6. *Desarrollo de las funciones en series de potencias*

SERIE DE TAYLOR PARA UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE. En muchos casos una función $y = f(x)$, que es continua y tiene para $x = a$ derivadas de **cualquier orden**, se puede representar en forma de una serie de potencias (véase la pág. 350), que se obtiene de la fórmula de Taylor (pág. 371):

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots \quad (\textit{serie de Taylor}). \qquad \text{(T)}$$

La fórmula (T) es válida para aquellos valores de $x$, para los cuales *el término complementario** $f(x) - S_n = R_n$ tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Las fórmulas del término complementario son:

$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (\xi \text{ está comprendido entre } a \text{ y } x)$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Otra forma de la serie de Taylor es:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \ldots;$$

para esta forma, las fórmulas del término complementario son:

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta h) \quad (0 < \theta < 1),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^h (h-t)^n f^{(n+1)}(a+t)\, dt.$$

---

* Aquí el concepto del término complementario no siempre coincide con el concepto de resto que fue dado en el párrafo referente a las series de funciones (pág. 348). Ambos conceptos coinciden solamente en aquellos casos en que la fórmula (T) es válida.

**La serie de Mac-Laurin** es el desarrollo de la función $f(x)$ según las potencias de $x$, y es un caso particular de la serie (T) para $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots, \qquad \text{(M)}$$

su término complementario es:

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta_x) \quad (0 < \theta < 1),$$

$$R_n = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

La convergencia de las series de Taylor y de Mac-Laurin se determina, estudiando el término complementario $R_n$ o estableciendo el radio de convergencia (pág. 350); en este último caso, puede resultar a veces que la serie es convergente, pero su suma $S(x)$ no es igual a $f(x)$.

**Serie de Taylor para una función de dos variables:**

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \left\{ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} k \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} k^2 \right\} +$$
$$+ \frac{1}{6} \{\ldots\} + \ldots + \frac{1}{n!} \{\ldots\} + R_n$$

o en forma simbólica:

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + \frac{1}{1!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x, y) +$$
$$+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x, y) + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^3 f(x, y) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x, y) + R_n,$$

donde

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^{n+1} f(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k)$$
$$(0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1).$$

Para una función de $m$ variables, la fórmula simbólica es análoga:

$$f(x+h, y+k, \ldots, t+l) =$$
$$= f(x, y, \ldots, t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \ldots + \frac{\partial}{\partial t} l \right)^i \times$$
$$\times f(x, y, \ldots, t) + R_n,$$

donde

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k + \ldots + \frac{\partial}{\partial t} l \right)^{n+1} \times$$
$$\times f(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k, \ldots, t + \theta_m l) \quad (0 < \theta_i < 1).$$

## TABLA DE LOS DESARROLLOS DE ALGUNAS FUNCIONES EN SERIES DE POTENCIAS

| Función | Desarrollo en serie | Campo de convergencia |
|---|---|---|
| | *Funciones algebraicas*<br>Serie binómica | |
| $(a \pm x)^m$ | transformándola a la forma $a^m\left(1 \pm \frac{x}{a}\right)^m$,<br>se reduce a las siguientes series: | $\lvert x\rvert \leq a$ para $m > 0$<br>$\lvert x\rvert < a$ para $m < 0$. |
| | *Series binómicas con exponentes positivos* | |
| $(1 \pm x)^m$<br>$(m > 0)$* | $1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$<br>$\ldots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$ | $\lvert x\rvert \leq 1$ |
| $(1 \pm x)^{1/4}$ | $1 \pm \frac{1}{4}x - \frac{1\cdot 3}{4\cdot 8}x^2 \pm \frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}x^3 -$<br>$- \frac{1\cdot 3\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4 \pm \ldots$ | $\lvert x\rvert \leq 1$ |
| $(1 \pm x)^{1/3}$ | $1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 -$<br>$- \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 \pm \ldots$ | $\lvert x\rvert \leq 1$ |
| $(1 \pm x)^{1/2}$ | $1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 -$<br>$- \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots$ | $\lvert x\rvert \leq 1$ |
| $(1 \pm x)^{3/2}$ | $1 \pm \frac{3}{2}x + \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 +$<br>$+ \frac{3\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \mp \ldots$ | $\lvert x\rvert \leq 1$ |
| $(1 \pm x)^{5/2}$ | $1 \pm \frac{5}{2}x + \frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 -$<br>$- \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots$ | $\lvert x\rvert \leq 1$ |

* Para $m$ entero y positivo la serie es finita y contiene $m+1$ términos. Los coeficientes son: $\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} = C_m^n$; véase en la pág. 188 la tabla de los coeficientes binomiales $C_m^n$.

| Función | Desarrollo en serie | Campo de convergencia |
|---|---|---|
| | *Series binómicas con exponentes negativos:* | |
| $(1\pm x)^{-m}$ $(m>0)$ | $1\mp mx+\frac{m(m+1)}{2!}x^2\mp\frac{m(m+1)(m+2)}{3!}x^3+\ \dots$ $\dots\ +(\pm 1)^n\frac{m(m+1)\ \dots\ (m+n-1)}{n!}x^n\pm\ \dots$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-1/4}$ | $1\mp\frac{1}{4}x+\frac{1\cdot 5}{4\cdot 8}x^2\mp\frac{1\cdot 5\cdot 9}{4\cdot 8\cdot 12}x^3+$ $+\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16}x^4\mp\ \dots$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-1/3}$ | $1\mp\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2\mp\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3+$ $+\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4\mp\ \dots$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-1/2}$ | $1\mp\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+$ $+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp\ \dots$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-1}$ | $1\mp x+x^2\mp x^3+x^4\mp\ \dots$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-3/2}$ | $1\mp\frac{3}{2}x+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+$ $+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp\ \dots$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-2}$ | $1\mp 2x+3x^2\mp 4x^3+5x^4\mp\ \dots$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-5/2}$ | $1\mp\frac{5}{2}x+\frac{5\cdot 7}{2\cdot 4}x^2\mp\frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+$ $+\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4\mp\ \dots$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-3}$ | $1\mp\frac{1}{1\cdot 2}(2\cdot 3x\mp 3\cdot 4x^2+4\cdot 5x^3\mp 5\cdot 6x^4+\ \dots)$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-4}$ | $1\mp\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(2\cdot 3\cdot 4x\mp 3\cdot 4\cdot 5x^2+$ $+4\cdot 5\cdot 6x^3\mp 5\cdot 6\cdot 7x^4+\ \dots)$ | $\vert x\vert<1$ |
| $(1\pm x)^{-5}$ | $1\mp\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(2\cdot 3\cdot 4\cdot 5x\mp 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6x^2+$ $+4\cdot 5\cdot 6\cdot 7x^3\mp 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8x^4+\ \dots)$ | $\vert x\vert<1$ |
| | *Funciones trigonométricas* | |
| sen $x$ | $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ \dots\ +(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\pm\ \dots$ | $\vert x\vert<\infty$ |

| Función | Desarrollo en serie | Campo de convergencia |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen}(x+a)$ | $\operatorname{sen} a + x\cos a - \frac{x^2 \operatorname{sen} a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} +$ | |
| | $+\frac{x^4 \operatorname{sen} a}{4!} + \ldots + \frac{x^n \operatorname{sen}\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \pm \ldots$ | $\|x\| < \infty$ |
| $\cos x$ | $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\pm\ldots$ | $\|x\| < \infty$ |
| $\cos(x+a)$ | $\cos a - x\operatorname{sen} a - \frac{x^2\cos a}{2!} + \frac{x^3 \operatorname{sen} a}{3!} +$ | |
| | $+\frac{x^4\cos a}{4!} - \ldots + \frac{x^n\cos\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!} \pm \ldots$ | $\|x\| < \infty$ |
| $\operatorname{tg} x$ | $x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots$ | |
| | $\ldots+\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\ldots$ * | $\|x\| < \frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{ctg} x$ | $\frac{1}{x}-\left[\frac{x}{3}+\frac{x^3}{45}+\frac{2x^5}{945}+\frac{x^7}{4725}+\ldots\right.$ | |
| | $\left.\ldots+\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}x^{2n-1}+\ldots\right]$ * | $0 < \|x\| < \pi$ |
| $\sec x$ | $1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\frac{277}{8064}x^8+\ldots$ | |
| | $\ldots+\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots$ ** | $\|x\| < \frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{cosec} x$ | $\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+$ | |
| | $+\frac{127}{604800}x^7+\ldots+\frac{2(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1}$ * | $0 < \|x\| < \pi$ |
| | *Funciones exponenciales* | |
| $e^x$ | $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ | $\|x\| < \infty$ |
| $a^x = e^{x \ln a}$ | $1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{(x\ln a)^2}{2!}+$ | |
| | $+\frac{(x\ln a)^3}{3!}+\ldots+\frac{(x\ln a)^n}{n!}+\ldots$ | $\|x\| < \infty$ |

* $B_n$ son los números de Bernoulli (véase la pág. 347).
** $E_n$ son los números de Euler (véase la pág. 347).

| Función | Desarrollo en serie | Campo de convergencia |
|---|---|---|
| $\frac{x}{e^x-1}$ | $1-\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{2!}-\frac{B_2x^4}{4!}+\frac{B_3x^6}{6!}-\dots$ $\dots+(-1)^{n+1}\frac{B_nx^{2n}}{(2n)!}\pm\dots$* | $\lvert x\rvert<2\pi$ |
| | ***Funciones logarítmicas*** | |
| $\ln x$ | $2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{(x-1)^3}{3(x+1)^3}+\frac{(x-1)^5}{5(x+1)^5}+\dots\right.$ $\left.\dots+\frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)(x+1)^{2n+1}}+\dots\right]$ | $x>0$ |
| $\ln x$ | $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots$ $\dots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}\pm\dots$ | $0<x\leq 2$ |
| $\ln x$ | $\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\dots+\frac{(x-1)^n}{nx^n}+\dots$ | $x>\frac{1}{2}$ |
| $\ln(1+x)$ | $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\pm\dots$ | $-1<x\leq 1$ |
| $\ln(1-x)$ | $-\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots\right]$ | $-1\leq x<1$ |
| $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=$ $=2\,\mathrm{Arth}\,x$ | $2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\dots\right]$ | $\lvert x\rvert<1$ |
| $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=$ $=2\,\mathrm{Arcth}\,x$ | $2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\dots\right.$ $\left.\dots+\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}+\dots\right]$ | $\lvert x\rvert>1$ |
| $\ln\lvert\operatorname{sen}x\rvert$ | $\ln\lvert x\rvert-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}-\dots$ $\dots-\frac{2^{2n-1}B_nx^{2n}}{n(2n)!}-\dots$* | $0<\lvert x\rvert<\pi$ |
| $\ln\cos x$ | $-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\frac{17x^8}{2520}-\dots$ $\dots-\frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_nx^{2n}}{n(2n)!}-\dots$* | $\lvert x\rvert<\frac{\pi}{2}$ |

* $B_n$ son los números de Bernoulli (véase pág. 347).

| Función | Desarrollo en serie | Campo de convergencia |
|---|---|---|
| $\ln\lvert \operatorname{tg} x\rvert$ | $\ln\lvert x\rvert + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{90}x^4 + \frac{62}{2835}x^6 + \dots$ $\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n)!}x^{2n} + \dots$* | $0 < \lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$ |
| | *Funciones trigonométricas inversas* | |
| $\operatorname{arcsen} x$ | $x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots$ $\dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)(2n+1)} + \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\arccos x$ | $\frac{\pi}{2} - \left[x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \dots\right.$ $\left.\dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\dots(2n)(2n+1)} + \dots\right]$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| | $= \pm\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$ $\dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} \pm \dots$** | $\lvert x\rvert > 1$ |
| $\operatorname{arcctg} x$ | $\frac{\pi}{2} - \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\right.$ $\left.\dots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \dots\right]$ | $\lvert x\rvert < 1$ |
| | *Funciones hiperbólicas* | |
| $\operatorname{sh} x$ | $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$ | $\lvert x\rvert < \infty$ |
| $\operatorname{ch} x$ | $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ | $\lvert x\rvert < \infty$ |
| $\operatorname{th} x$ | $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \dots$ $\dots + \frac{(-1)^{n+1}2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1} \pm \dots$* | $\lvert x\rvert < \frac{\pi}{2}$ |

* $B_n$ son los números de Bernoulli (véase pág. 347).

** El primer término $\frac{\pi}{2}$ se toma con signo «+» para $x > 1$ y con signo «−» para $x < -1$.

| Función | Desarrollo en serie | Campo de convergencia |
|---|---|---|
| cth $x$ | $\frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}+\frac{2x^5}{945}-\frac{x^7}{4725}+\ldots$ | |
| | $\ldots+\frac{(-1)^{n+1}2^{2n}}{(2n)!}B_n x^{2n-1}\pm\ldots$* | $0<\|x\|<\pi$ |
| sch $x$ | $1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{5}{4!}x^4-\frac{61}{6!}x^6+\frac{1385}{8!}x^8-\ldots$ | |
| | $\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}E_n x^{2n}\pm\ldots$** | $\|x\|<\frac{\pi}{2}$ |
| csch $x$ | $\frac{1}{x}-\frac{x}{6}+\frac{7x^3}{360}-\frac{31x^5}{15120}+\ldots$ | |
| | $\ldots+\frac{2(-1)^n(2^{2n-1}-1)}{(2n)!}B_n x^{2n-1}+\ldots$* | $0<\|x\|<\pi$ |
| | *Funciones hiperbólicas inversas* | |
| Arsh $x$ | $x-\frac{1}{2\cdot3}x^3+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7+\ldots$ | |
| | $\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2n(2n+1)}x^{2n+1}\pm\ldots$ | $\|x\|<1$ |
| Arch $x$*** | $\pm\left[\ln(2x)-\frac{1}{2\cdot2x^2}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot4x^4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot6x^6}-\ldots\right]$ | $x>1$ |
| Arth $x$ | $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$ | $\|x\|<1$ |
| Arcth $x$ | $\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{7x^7}+\ldots$ | |
| | $\ldots+\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}+\ldots$ | $\|x\|>1$ |

* $B_n$ son los números de Bernoulli (véase pág. 347).
** $E_n$ son los números de Euler (véase pág. 347).
*** La función es biforme.

# III. CÁLCULO INTEGRAL

## A. INTEGRALES INDEFINIDAS

### *1. Conceptos y teoremas fundamentales*

FUNCIÓN PRIMITIVA. *Función primitiva* (o, simplemente, *primitiva*) de una función dada de una variable $y = f(x)$, definida en una región conexa, se llama a aquella función $F(x)$, definida en la misma región*, cuya derivada es igual a $f(x)$ [o, lo que es lo mismo, cuya diferencial es igual a $f(x)\,dx$]:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ó} \quad dF(x) = f(x)\,dx.$$

Para la función dada hay un conjunto infinito de funciones primitivas; la diferencia entre dos funciones primitivas $F_1(x)$ y $F_2(x)$ es una cantidad constante. Las gráficas de todas las funciones primitivas $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... de la dada representan una misma curva y se obtienen una de otra como resultado de una traslación paralela de la curva en dirección del eje de las ordenadas, hacia uno u otro lado (fig. 299).

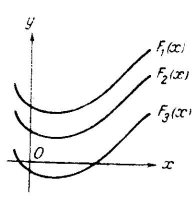



Fig. 299

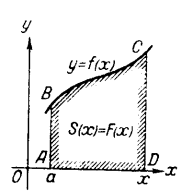



Fig. 300

---

* En algunos casos, el campo de definición de la función primitiva es más amplio que el campo de definición de la función inicial. Si el campo de definición de la función $f(x)$ es conexo, a excepción de algunos puntos aislados de discontinuidad $x_1, x_2, \ldots, x_n$, entonces el campo de definición de la primitiva $F(x)$ puede contener aun estos puntos de discontinuidad (véase la pág. 386).

*Interpretación geométrica de la primitiva.* Si la función dada $f(x)$, está representada por una curva en coordenadas cartesianas (fig. 300), entonces el valor numérico de la primitiva es igual al área $S(x)$ limitada por la curva $y = f(x)$, por el eje $Ox$ y por las dos ordenadas: por la constante $AB$ (para $x = a$) y por la variable $CD$ (para la abscisa $x$). Eligiendo arbitrariamente la constante $a$ se obtienen diferentes primitivas. En este caso, el área $S(x)$ se entiende en el sentido algebraico*.

*Teorema de existencia de la primitiva.* Para toda función continua en una región conexa, existe una primitiva también continua en esta región. Una función que tiene discontinuidades para algunos valores aislados de $x$, tiene una primitiva que es una función continua o es una función que tiene discontinuidades para los mismos valores de $x$**.

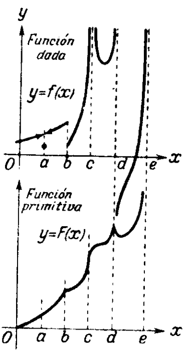


Fig. 301

*Ejemplos:*

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad F(x) = 3\sqrt[3]{x};$

2) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad F(x) = -\frac{1}{x};$

en ambos ejemplos la función $f(x)$ tiene una discontinuidad para $x = 0$; en cambio, la función $F(x) = 3\sqrt[3]{x}$ es continua, mientras que $F(x) = -\frac{1}{x}$ también es discontinua para $x = 0$.

Véase en fig. 301 el comportamiento de la gráfica de la función primitiva $F(x)$ en los diferentes puntos de discontinuidad de la función dada $f(x)$. En el caso de una discontinuidad evitable ($a$) de $f(x)$ o de una discontinuidad finita ($b$), la primitiva es continua; en el caso de una discontinuidad infinita de $f(x)$ la primitiva puede ser continua [la curva $F(x)$ tiene un punto de inflexión ($c$) o un punto de retroceso ($d$) con tangente vertical] o puede tener también una discontinuidad ($e$). Véase en las págs. 458-462 el criterio analítico del caso que tiene lugar.

INTEGRAL INDEFINIDA. La expresión general $F(x)+C$ para todas las funciones primitivas de una función dada $f(x)$, se llama *integral indefinida* de la función $f(x)$ o de la diferencial $f(x)\,dx$. La designación es:

$$F(x)+C = \int f(x)\,dx.$$

---

* Véase en a pág. 442 el área de la figura $ABCD = \int_a^x f(x)\,dx$.

** Véase la llamada de la página anterior.

($\int$ *es el signo de la integral,* $f(x)$ *es la función integrando,* $f(x)\,dx$ *es la expresión integrando*).

Siempre se puede tomar por primitiva $F(x)$ la integral definida (véase la pág. 442) con el límite inferior constante (arbitrario) y con el límite superior variable.

LAS INTEGRALES DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES no son siempre funciones elementales. En las págs. 387-404 se exponen métodos para el cálculo de las integrales (métodos de *integración*) de las funciones más simples que tienen primitivas elementales; los resultados de la integración se dan en las tablas de las págs. 404-439*.

Si la integral no es una función elemental, entonces, en caso de necesidad (en caso de interés teórico o de una frecuente aplicación en la práctica), se forman para esta función tablas de valores; a tales funciones especiales (al fijar la constante arbitraria estableciendo el límite inferior) se les dan frecuentemente denominaciones especiales; por ejemplo:

$$\int_0^x \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}\,(x)$$ ("el logaritmo integral")

$$\int_0^{\operatorname{sen}\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(k, \varphi)$$ ("la integral elíptica de primera especie")**.

Si una función no se integra elementalmente o su integración es demasiado complicada, entonces, frecuentemente, la función integrando se desarrolla en serie (véase la pág. 377) la cual (en el caso de su convergencia uniforme, véase la pág. 348) se puede integrar término a término. Para la integración aproximada se puede sustituir la función por un polinomio (véase la pág. 660)***.

## 2. *Reglas generales de integración*

INTEGRALES FUNDAMENTALES. Las fórmulas de integración que se obtienen invirtiendo las fórmulas fundamentales de derivación (pág. 359) vienen dadas en la tabla de la pág. 389. En la práctica, la integral

* En lo sucesivo, la palabra "primitiva" será reemplazada en todas partes por la palabra "integral", pero en las tablas de integrales, para abreviar, la constante arbitraria $C$ se omitirá en todas partes.

** Véanse en la pág. 399 las integrales elípticas.

*** Véase en la pág. 448 la integración gráfica, o sea la construcción de la gráfica de la función primitiva, según la gráfica de la función dada.

en cuestión se procura reducir a estas integrales mediante transformaciones algebraicas o trigonométricas, o mediante la aplicación de las reglas de integración.

Las reglas fundamentales de integración se basan en las propiedades de las integrales indefinidas que permiten transformar la integral de una función dada en integrales de otras funciones:

1) *El factor constante* se puede sacar fuera del signo de la integral:

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

2) *La integral de la suma (de la diferencia)* es igual a la suma (respectivamente a la diferencia) de las integrales de los términos separados:

$$\int (u+v-w)\, dx = \int u\, dx + \int v\, dx - \int w\, dx^{*}.$$

3) Regla de la *sustitución:* si $x = \varphi(t)$, se tiene:

$$\int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\, dt.$$

4) "*Integración por partes*"

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du^{**}.$$

Indicaciones generales para el cálculo de integrales. No se puede dar una regla general para el cálculo de la integral de cualquier función elemental; la técnica de integración se adquiere con la práctica. En los párrafos siguientes se estudian sistemáticamente los métodos de integración de las clases más simples de funciones elementales; en las págs. 404-439 vienen insertadas las tablas de integrales en las que se debe buscar la integral dada o la más próxima a ella.

Entre los métodos generales que se aplican con más frecuencia en el cálculo de integrales, se pueden indicar los siguientes:

1) Mediante transformaciones algebraicas o trigonométricas se representa la función integrando como la suma de varias funciones y se divide la integral en una suma de integrales.

*Ejemplos:*

$$\int (x+3)^2 (x^2+1)\, dx = \int (x^4+6x^3+10x^2+6x+9)\, dx = \frac{x^5}{5}+\frac{3}{2}x^4+ \\ +\frac{10}{3}x^3+3x^2+9x+C.$$

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos x\, dx = \int \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x)\, dx = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x + C.$$

---

* $u, v, w$ son funciones de $x$.

** $u, v$ son funciones de $x$.

## TABLA DE LAS INTEGRALES PRINCIPALES

(Aqui y en las tablas sucesivas se omiten las constantes de integración)

| Funciones potenciales | Funciones exponenciales |
|---|---|
| $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$ | $\int e^x\,dx = e^x$ |
| $\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert$ | $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$ |
| **Funciones trigonométricas** | **Funciones hiperbólicas** |
| $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$ | $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x$ |
| $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ | $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$ |
| $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln \cos x^*$ | $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x^*$ |
| $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln \operatorname{sen} x^*$ | $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln \operatorname{sh} x^*$ |
| $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$ | $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x$ |
| $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x$ | $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x$ |
| **Funciones racionales fraccionarias** | **Funciones irracionales** |
| $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$ |
| $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}\,^*$ (para $\lvert x \rvert < a$) | $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} = \ln \left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)^*$ |
| $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}\,^*$ (para $\lvert x \rvert > a$) | $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Arch} \frac{x}{a} = \ln \left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)^*$ |

* En todas las fórmulas en que en la composición de la función primitiva figura una expresión que contiene el $\ln f(x)$, se debe entender que se trata de $\ln \lvert f(x) \rvert$; para simplificar, el signo del valor absoluto está omitido en todas partes.

2) Si es sabido (por ejemplo, por las tablas) que $\int f(x)\,dx = F(x)$, entonces

$$\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax)+C, \quad \int f(x+b)\,dx = F(x+b)+C,$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

*Ejemplos:*

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C,$$

$$\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+C, \quad \int \frac{dx}{1+(x+a)^2} = \operatorname{arctg}(x+a)+C.$$

3) Si la expresión integrando es una fracción, cuyo numerador es la diferencial del denominador, la integral es igual al logaritmo del denominador:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln f(x)+C^*.$$

*Ejemplo:*

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5}\,dx = \ln(x^2+3x-5)+C.$$

## 3. *Integración de las funciones racionales*

Las funciones racionales **siempre** se integran, es decir, se reducen a funciones elementales.

REGLAS GENERALES. *La función racional entera (el polinomio)* se integra directamente:

$$\int (a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-1}x+a_n)\,dx =$$

$$= \frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\ \ldots\ +\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx+C.$$

LA FUNCIÓN RACIONAL FRACCIONARIA $\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx$ [en que $Q(x)$ y $P(x)$ son dos polinomios de grados $m$ y $n$, respectivamente] se transforma algebraicamente a un tipo adecuado para la integración, de la siguiente manera:

1) se efectúan las simplificaciones necesarias para que los polinomios $Q(x)$ y $P(x)$ no tengan factores comunes;

2) si $m \geqslant n$, entonces, dividiendo $Q(x)$ por $P(x)$, se separa la parte entera de la fracción (véase la pág 142), la cual se integra como un

* Véase la llamada de la página anterior.

polinomio, quedando por integrar el resto, que es una fracción propia en la cual $m < n$;

3) el denominador $P(x)$ se descompone en factores lineales y cuadráticos (véase la pág. 158):

$$P(x) = a_0(x-\alpha)^k (x-\beta)^l \dots (x^2+px+q)^r (x^2+p'x+q')^s \dots,$$

donde

$$\frac{p^2}{4}-q < 0, \qquad \frac{p'^2}{4}-q' < 0, \dots;$$

4) el coeficiente $a_0$ del denominador se saca fuera del signo de la integral;

5) la fracción propia irreducible obtenida, cuyo denominador está descompuesto en factores simples, se transforma en una suma de fracciones «simples» (véase la pág. 145) que se integran fácilmente. Pueden presentarse cuatro casos:

1. Todas las raíces del denominador son *reales y simples:*

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \dots (x-\lambda).$$

La descomposición tiene la forma: $\dfrac{Q(x)}{P(x)} = \dfrac{A}{x-\alpha}+\dfrac{B}{x-\beta}+ \dots +\dfrac{L}{x-\lambda}$,
donde

$$A = \frac{Q(\alpha)}{P'(\alpha)}, \qquad B = \frac{Q(\beta)}{P'(\beta)}, \dots, \qquad L = \frac{Q(\lambda)}{P'(\lambda)}\text{*}.$$

La integración se efectúa según la fórmula

$$\int \frac{A\,dx}{x-\alpha} = A \ln(x-\alpha), \qquad \text{etc.}$$

*Ejemplo:*

$$I = \int \frac{(2x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}; \qquad \frac{2x+3}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$A = \frac{Q(0)}{P'(0)} = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=0} = -\frac{3}{2}, \qquad B = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=1} = \frac{5}{3},$$

$$C = \left(\frac{2x+3}{3x^2+2x-2}\right)_{x=-2} = -\frac{1}{6},$$

$$I = \int \left(\frac{-\frac{3}{2}}{x}+\frac{\frac{5}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{6}}{x+2}\right) dx = -\frac{3}{2}\ln x +$$

$$+\frac{5}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x+2)+C_1 = \ln\frac{C_1(x-1)^{5/3}}{x^{3/2}(x+2)^{1/6}}.$$

---

* Los números $A, B, \dots, L$ también pueden obtenerse por el método de los coeficientes indeterminados (véase la pág. 146).

2. Todas las raíces del denominador son *reales* y entre ellas hay *múltiples:*

$$P(x) = (x-\alpha)^l (x-\beta)^m \dots$$

La descomposición tiene la forma:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \dots + \\ + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \dots$$

Las constantes $A_1, A_2, \dots, A_l, B_1, B_2, \dots, B_m, \dots$ se calculan por el método de los coeficientes indeterminados (véase la pág. 146); la integración se efectúa por fórmulas

$$\int \frac{A_1\,dx}{x-\alpha} = A_1 \ln(x-\alpha), \qquad \int \frac{A_k\,dx}{(x-\alpha)^k} = -\frac{A_k}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} \quad (k > 1).$$

*Ejemplo:*

$$I = \int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx; \qquad \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}.$$

El método de los coeficientes indeterminados da las ecuaciones

$$A+B_1 = 1, \quad -3A-2B_1+B_2 = 0, \quad 3A+B_1-B_2+B_3 = 0, \\ -A = 1,$$

de donde

$$A = -1, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = 1, \quad B_3 = 2;$$

$$I = \int \left[ -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3} \right] dx =$$

$$= -\ln x + 2\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C = \ln\frac{(x-1)^2}{x} - \frac{x}{(x-1)^2} + C.$$

3. Entre las raíces del denominador hay *complejas simples:*

$$P(x) = (x-\alpha)^l (x-\beta)^m \dots (x^2+px+q)(x^2+p'x+q') \dots,$$

siendo

$$\frac{p^2}{4} < q, \quad \frac{p'^2}{4} < q', \dots$$

La descomposición tiene la forma:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_l}{(x-\alpha)^l} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \dots + \\ + \frac{B_m}{(x-\beta)^m} + \dots + \frac{Cx+D}{x^2+px+q} + \frac{Ex+F}{x^2+p'x+q'} + \dots$$

Las constantes se calculan por el método de los coeficientes indeterminados (véase la pág. 146).

La integración de la expresión $\frac{Cx+D}{x^2+px+q}$ se efectúa por la fórmula

$$\int \frac{(Cx+D)\,dx}{x^2+px+q} = \frac{C}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{D-\frac{Cp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}.$$

*Ejemplo:*

$$I = \int \frac{4\,dx}{x^3+4x}; \quad \frac{4}{x^3+4x} = \frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

El método de los coeficientes indeterminados da las ecuaciones:

$$A+C = 0, \quad D = 0, \quad 4A = 4,$$

de donde

$$A = 1, \quad C = -1, \quad D = 0;$$

$$I = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}\right)dx = \ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+\ln C_1 = \ln\frac{C_1 x}{\sqrt{x^2+4}}$$

(en el caso dado falta el término que contiene el arco tangente).

4. El denominador tiene raíces *complejas múltiples:*

$$P(x) = (x-\alpha)^k(x-\beta)^l \ldots (x^2+px+q)^m(x^2+p'x+q')^n \ldots$$

La descomposición tiene la forma:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^2}+\ldots+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+\ldots+\frac{B_l}{(x-\beta)^l}+$$
$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}+$$
$$+\frac{E_1x+F_1}{x^2+p'x+q'}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+p'x+q')^2}+\ldots+\frac{E_nx+F_n}{(x^2+p'x+q')^n}+\ldots$$

Las constantes se calculan por el método de los coeficientes indeterminados (véase la pág. 146).

La integración de la expresión $\frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}$ se efectúa de la siguiente manera. Se transforma el numerador:

$$C_mx+D_m = \frac{C_m}{2}(2x+p)+\left(D_m-\frac{C_m p}{2}\right).$$

La integral buscada se descompone en dos sumandos. El primero de ellos se integra inmediatamente:

$$\int \frac{C_m}{2} \frac{(2x+p)\,dx}{(x^2+px+q)^m} = -\frac{C_m}{2(m-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}},$$

y el segundo (sin el coeficiente), por la fórmula de reducción del exponente:

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \frac{x+\frac{p}{2}}{2(m-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)(x^2+px+q)^{m-1}} +$$

$$+\frac{2m-3}{2(m-1)\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m-1}}. \qquad (*)$$

*Ejemplo:*

$$I = \int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx; \qquad \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}.$$

El método de los coeficientes indeterminados da el sistema de ecuaciones

$$A+C_1 = 0, \quad -2C_1+D_1 = 0, \quad 2A+C_1-2D_1+C_2 = 2,$$
$$-2C_1+D_1-2C_2+D_2 = 2, \quad A-2D_1-2D_2 = 13,$$

de donde

$$A = 1, \quad C_1 = -1, \quad D_1 = -2, \quad C_2 = -3, \quad D_2 = -4$$

y

$$I = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}\right) dx = \ln(x-2) -$$
$$-\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+2\,\mathrm{arctg}\,x\right] - \left[-\frac{3}{2(x^2+1)} + \int \frac{4\,dx}{(x^2+1)^2}\right].$$

Pero, según la fórmula $(*)$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x,$$

de donde, finalmente, tenemos:

$$I = \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

SEPARACIÓN DE LA PARTE RACIONAL DE LA INTEGRAL *(método de Ostrogradski)*. La integral de una función racional fraccionaria es una función elemental, la cual es la suma de una *parte racional* (es decir, de una fracción algebraica) y de una *parte trascendente* (que contiene logaritmos y arcotangentes); además, la parte racional sólo aparece en el 2° y en el 4° casos estudiados, es decir, solamente cuando el denominador de la función integrando tiene raíces **múltiples** (reales o complejas). La parte racional se puede determinar sin integración por el *método de Ostrogradski*, reduciendo el cálculo de la integral a los casos en que el denominador sólo tiene raíces simples. El método consiste en lo siguiente.

El denominador $P(x)$ de la función integrando $\frac{Q(x)}{P(x)}$ (de la fracción **propia** irreducible, véase la pág. 391) tiene la forma:

$$P(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \ldots (x^2+px+q)^m (x^2+p'x+q')^n \ldots$$

Este puede descomponerse en dos factores $P_1(x)$ y $P_2(x)$, donde $P_2(x)$ es el producto de todos los factores pertenecientes a $P(x)$ y tomados a la primera potencia:

$$P_2(x) = (x-\alpha)(x-\beta) \ldots (x^2+px+q)(x^2+p'x+q') \ldots,$$

y, por consiguiente,

$$P_1(x) = (x-\alpha)^{k-1} (x-\beta)^{l-1} \ldots (x^2+px+q)^{m-1} (x^2+p'x+q')^{n-1} \ldots^*$$

La integral dada se puede representar en la forma

$$\int \frac{Q(x)}{P(x)}\,dx = \frac{Q_1(x)}{P_1(x)} + \int \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}\,dx \qquad \text{(A)}$$

*(fórmula de Ostrogradski)*, donde $P(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ son polinomios conocidos de grados $r$, $s$ y $t$, respectivamente; $Q(x)$ es el polinomio conocido de grado no msyor a $r-1$ y $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ son polinomios desconocidos de grados no mayores a $s-1$ y $t-1$, correspondientemente:

$$Q_1(x) = ax^{s-1}+bx^{s-2}+ \ldots +d, \quad Q_2(x) = ex^{t-1}+fx^{t-2}+ \ldots +h.$$

Derivando (A), se obtiene:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \left[\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}\right]' + \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}. \qquad \text{(B)}$$

Los coeficientes desconocidos de los polinomios $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ se determinan de las ecuaciones (B) por el método de los coeficientes indeterminados.

---

* La búsqueda de los polinomios $P_1(x)$ y $P_2(x)$ no presenta dificultades, si es conocida la descomposición de $P(x)$ en factores; es decir, si están determinadas todas las raíces de la ecuación $P(x) = 0$. Pero se pueden hallar $P_1(x)$ y $P_2(x)$ sin resolver esta ecuación; para ello es suficiente derivar el polinomio $P(x)$ y hallar el máximo común divisor de los polinomios $P(x)$ y $P'(x)$ (véase la pág. 143). Este máximo común divisor es igual a $P_1(x)$ y $P_2(x) = \frac{P(x)}{P_1(x)}$.

Una vez hallados los polinomios $Q_1(x)$, $P_1(x)$, $Q_2(x)$, $P_2(x)$, reducimos el cálculo de la integral dada a la integral $\int \frac{Q_2(x)}{P_2(x)}\,dx$, en la que el denominador de la función integrando no tiene raíces múltiples.

*Ejemplo:* $\int \frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$

Aquí $P_1 = P_2 = (x+1)(x^2+1) = x^3+x^2+x+1$, $\quad P = (x^3+x^2+x+1)^2$, $Q = x^4+x^3+4x^2+3x+2$, $\quad Q_1 = ax^2+bx+c$, $\quad Q_2 = ex^2+fx+g$.

La fórmula (B) da:

$$\frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x^3+x^2+x+1)^2} = \left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]' + \frac{ex^2+fx+g}{x^3+x^2+x+1},$$

de donde

$$x^4+x^3+4x^2+3x+2 = (2ax+b)(x^3+x^2+x+1)-$$
$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)+(ex^2+fx+g)(x^3+x^2+x+1).$$

Identificando en ambos miembros los coeficientes de potencias iguales de $x$, obtenemos un sistema de ecuaciones con respecto a: $a, b, c, e, f, g$:

1) $e = 0$, 2) $-a+f = 1$, 3) $-2b+f+g = 1$, 4) $a-b-3c+f+g = 4$. 5) $2a-2c+f+g = 3$, 6) $b-c+g = 2$ [en las ecuaciones 2) $-6$) se ha omitido el coeficiente $e = 0$]; de donde $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = -1$, $e = 0$, $f = \frac{3}{4}$, $g = \frac{3}{4}$.

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^4+x^3+4x^2+3x+2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{4}\,\frac{x^2-x+4}{x^3+x^2+x+1} + \frac{3}{4}\int \frac{x+1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

La última integral es igual a arctg $x$.

Véanse en las págs. 404-411 las **tablas de integrales** de las funciones racionales.

## *4. Integración de funciones irracionales*

Las funciones irracionales **no siempre** se integran en funciones elementales. En los casos más simples las integrales de las funciones irracionales pueden reducirse a integrales de funciones racionales mediante las siguientes sustituciones:

| Integral* | Sustitución |
|---|---|
| $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right) dx$ | $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t$ |
| $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}}, \ldots\right) dx$ | $\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t$, donde $r$ es el mínimo común múltiplo de los números $n$, $m$, ... |
| $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ | Una de las tres *sustituciones de Euler:* |
| 1) si $a > 0$** | $\sqrt{ax^2+bx+c} = t-\sqrt{a}x$ |
| 2) si $c > 0$ | $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt+\sqrt{c}$ |
| 3) si el trinomio $ax^2+bx+c$ tiene raíces reales distintas: $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ | $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$ |

* El símbolo $R$ denota una función **racional** de las expresiones a que él se refiere. Los números $n$, $m$, ... son enteros.

** Si $a < 0$ y el trinomio $ax^2+bx+c$ tiene raíces imaginarias, entonces la función integrando no existe para ningún valor de $x$, pues $\sqrt{ax^2+bx+c}$ es imaginario para todos los valores reales de $x$. En este caso, la integración no presenta interés alguno.

La integral $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ también puede reducirse a uno de los tres tipos siguientes:

$$\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2})\, dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2-\alpha^2})\, dx, \quad \int R(x, \sqrt{\alpha^2-x^2})\, dx,$$

puesto que el trinomio cuadrático $ax^2+bx+c$ siempre puede representarse como la suma o la diferencia de dos cuadrados.

*Ejemplos:*

1) $4x^2+16x+17 = 4\left(x^2+4x+4+\frac{1}{4}\right) =$

$$= 4\left[(x+2)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = 4\left[x_1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right], \text{ donde } x_1 = x+2;$$

2) $x^2+3x+1 = x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{5}{4} = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-$

$$-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = x_1^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2, \text{ donde } x_1 = x+\frac{3}{2};$$

3) $-x^2+2x = 1-x^2+2x-1 = 1^2-(x-1)^2 = 1^2-x_1^2,$

donde $x_1 = x-1$.

Estas integrales se calculan mediante las sustituciones siguientes:

| Integral | Sustitución |
|---|---|
| $\int R(x, \sqrt{x^2+\alpha^2})\,dx$ | $x = \alpha \operatorname{sh} t$ ó $x = \alpha \operatorname{tg} t$ |
| $\int R(x, \sqrt{x^2-\alpha^2})\,dx$ | $x = \alpha \operatorname{ch} t$ ó $x = \alpha \sec t$ |
| $\int R(x, \sqrt{\alpha^2-x^2})\,dx$ | $x = \alpha \operatorname{sen} t$ ó $x = \alpha \cos t$ |

Mediante las sustituciones indicadas se obtienen integrales de expresiones racionales que contienen funciones trigonométricas e hiperbólicas (véase la pág. 401 ó 403).

LA INTEGRACIÓN DE DIFERENCIALES BINOMIAS. Se llama *diferencial binomia* a la expresión

$$x^m (a+bx^n)^p\,dx,$$

donde $a$, $b$ son números reales arbitrarios y $m$, $n$, $p$ son números racionales arbitrarios (positivos o negativos).

*Teorema de Chébichev*. La integral

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx \qquad (*)$$

puede expresarse mediante las funciones elementales **sólo** en los tres casos siguientes:

1) $p$ es un *número entero*. La expresión $(a+bx^n)^p$ se desarrolla según la fórmula del binomio de Newton (véase la pág. 187) y la función integrando, después de abrir paréntesis, representa una suma de términos de la forma $cx^k$ que son fáciles de integrar.

2) $\frac{m+1}{n}$ es un *número entero*. La integral $(*)$ se reduce a la integral de una función racional mediante la sustitución $t = \sqrt[r]{a+bx^n}$, donde $r$ es el denominador de la fracción $p$.

3) $\frac{m+1}{n}+p$ es un *número entero*. La integral $(*)$ se reduce a la integral de una función racional mediante la sustitución $t = \sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, donde $r$ es el denominador de la fracción $p$.

*Ejemplos:*

1) $$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}\,dx;$$

$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{3}, \quad \frac{m+1}{n} = 2 \text{ (el caso 2).}$$

La sustitución es $t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$, $x = (t^3-1)^4$, $dx = 12t^2(t^3-1)^3\,dt$,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 12\int (t^6-t^3)\,dt = \frac{3}{7}t^4(4t^3-7)+C.$$

2) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[4]{1+x^3}} = \int x^3(1+x^3)^{-1/4}\,dx;$$

$$m = 3, \quad n = 3, \quad p = -\frac{1}{4}; \quad \frac{m+1}{n} = \frac{4}{3}, \quad \frac{m+1}{n}+p = \frac{13}{12};$$

no se cumple ninguna de las condiciones 1), 2), 3) y la integral no es una función elemental.

INTEGRALES ELÍPTICAS. LAS integrales del tipo

$$\left.\begin{aligned} &\int R\left(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+\partial}\right)dx \\ \text{y}\qquad &\int R\left(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+\partial x+e}\right)dx, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A)}$$

no se expresan generalmente mediante funciones elementales. En los casos en que estas integrales no son funciones elementales éstas se llaman *elípticas**.

Las integrales de los tipos (A), que no se expresan mediante las funciones elementales, pueden reducirse mediante una serie de transformaciones a funciones elementales y a integrales de los tres tipos siguientes:

$$\left.\begin{aligned} &\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ &\int \frac{dt}{(1+ht^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \end{aligned}\right\} \quad (0 < k < 1). \qquad \text{(B)}$$

* En los casos en que las integrales (A) se pueden expresar mediante funciones elementales se llaman *seudoelípticas*.

Mediante la sustitución $t = \operatorname{sen}\varphi\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, las integrales (B) pueden reducirse a la *forma de Legendre* siguiente:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \qquad \textit{(integral elíptica de } 1^a \textit{ especie)},$$

$$\int \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi \qquad \textit{(integral elíptica de } 2^a \textit{ especie)},$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h \operatorname{sen}^2 \varphi)\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \qquad \textit{(integral elíptica de } 3^a \textit{ especie)}.$$

Las integrales definidas correspondientes, con límite inferior igual a cero, se designan con los siguientes símbolos:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I)} \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} = F(k, \varphi),\\
&\text{II)} \quad \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}\, d\psi = E(k, \varphi),\\
&\text{III)} \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{(1+h \operatorname{sen}^2 \psi)\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}} = \Pi(h, k, \varphi).
\end{aligned}\right\} \quad (k < 1).$$

Estas se llaman *integrales elípticas incompletas* de 1ª, 2ª y 3ª especie respectivamente. Para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ las integrales I y II se llaman *integrales elípticas completas* y se designan:

$$K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}}, \quad E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 \psi}\, d\psi.$$

Véase en las págs. 85-86 la tabla de los valores de las integrales elípticas completas e incompletas de 1ª y de 2ª especie.

Véanse en las págs. 411-423 **las tablas de integrales de las funciones irracionales.**

## 5. *Integración de funciones trigonométricas*

La integral de la forma

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx^{*} \qquad \text{(A)}$$

siempre puede ser reducida a la integral de una función racional mediante la "sustitución universal" dada más adelante, y en algunos casos, por procedimientos más simples.

LA SUSTITUCIÓN UNIVERSAL para la integral (A) es:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \text{de donde} \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Por ejemplo:

$$\int \frac{1+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x(1+\cos x)}\, dx = \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2}\int \left(t+2+\frac{1}{t}\right) dt =$$

$$= \frac{t^2}{4}+t+\frac{1}{2}\ln t+C = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{4}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

Si en la función integrando de la integral (A), el $\operatorname{sen} x$ y el $\cos x$ están elevados sólo a potencias *pares*, entonces esta integral se reduce más fácilmente a una integral de una función racional mediante la sustitución $t = \operatorname{tg} x$.

MÉTODOS SENCILLOS para algunos casos que aparecen frecuentemente:

1) $\int R(\operatorname{sen} x) \cos x\, dx$. La sustitución $t = \operatorname{sen} x$, $\cos x\, dx = dt$.

2) $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x\, dx$. La sustitución $t = \cos x$, $\operatorname{sen} x\, dx = -dt$.

3) $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$.

Si $n$ es impar ($n = 2m+1$),

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \int (1-\cos^2 x)^m \operatorname{sen} x\, dx = -\int (1-t^2)^m\, dt, \quad \text{donde}$$
$$t = \cos x$$

---

* El símbolo $R$ representa una función racional de las expresiones a que él se refiere.

Si $n$ es par ($n = 2m$),

$$\int \operatorname{sen}^n x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^m dx = \frac{1}{2^{m+1}} \int (1-\cos t)^m\, dt, \text{ donde } t = 2x.$$

El grado se reduce dos veces; abriendo paréntesis en $(1-\cos t)^m$, integramos cada término (véase el caso 4 más adelante).

4) $\int \cos^n x\, dx$.

Si $n$ es impar ($n = 2m+1$),

$$\int \cos^n x\, dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^m \cos x\, dx = \int (1-t^2)^m\, dt, \quad \text{donde } t = \operatorname{sen} x.$$

Si $n$ es par ($n = 2m$),

$$\int \cos^n x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^m dx = \frac{1}{2^{m+1}} \int (1+\cos t)^m\, dt, \text{ donde } t = 2x.$$

El grado se reduce dos veces; abriendo paréntesis integramos cada término.

5) $\int \operatorname{sen}^n x \cos^m x\, dx$ se reduce a los casos 1) ó 2) si al menos uno de los números $m$ ó $n$ es impar.

*Ejemplos:*

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 x (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\, dx =$$

$$= \int t^2(1-t^2)^2\, dt, \quad \text{donde } t = \operatorname{sen} x; \quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\, dx = -\int \frac{dx}{\sqrt{t}},$$

donde $t = \cos x$.

Si ambos números $m$ y $n$ son pares, se pueden reducir dos veces los grados análogamente a los casos 3) y 4). En este caso se emplean las fórmulas

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

*Ejemplo:*

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\, dx +$$

$$+ \frac{1}{16} \int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x + C.$$

6) $\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \operatorname{tg}^{n-2} x d \operatorname{tg} x -$ $- \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$, etc. Reiterando este procedimiento, reducimos la integral para $n$ par a la integral $\int dx = x$ y para $n$ impar a la integral $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln \cos x$.

7) $\int \operatorname{ctg}^n x\, dx$ se integra análogamente al caso 6).

Véanse en las págs. 423-433 **las tablas de integrales de las funciones trigonométricas.**

## 6. *Integración de otras funciones trascendentes*

FUNCIONES EXPONENCIALES. Las integrales del tipo

$$\int R(e^{mx}, e^{nx}, \ldots, e^{px})\, dx,$$

donde $m, n, \ldots, p$ son números racionales, mediante la sustitución $t = e^x$ se reducen a la integral $\int \frac{1}{t} R(t^m, t^n, \ldots, t^p)\, dt$; ésta última se reduce a la integral de una función racional (véase la pág. 390) mediante la sustitución $z = \sqrt[r]{t}$, donde $r$ es el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones $m, n, \ldots, p$.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS. Las integrales que contienen $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ se calculan ordinariamente mediante el reemplazo de las funciones hiperbólicas por las exponenciales (pág. 223). Los casos más empleados $\int \operatorname{sh}^n x\, dx$, $\int \operatorname{ch}^n x\, dx$, $\int \operatorname{sh}^n x \operatorname{ch}^m x\, dx$ se integran por métodos análogos a los que se aplicaron a las integrales de las funciones trigonométricas (págs. 401-403).

APLICACIÓN DE LA INTEGRACIÓN POR PARTES. Las funciones que contienen logaritmos, funciones trigonométricas inversas, funciones hiperbólicas inversas, productos de $x^m$ por $\ln x$, $e^{ax}$, $\operatorname{sen} ax$ ó $\cos ax$, se integran fundamentalmente aplicando (una o varias veces) las fórmulas de integración por partes (pág. 388). En algunos casos, al aplicar la integración por partes varias veces, aparece de nuevo la integral inicial y entonces el cálculo de esta integral se reduce a la resolución de una ecuación algebraica; así se calculan, por ejemplo, las integrales $\int e^{ax} \cos bx\, dx$, $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\, dx$ (en estas integrales se aplica dos veces la integración por partes, además como factor $u$ se toma en ambos casos la función del mismo tipo: la exponencial o la trigonométrica).

En los casos $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\operatorname{sen} bx\,dx$, $\int P(x)\cos bx\,dx$, donde $P(x)$ es un polinomio, también se aplica la fórmula de integración por partes.

Véanse en las págs. 433-439 **las tablas de integrales** de las funciones trascendentes.

## *7. Tabla de integrales indefinidas*

### Indicaciones generales

1. La constante de integración se ha omitido siempre a excepción de los casos en que la integral puede expresarse en formas distintas con diferentes constantes arbitrarias.

2. En todas las fórmulas en que en la composición de la función primitiva figura una expresión que contiene $\ln f(x)$, a este último se le debe entender como $\ln |f(x)|$; por simplificar se ha omitido en todas partes el signo del valor absoluto.

3. En aquellos casos en que la función primitiva está expresada en forma de una serie de potencias, ella no se expresa mediante funciones elementales.

### Integrales de funciones racionales

*Integrales que contienen $ax+b$*

$$\boxed{\text{Notación: } X = ax+b}$$

1) $\int X^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}X^{n+1}$ $(n \neq -1$; para $n = -1$, véase N° 2).

2) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a}\ln X.$

3) $\int xX^n\,dx = \frac{1}{a^2(n+2)}X^{n+2} - \frac{b}{a^2(n+1)}X^{n+1}$
$(n \neq -1, \neq -2$; para $n = -1, = -2$ véanse N° 5 y N° 6).

4) $\int x^m X^n\,dx = \frac{1}{a^{m+1}}\int (X-b)^m X^n\,dX$ (se aplica para $m < n$ o para $m$ entero y $n$ fraccionario; en estos casos $(X-b)^m$ se desarrolla según la fórmula del binomio de Newton, pág. 187) $(n \neq -1, \neq -2, \ldots$ $\ldots, \neq -m)$.

5) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln X.$

6) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{b}{a^2X} + \frac{1}{a^2}\ln X.$

7) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{X}+\frac{b}{2X^2}\right).$

8) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{-1}{(n-2)X^{n-2}}+\frac{b}{(n-1)X^{n-1}}\right) \quad (n \neq 1,\ \neq 2).$

9) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{X} = \frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{2}X^2-2bX+b^2\ln X\right).$

10) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \frac{1}{a^3}\left(X-2b\ln X-\frac{b^2}{X}\right).$

11) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^3}\left(\ln X+\frac{2b}{X}-\frac{b^2}{2X^2}\right).$

12) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^3}\left[\frac{-1}{(n-3)X^{n-3}}+\frac{2b}{(n-2)X^{n-2}}-\frac{b^2}{(n-1)X^{n-1}}\right]$

$(n \neq 1,\ \neq 2,\ \neq 3).$

13) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{X} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^3}{3}-\frac{3bX^2}{2}+3b^2X-b^3\ln X\right).$

14) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \frac{1}{a^4}\left(\frac{X^2}{2}-3bX+3b^2\ln X+\frac{b^3}{X}\right).$

15) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{X^3} = \frac{1}{a^4}\left(X-3b\ln X-\frac{3b^2}{X}+\frac{b^3}{2X^2}\right).$

16) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{X^4} = \frac{1}{a^4}\left(\ln X+\frac{3b}{X}-\frac{3b^2}{2X^2}+\frac{b^3}{3X^3}\right).$

17) $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{X^n} = \frac{1}{a^4}\left[\frac{-1}{(n-4)X^{n-4}}+\frac{3b}{(n-3)X^{n-3}}-\frac{3b^2}{(n-2)X^{n-2}}+\frac{b^3}{(n-1)X^{n-1}}\right]$

$(n \neq 1,\ n \neq 2,\ n \neq 3,\ n \neq 4).$

18) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX} = -\frac{1}{b}\ln\frac{X}{x}.$

19) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^2} = -\frac{1}{b^2}\left(\ln\frac{X}{x}+\frac{ax}{X}\right).$

20) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^3} = -\frac{1}{b^3}\left(\ln\frac{X}{x}+\frac{2ax}{X}-\frac{a^2x^2}{2X^2}\right).$ $\quad\boxed{X = ax+b}$

21) $\displaystyle\int \frac{dx}{xX^n} = -\frac{1}{b^n}\left[\ln\frac{X}{x}-\sum_{i=1}^{n-1} C_{n-1}^i \frac{(-a)^i x^i}{iX^i}\right] \quad (n \geq 1).$

22) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{bx}+\frac{a}{b^2}\ln\frac{X}{x}.$

23) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^2} = -a\left[\frac{1}{b^2X}+\frac{1}{ab^2x}-\frac{2}{b^3}\ln\frac{X}{x}\right].$

24) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^3} = -a\left[\frac{1}{2b^2X^2}+\frac{2}{b^3X}+\frac{1}{ab^3x}-\frac{3}{b^4}\ln\frac{X}{x}\right].$

25) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2X^n} = -\frac{1}{b^{n+1}}\left[-\sum_{i=2}^{n} C_n^i \frac{(-a)^i x^{i-1}}{(i-1)X^{i-1}}+\frac{X}{x}-na\ln\frac{X}{x}\right] \quad (n \geq 2).$

26) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{b^3}\left[a^2\ln\frac{X}{x}-\frac{2aX}{x}+\frac{X^2}{2x^2}\right].$

27) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{b^4}\left[3a^2 \ln \frac{X}{x} + \frac{a^3x}{X} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{3aX}{x}\right].$

28) $\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{b^5}\left[6a^2 \ln \frac{X}{x} + \frac{4a^3x}{X} - \frac{a^4x^2}{2X^2} + \frac{X^2}{2x^2} - \frac{4aX}{x}\right].$

29) $$\int \frac{dx}{x^3X^n} = -\frac{1}{b^{n+2}}\left[-\sum_{i=3}^{n+1} C_{n+1}^i \frac{(-a)^i x^{i-2}}{(i-2)X^{i-2}} + \frac{a^2X^2}{2x^2} - \frac{(n+1)aX}{x} + \right.$$
$$\left. + \frac{n(n+1)a^2}{2} \ln \frac{X}{x}\right] \qquad (n \geqslant 3).$$

30) $$\int \frac{dx}{x^mX^n} = -\frac{1}{b^{m+n-1}} \sum_{i=0}^{m+n-2} C_{m+n-2}^i \frac{X^{m-i-1}(-a)^i}{(m-i-1)x^{m-i-1}}$$

[si el denominador del término bajo el signo $\sum$ se anula, entonces tal término se reemplaza por el siguiente:

$$C_{m+n-2}^{n-1}(-a)^{m-1} \ln \frac{X}{x}\Big].$$

| Notación: $\Delta = bf - ag$ |
|---|

31) $\int \frac{ax+b}{fx+g}\, dx = \frac{ax}{f} + \frac{\Delta}{f^2} \ln (fx+g).$

32) $\int \frac{dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta} \ln \frac{fx+g}{ax+b} \quad (\Delta \neq 0).$

33) $\int \frac{x\, dx}{(ax+b)(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{b}{a} \ln (ax+b) - \frac{g}{f} \ln (fx+g)\right] \quad (\Delta \neq 0).$

34) $\int \frac{dx}{(ax+b)^2(fx+g)} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{ax+b} + \frac{f}{\Delta} \ln \frac{fx+g}{ax+b}\right) \quad (\Delta \neq 0).$

35) $\int \frac{x\, dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2} \ln \frac{a+x}{b+x} \qquad (a \neq b).$

36) $$\int \frac{x^2\, dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(b-a)^2} \ln (a+x) +$$
$$+ \frac{b^2-2ab}{(b-a)^2} \ln (b+x) \qquad (a \neq b).$$

37) $\int \frac{dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x} \qquad (a \neq b).$

38) $\int \frac{x\, dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x}\right) + \frac{a+b}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x} \qquad (a \neq b).$

39) $\int \frac{x^2\, dx}{(a+x)^2(b+x)^2} = \frac{-1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x}\right) + \frac{2ab}{(a-b)^3} \ln \frac{a+x}{b+x} \qquad (a \neq b).$

*Integrales que contienen $ax^2+bx+c$*

$$\boxed{\text{Notaciones: } X = ax^2+bx+c,\ \Delta = 4ac-b^2}$$

40) $\int \frac{dx}{X} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}$ (para $\Delta > 0$),

$= -\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{Arth} \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}}$ (para $\Delta < 0$).

41) $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$ (véase N° 40).

42) $\int \frac{dx}{X^3} = \frac{2ax+b}{\Delta} \left( \frac{1}{2X^2} + \frac{3a}{\Delta X} \right) + \frac{6a^2}{\Delta^2} \int \frac{dx}{X}$ (véase N° 40).

43) $\int \frac{dx}{X^n} = \frac{2ax+b}{(n-1)\Delta X^{n-1}} + \frac{(2n-3)\,2a}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}$.

$$\boxed{\begin{aligned} X &= ax^2+bx+c, \\ \Delta &= 4ac-b^2 \end{aligned}}$$

44) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln X - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}$ (véase N° 40).

45) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{bx+2c}{\Delta X} - \frac{b}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$ (véase N° 40).

46) $\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{bx+2c}{(n-1)\Delta X^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{(n-1)\Delta} \int \frac{dx}{X^{n-1}}$.

47) $\int \frac{x^2\,dx}{X} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln X + \frac{b^2-2ac}{2a^2} \int \frac{dx}{X}$ (véase N° 40).

48) $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \frac{(b^2-2ac)\,x+bc}{a\,\Delta X} + \frac{2c}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$ (véase N° 40).

49) $\int \frac{x^2\,dx}{X^n} = \frac{-x}{(2n-3)\,aX^{n-1}} + \frac{c}{(2n-3)\,a} \int \frac{dx}{X^n} - \frac{(n-2)\,b}{(2n-3)\,a} \int \frac{x\,dx}{X^n}$

(véanse N° 43 y N° 46).

50) $\int \frac{x^m\,dx}{X^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)\,aX^{n-1}} + \frac{(m-1)\,c}{(2n-m-1)\,a} \int \frac{x^{m-2}\,dx}{X^n} -$

$- \frac{(n-m)\,b}{(2n-m-1)\,a} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{X^n}$

($m \neq 2n-1$; para $m = 2n-1$ véase N° 51).

51) $\int \frac{x^{2n-1}\,dx}{X^n} = \frac{1}{a} \int \frac{x^{2n-3}\,dx}{X^{n-1}} - \frac{c}{a} \int \frac{x^{2n-3}\,dx}{X^n} - \frac{b}{a} \int \frac{x^{2n-2}\,dx}{X^n}$.

52) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2c} \ln \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X}$ (véase N° 40).

53) $\int \frac{dx}{xX^n} = \frac{1}{2c(n-1)\,X^{n-1}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^n} + \frac{1}{c} \int \frac{dx}{xX^{n-1}}$.

54) $\int \frac{dx}{x^2X} = \frac{b}{2c^2} \ln \frac{X}{x^2} - \frac{1}{cx} + \left( \frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c} \right) \int \frac{dx}{X}$ (véase N° 40).

55) $$\int \frac{dx}{x^m X^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}X^{n-1}} - \frac{(2n+m-3)a}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-2}X^n} - \frac{(n+m-2)b}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}X^n} \qquad (m > 1).$$

56) $$\int \frac{dx}{(fx+g)X} = \frac{1}{2(cf^2-gbf+g^2a)}\left[f \ln \frac{(fx+g)^2}{X}\right] + \frac{2ga-bf}{2(cf^2-gbf+g^2a)}\int \frac{dx}{X} \qquad \text{(véase N° 40).}$$

*Integrales que contienen $a^2 \pm x^2$*

Notaciones:

$$X = a^2 \pm x^2, \quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} & \text{para el signo «+»,} \\ \operatorname{Arth} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2}\ln \dfrac{a+x}{a-x} & \text{para el signo «−» si } |x| < a, \\ \operatorname{Arcth} \dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{2}\ln \dfrac{x+a}{x-a} & \text{para el signo «−» si } |x| > a. \end{cases}$$

En el caso de doble signo en la fórmula el signo de arriba se refiere a $X = a^2+x^2$ y el de abajo a $X = a^2-x^2$.

57) $$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{a} Y.$$

58) $$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2a^2X} + \frac{1}{2a^3} Y.$$

59) $$\int \frac{dx}{X^3} = \frac{x}{4a^2X^2} + \frac{3x}{8a^4X} + \frac{3}{8a^5} Y.$$

60) $$\int \frac{dx}{X^{n+1}} = \frac{x}{2na^2X^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int \frac{dx}{X^n}.$$

61) $$\int \frac{x\,dx}{X} = \pm \frac{1}{2} \ln X.$$

62) $$\int \frac{x\,dx}{X^2} = \mp \frac{1}{2X}.$$

63) $$\int \frac{x\,dx}{X^3} = \mp \frac{1}{4X^2}.$$

64) $$\int \frac{x\,dx}{X^{n+1}} = \mp \frac{1}{2nX^n} \qquad (n \neq 0).$$

65) $$\int \frac{x^2\,dx}{X} = \pm x \mp aY.$$

66) $$\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \mp \frac{x}{2X} \pm \frac{1}{2a} Y.$$

67) $$\int \frac{x^2\,dx}{X^3} = \mp \frac{x}{4X^2} \pm \frac{x}{8a^2X} \pm \frac{1}{8a^3} Y.$$

68) $\int \frac{x^2\,dx}{X^{n+1}} = \mp\frac{x}{2nX^n} \pm \frac{1}{2n}\int\frac{dx}{X^n} \qquad (n \neq 0).$

69) $\int \frac{x^3\,dx}{X} = \pm\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln X.$

70) $\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \frac{a^2}{2X} + \frac{1}{2}\ln X.$

$$X = a^2 \pm x^2,\quad Y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x}{a} & \text{para el signo «+»} \\ \operatorname{Arth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a+x}{a-x} & \text{para el signo «−» si } |x| < a, \\ \operatorname{Arcth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{x+a}{x-a} & \text{para el signo «−» si } |x| > a \end{cases}$$

71) $\int \frac{x^3\,dx}{X^3} = -\frac{1}{2X} + \frac{a^2}{4X^2}.$

72) $\int \frac{x^3\,dx}{X^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)X^{n-1}} + \frac{a^2}{2nX^n} \qquad (n > 1).$

73) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a^2}\ln\frac{x^2}{X}.$

74) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}.$

75) $\int \frac{dx}{xX^3} = \frac{1}{4a^2X^2} + \frac{1}{2a^4X} + \frac{1}{2a^6}\ln\frac{x^2}{X}.$

76) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^2x} \mp \frac{1}{a^3}Y.$

77) $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^4x} \mp \frac{x}{2a^4X} \mp \frac{3}{2a^5}Y.$

78) $\int \frac{dx}{x^2X^3} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x}{4a^4X^2} \mp \frac{7x}{8a^6X} \mp \frac{15}{8a^7}Y.$

79) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^2x^2} \mp \frac{1}{2a^4}\ln\frac{x^2}{X}.$

80) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} \mp \frac{1}{2a^4X} \mp \frac{1}{a^6}\ln\frac{x^2}{X}.$

81) $\int \frac{dx}{x^3X^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{1}{a^6X} \mp \frac{1}{4a^4X^2} \mp \frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{X}.$

82) $\frac{dx}{(b+cx)X} = \frac{1}{a^2c^2 \mp b^2}\left[c\ln(b+cx) - \frac{c}{2}\ln X \mp \frac{b}{a}Y\right].$

*Integrales que contienen $a^3 \pm x^3$*

Notación: $a^3 \pm x^3 = X$; en el caso de signo doble en la fórmula, el signo de arriba se refiere a $X = a^3 + x^3$ y el de abajo a $X = a^3 - x^3$.

83) $\int \frac{dx}{X} = \pm \frac{1}{6a^2} \ln \frac{(a\pm x)^2}{a^2 \mp ax + x^2} + \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x\mp a}{a\sqrt{3}}.$

84) $\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3a^3X} + \frac{2}{3a^3}\int \frac{dx}{X}$ (véase N° 83).

85) $\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{6a} \ln \frac{a^2\mp ax+x^2}{(a\pm x)^2} \pm \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x\mp a}{a\sqrt{3}}.$

86) $\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3a^3X} + \frac{1}{3a^3}\int \frac{x\,dx}{X}$ (véase N° 85).

87) $\int \frac{x^2\,dx}{X} = \pm \frac{1}{3} \ln X.$

88) $\int \frac{x^2\,dx}{X^2} = \mp \frac{1}{3X}.$

89) $\int \frac{x^3\,dx}{X} = \pm x \mp a^3 \int \frac{dx}{X}$ (véase N° 83).

90) $\int \frac{x^3\,dx}{X^2} = \mp \frac{x}{3X} \pm \frac{1}{3}\int \frac{dx}{X}$ (véase N° 83).

91) $\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{3a^3} \ln \frac{x^3}{X}.$

92) $\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3a^3X} + \frac{1}{3a^6} \ln \frac{x^3}{X}.$

93) $\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{a^3x} \mp \frac{1}{a^3}\int \frac{x\,dx}{X}$ (véase N° 85).

94) $\int \frac{dx}{x^2X^2} = -\frac{1}{a^6x} \mp \frac{x^2}{3a^6X} \mp \frac{4}{3a^6}\int \frac{x\,dx}{X}$ (véase N° 85).

95) $\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2a^3x^2} \mp \frac{1}{a^3}\int \frac{dx}{X}$ (véase N° 83).

96) $\int \frac{dx}{x^3X^2} = -\frac{1}{2a^6x^2} \mp \frac{x}{3a^6X} \mp \frac{5}{3a^6}\int \frac{dx}{X}$ (véase N° 83).

*Integrales que contienen $a^4+x^4$*

97) $\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}.$

98) $\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}.$

99) $\int \frac{x^2\,dx}{a^4+x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2} + \frac{1}{2a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}.$

100) $\int \frac{x^3\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4} \ln (a^4+x^4).$

*Integrales que contienen $a^4-x^4$*

101) $\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a+x}{a-x} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

102) $\int \frac{x\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^2} \ln \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

103) $\int \frac{x^2\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a} \ln \frac{a+x}{a-x} - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

104) $\int \frac{x^3\,dx}{a^4-x^4} = -\frac{1}{4} \ln (a^4-x^4)$.

*Algunos casos de descomposición de fracciones en simples*

105) $\frac{1}{(a+bx)(f+gx)} \equiv \frac{1}{fb-ag}\left(\frac{b}{a+bx} - \frac{g}{f+gx}\right)$.

106) $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c}$, donde $A = \frac{1}{(b-a)(c-a)}$,

$B = \frac{1}{(a-b)(c-b)}$, $\quad C = \frac{1}{(a-c)(b-c)}$.

107) $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)} \equiv \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} +$

$+\frac{C}{x+c} + \frac{D}{x+d}$, donde $A = \frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$,

$B = \frac{1}{(a-b)(c-b)(d-b)}$, etc.

108) $\frac{1}{(a+bx^2)(f+gx^2)} \equiv \frac{1}{fb-ag} \cdot \left(\frac{b}{a+bx^2} - \frac{g}{f+gx^2}\right)$.

## INTEGRALES DE FUNCIONES IRRACIONALES

*Integrales que contienen $\sqrt{x}$ y $a^2 \pm b^2x$*

Notaciones: $X = a^2 \pm b^2x$, $Y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b\sqrt{x}}{a} & \text{para el signo «+»} \\ \frac{1}{2} \ln \frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}} & \text{para el signo «−».} \end{cases}$

En el caso de signo doble en la fórmula, el signo de arriba se refiere a $X = a^2+b^2x$ y el de abajo a $X = a^2-b^2x$.

109) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X} = \pm \frac{2\sqrt{x}}{b^2} \mp \frac{2a}{b^3} Y$.

110) $\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X} = \pm \frac{2}{3} \frac{\sqrt{x^3}}{b^2} - \frac{2a^2\sqrt{x}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5} Y$.

111) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{X^2} = \mp \frac{\sqrt{x}}{b^2X} \pm \frac{1}{ab^2} Y.$

112) $\int \frac{\sqrt{x^3}\,dx}{X^2} = \pm \frac{2\sqrt{x^3}}{b^2X} + \frac{3a^2\sqrt{x}}{b^4X} - \frac{3a}{b^5} Y.$

113) $\int \frac{dx}{X\sqrt{x}} = \frac{2}{ab} Y.$

114) $\int \frac{dx}{X\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2\sqrt{x}} \mp \frac{2b}{a^3} Y.$

115) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a^2X} + \frac{1}{a^2b} Y.$

116) $\int \frac{dx}{X^2\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{a^2X\sqrt{x}} \mp \frac{3b^2\sqrt{x}}{a^4X} \mp \frac{3b}{a^5} Y.$

### *Otras integrales que contienen $\sqrt{x}$*

117) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4+x^2} = -\frac{1}{2a\sqrt{2}} \ln \frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

118) $\int \frac{dx}{(a^4+x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \ln \frac{x+a\sqrt{2x}+a^2}{x-a\sqrt{2x}+a^2} + \frac{1}{a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{a\sqrt{2x}}{a^2-x}.$

119) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{a^4-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} - \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a}.$

120) $\int \frac{dx}{(a^4-x^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{2a^3} \ln \frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}} + \frac{1}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{a}.$

### *Integrales que contienen $\sqrt{ax+b}$*

$$\boxed{\text{Notación: } X = ax+b}$$

121) $\int \sqrt{X}\,dx = \frac{2}{3a}\sqrt{X^3}.$

122) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{X^3}}{15a^2}.$

123) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)\sqrt{X^3}}{105a^3}.$

124) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2\sqrt{X}}{a}.$

125) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{X}.$

126) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2(3a^2x^2-4abx+8b^2)\sqrt{X}}{15a^3}.$

127) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{2}{b}\operatorname{Arth}\sqrt{\frac{X}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\frac{\sqrt{X}-\sqrt{b}}{\sqrt{X}+\sqrt{b}} & \text{para } b>0. \\ \frac{2}{\sqrt{-b}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{X}{-b}} & \text{para } b<0. \end{cases}$

128) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = 2\sqrt{X}+b\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (véase Nº 127).

129) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{bx}-\frac{a}{2b}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (véase Nº 127).

130) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (véase Nº 127). $\boxed{X = ax+b}$

131) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{(n-1)bx^{n-1}}-\frac{(2n-3)a}{(2n-2)b}\int\frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{X}}.$

132) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{2\sqrt{X^5}}{5a}.$

133) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{35a^2}(5\sqrt{X^7}-7b\sqrt{X^5}).$

134) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^9}}{9}-\frac{2b\sqrt{X^7}}{7}+\frac{b^2\sqrt{X^5}}{5}\right).$

135) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{2\sqrt{X^3}}{3}+2b\sqrt{X}+b^2\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (véase Nº 127).

136) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^2}\left(\sqrt{X}+\frac{b}{\sqrt{X}}\right).$

137) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a^3}\left(\frac{\sqrt{X^3}}{3}-2b\sqrt{X}-\frac{b^2}{\sqrt{X}}\right).$

138) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{b\sqrt{X}}+\frac{1}{b}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (véase Nº 127).

139) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{bx\sqrt{X}}-\frac{3a}{b^2\sqrt{X}}-\frac{3a}{2b^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (véase Nº 127).

140) $\int X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2X^{(2\pm n)/2}}{a(2\pm n)}.$

141) $\int xX^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^2}\left(\frac{X^{(4\pm n)/2}}{4\pm n}-\frac{bX^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

142) $\int x^2X^{\pm n/2}\,dx = \frac{2}{a^3}\left(\frac{X^{(6\pm n)/2}}{6\pm n}-\frac{2bX^{(4\pm n)/2}}{4\pm n}+\frac{b^2X^{(2\pm n)/2}}{2\pm n}\right).$

143) $\int \frac{X^{n/2}\,dx}{x} = \frac{2X^{n/2}}{n} + b\int \frac{X^{(n-2)/2}}{x}\,dx.$

144) $\int \frac{dx}{xX^{n/2}} = \frac{2}{(n-2)bX^{(n-2)/2}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{xX^{(n-2)/2}}.$

145) $\int \frac{dx}{x^2X^{n/2}} = -\frac{1}{bxX^{(n-2)/2}} - \frac{na}{2b}\int \frac{dx}{xX^{n/2}}.$

## *Integrales que contienen $\sqrt{ax+b}$ y $\sqrt{fx+g}$*

Notaciones: $X = ax+b,\ Y = fx+g,\ \Delta = bf-ag$

146) $$\int \frac{dx}{\sqrt{XY}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-af}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\dfrac{fX}{aY}} & \text{para } af<0, \\ \dfrac{2}{\sqrt{af}}\operatorname{Arth}\dfrac{fX}{aY} = \dfrac{1}{2\sqrt{af}}\ln\left(\sqrt{aY}+\sqrt{fX}\right) & \text{para } af>0. \end{cases}$$

147) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{XY}} = \frac{\sqrt{XY}}{af} - \frac{ag+bf}{2af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (véase Nº 146).

148) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,\sqrt{Y^3}} = -\frac{2\sqrt{X}}{\Delta\sqrt{Y}}.$

149) $$\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{-\Delta f}}\operatorname{arctg}\dfrac{f\sqrt{X}}{\sqrt{-\Delta f}} & \text{para } \Delta f<0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\Delta f}}\ln\dfrac{f\sqrt{X}-\sqrt{\Delta f}}{f\sqrt{X}+\sqrt{\Delta f}} & \text{para } \Delta f>0. \end{cases}$$

150) $\int \sqrt{XY}\,dx = \frac{\Delta+2aY}{4af}\sqrt{XY} - \frac{\Delta^2}{8af}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (véase Nº 146).

151) $\int \sqrt{\frac{Y}{X}}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{XY} - \frac{\Delta}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{XY}}$ (véase Nº 146).

152) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y} = \frac{2\sqrt{X}}{f} + \frac{\Delta}{f}\int \frac{dx}{Y\sqrt{X}}$ (véase Nº 149).

153) $\int \frac{Y^n\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{(2n+1)a}\left(\sqrt{X}Y^n - n\Delta\int \frac{Y^{n-1}\,dx}{\sqrt{X}}\right).$

154) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}\,Y^n} = -\frac{1}{(n-1)\Delta}\left\{\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \left(n-\frac{3}{2}\right)a\int \frac{dx}{\sqrt{X}Y^{n-1}}\right\}.$

155) $\int \sqrt{X}Y^n\,dx = -\frac{1}{(2n+3)f}\left(2\sqrt{X}Y^{n+1} + \Delta\int \frac{Y^n\,dx}{X}\right)$ (véase Nº 153).

156) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{Y^n} = -\frac{1}{(n-1)f}\left(-\frac{\sqrt{X}}{Y^{n-1}} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}Y^{n-1}}\right).$

*Integrales que contienen* $\sqrt{a^2-x^2}$

Notación: $X = a^2 - x^2$

157) $\int \sqrt{X}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}\right).$

158) $\int x\sqrt{X}\, dx = -\frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$

159) $\int x^2\sqrt{X}\, dx = -\frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}\right).$

160) $\int x^3\sqrt{X}\, dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - a^2\frac{\sqrt{X^3}}{3}.$

161) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\, dx = \sqrt{X} - a \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

162) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} - \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$

163) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\, dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

164) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$

165) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{X}} = -\sqrt{X}.$

166) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{X}} = -\frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$

167) $\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$

168) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

169) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$

170) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3} \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

171) $\int \sqrt{X^3}\, dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}\right).$

172) $\int x\sqrt{X^3}\, dx = -\frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

173) $\int x^2\sqrt{X^3}\, dx = -\frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$

174) $\displaystyle\int x^3 \sqrt{X^3}\, dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2 \sqrt{X^5}}{5}.$

175) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\, dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2 \sqrt{X} - a^3 \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

176) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} - \frac{3}{2} x \sqrt{X} - \frac{3}{2} a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$

177) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\, dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{X}}{2} + \frac{3a}{2} \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

178) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{X}}.$

179) $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{1}{\sqrt{X}}.$

180) $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{\sqrt{X}} - \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}.$

181) $\displaystyle\int \frac{x^3\, dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$

182) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2 \sqrt{X}} - \frac{1}{a^3} \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

183) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^4} \left( -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}} \right).$

184) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2 \sqrt{X}} + \frac{3}{2a^4 \sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5} \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

*Integrales que contienen* $\sqrt{x^2+a^2}$

$$\boxed{\text{Notación: } X = x^2+a^2}$$

185) $\displaystyle\int \sqrt{X}\, dx = \frac{1}{2} \left( x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} \right) + C =$

$\displaystyle\qquad = \frac{1}{2} \left[ x \sqrt{X} + a^2 \ln (x + \sqrt{X}) \right] + C_1.$

186) $\displaystyle\int x \sqrt{X}\, dx = \frac{1}{3} \sqrt{X^3}.$

187) $\displaystyle\int x^2 \sqrt{X}\, dx = \frac{x}{4} \sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8} \left( x \sqrt{X} + a^2 \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} \right) + C =$

$\displaystyle\qquad = \frac{x}{4} \sqrt{X^3} - \frac{a^2}{8} \left[ x \sqrt{X} + a^2 \ln (x + \sqrt{X}) \right] + C_1.$

188) $\displaystyle\int x^3 \sqrt{X}\, dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} - \frac{a^2 \sqrt{X^3}}{3}.$

$$\boxed{X = x^2+a^2}$$

189) $\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

190) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

191) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

192) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

193) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$

194) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} - \frac{a^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} -$

$- \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

195) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X}.$

196) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

197) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$

198) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

199) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$

$= \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right) + C_1.$

200) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

201) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} -$

$- \frac{a^6}{16}\operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} - \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} -$

$- \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

202) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} - \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$

203) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X} - a^3\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$

204) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}\,x\sqrt{X} + \frac{3}{2}\,a^2 \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C =$$
$$= -\frac{\sqrt{X^3}}{x} + \frac{3}{2}\,x\sqrt{X} + \frac{3}{2}\,a^2 \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1 .$$

205) $$\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{X} - \frac{3}{2}\,a \ln\left(\frac{a+\sqrt{X}}{x}\right).$$

206) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$$

207) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

208) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{X} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1 .$$

209) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} + \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

210) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

211) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$$

212) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} + \frac{3}{2a^5}\ln\frac{a+\sqrt{X}}{x}.$$

### *Integrales que contienen $\sqrt{x^2-a^2}$*

$$\boxed{\text{Notación: } X = x^2 - a^2}$$

213) $$\int \sqrt{X}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{X} - a^2 \operatorname{Arsh}\frac{x}{a}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{X} - a^2 \ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1 .$$

214) $$\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{X^3}.$$

215) $$\int x^2\sqrt{X}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{X} - a^2 \operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C =$$
$$= \frac{x}{4}\sqrt{X^3} + \frac{a^2}{8}\left[x\sqrt{X} - a^2 \ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right] + C_1 .$$

216) $$\int x^3\sqrt{X}\,dx = \frac{\sqrt{X^5}}{5} + \frac{a^2\sqrt{X^3}}{3}.$$

217) $$\int \frac{\sqrt{X}}{x}\,dx = \sqrt{X} - a \arccos\frac{a}{x}. \qquad \boxed{X = x^2 - a^2}$$

218) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

219) $\int \frac{\sqrt{X}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\arccos\frac{a}{x}.$

220) $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

221) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \sqrt{X}.$

222) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = \frac{x}{2}\sqrt{X} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$

223) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X^3}}{3} + a^2\sqrt{X}.$

224) $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}.$

225) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a^2 x}.$

226) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}.$

227) $\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\operatorname{Arch}\frac{x}{a}\right) + C =$

$$= \frac{1}{4}\left(x\sqrt{X^3} - \frac{3a^2x}{2}\sqrt{X} + \frac{3a^4}{2}\ln\left(x+\sqrt{X}\right)\right) + C_1.$$

228) $\int x\sqrt{X^3}\,dx = \frac{1}{5}\sqrt{X^5}.$

229) $\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C =$

$$= \frac{x\sqrt{X^5}}{6} + \frac{a^2x\sqrt{X^3}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{X}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$$

230) $\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \frac{\sqrt{X^7}}{7} + \frac{a^2\sqrt{X^5}}{5}.$

231) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x}\,dx = \frac{\sqrt{X^3}}{3} - a^2\sqrt{X} + a^3\arccos\frac{a}{x}.$

232) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} + \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{\sqrt{X^3}}{2} +$

$$+ \frac{3}{2}x\sqrt{X} - \frac{3}{2}a^2\ln\left(x+\sqrt{X}\right) + C_1.$$

233) $\int \frac{\sqrt{X^3}}{x^3}\,dx = -\frac{\sqrt{X^3}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{X}}{2} - \frac{3}{2}a\arccos\frac{a}{x}.$

234) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{X}}.$$

235) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{\sqrt{X}}.$$

236) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C = -\frac{x}{\sqrt{X}} + \ln(x+\sqrt{X}) + C_1.$$

237) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^3}} = \sqrt{X} - \frac{a^2}{\sqrt{X}}.$$

238) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^2\sqrt{X}} - \frac{1}{a^3}\arccos\frac{a}{x}.$$

239) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{x}{\sqrt{X}}\right).$$

240) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{X}} - \frac{3}{2a^5}\arccos\frac{a}{x}.$$

*Integrales que contienen $\sqrt{ax^2+bx+c}$*

| |
|---|
| Notaciones: $X = ax^2+bx+c, \quad \Delta = 4ac-b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}$ |

241) $$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2\sqrt{aX}+2ax+b)+C & \text{para } a>0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{Arsh}\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}+C_1 & \text{para } a>0, \ \Delta>0, \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b) & \text{para } a>0, \ \Delta=0, \\ -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsen\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & \text{para } a<0, \ \Delta<0. \end{cases}$$

242) $$\int \frac{dx}{X\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{\Delta\sqrt{X}}.$$

243) $$\int \frac{dx}{X^2\sqrt{X}} = \frac{2(2ax+b)}{3\Delta\sqrt{X}}\left(\frac{1}{X}+2k\right).$$

| |
|---|
| $X = ax^2+bx+c, \quad \Delta = 4ac-b^2, \quad k = \frac{4a}{\Delta}$ |

244) $$\int \frac{dx}{X^{(2n+1)/2}} = \frac{2(2ax+b)}{(2n-1)\Delta X^{(2n-1)/2}} + \frac{2k(n-1)}{2n-1}\int \frac{dx}{X^{(2n-1)/2}}.$$

245) $$\int \sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{4a} + \frac{1}{2k}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$ (véase N° 241).

246) $\int X\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{8a}\left(X+\frac{3}{2k}\right)+\frac{3}{8k^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (véase N° 241).

247) $\int X^2\sqrt{X}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{X}}{12a}\left(X^2+\frac{5X}{4k}+\frac{15}{8k^2}\right)+\frac{5}{16k^3}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$
(véase N° 241).

248) $\int X^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{(2ax+b)X^{(2n+1)/2}}{4a(n+1)}+\frac{2n+1}{2k(n+1)}\int X^{(2n-1)/2}\,dx.$

249) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{a}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (véase N° 241).

250) $\int\frac{x\,dx}{X\sqrt{X}} = -\frac{2(bx+2c)}{\Delta\sqrt{X}}.$

251) $\int\frac{x\,dx}{X^{(2n+1)/2}} = -\frac{1}{(2n-1)aX^{(2n-1)/2}}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^{(2n+1)/2}}$ (véase N° 244).

252) $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x}{2a}-\frac{3b}{4a^2}\right)\sqrt{X}+\frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (véase N° 241).

253) $\int\frac{x^2\,dx}{X\sqrt{X}} = \frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a\Delta\sqrt{X}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (véase N° 241).

254) $\int x\sqrt{X}\,dx = \frac{X\sqrt{X}}{3a}-\frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{X}-\frac{b}{4ak}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$ (véase N° 241).

255) $\int xX\sqrt{X}\,dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5a}-\frac{b}{2a}\int X\sqrt{X}\,dx$ (véase N° 246).

256) $\int xX^{(2n+1)/2}\,dx = \frac{X^{(2n+3)/2}}{(2n+3)a}-\frac{b}{2a}\int X^{(2n+1)/2}\,dx$ (véase N° 248).

257) $\int x^2\sqrt{X}\,dx = \left(x-\frac{5b}{6a}\right)\frac{X\sqrt{X}}{4a}+\frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int\sqrt{X}\,dx$ (véase N° 245).

258) $$\int\frac{dx}{x\sqrt{X}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\frac{2\sqrt{cX}}{x}+\frac{2c}{x}+b\right)+C & \text{para } c>0,\\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{Arsh}\frac{bx+2c}{x\sqrt{\Delta}}+C_1 & \text{para } c>0,\ \Delta>0,\\ -\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\frac{bx+2c}{x} & \text{para } c>0,\ \Delta=0,\\ \frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{arcsen}\frac{bx+2c}{x\sqrt{-\Delta}} & \text{para } c<0,\ \Delta<0. \end{cases}$$

259) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{cx}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (véase N° 258).

260) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = \sqrt{X} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + c\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (véase N° 241 y N° 258).

261) $\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + a\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}$ (véase N° 241 y N° 258).

262) $\int \frac{X^{(2n+1)/2}}{x}\,dx = \frac{X^{(2n+1)/2}}{2n+1} + \frac{b}{2}\int X^{(2n-1)/2}\,dx +$
$+ c\int \frac{X^{(2n-1)/2}}{x}\,dx$ (véase N° 248 y N° 260).

263) $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{ax^2+bx}.$

264) $\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x-a}{a}.$

265) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\sqrt{2ax-x^2} + a\operatorname{arcsen}\frac{x-a}{a}.$

266) $\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x-a}{a}.$

267) $\int \frac{dx}{(ax^2+b)\sqrt{fx^2+g}} = \frac{1}{\sqrt{b}\,\sqrt{ag-bf}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{ag-bf}}{\sqrt{b}\,\sqrt{fx^2+g}}$ $(ag-bf>0).$

$= \frac{1}{2\sqrt{b}\,\sqrt{bf-ag}}\ln\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{fx^2+g}+x\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b}\,\sqrt{fx^2+g}-x\sqrt{bf-ag}}$ $(ag-bf<0).$

*Integrales que contienen otras expresiones irracionales*

268) $\int \sqrt[n]{ax+b}\,dx = \frac{n(ax+b)}{(n+1)a}\sqrt[n]{ax+b}.$

269) $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{ax+b}} = \frac{n(ax+b)}{(n-1)a}\,\frac{1}{\sqrt[n]{ax+b}}.$

270) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+a^2}} = -\frac{2}{na}\ln\frac{a+\sqrt{x^n+a^2}}{\sqrt{x^n}}.$

271) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-a^2}} = \frac{2}{na}\arccos\frac{a}{\sqrt{x^n}}.$

272) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}} = \frac{2}{3}\operatorname{arcsen}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^3}.$

*Fórmulas de recurrencia para la integral de la diferencial binomia*

273) $$\int x^m (ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{m+np+1}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^p + npb\int x^m(ax^n+b)^{p-1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{bn(p+1)}\left[-x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} + (m+n+np+1)\int x^m(ax^n+b)^{p+1}\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{(m+1)b}\left[x^{m+1}(ax^n+b)^{p+1} - a(m+n+np+1)\int x^{m+n}(ax^n+b)^p\,dx\right],$$

$$= \frac{1}{a(m+np+1)}\left[x^{m-n+1}(ax^n+b)^{p+1} - (m-n+1)b\int x^{m-n}(ax^n+b)^p\,dx\right].$$

## INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS*

### *Integrales que contienen el seno*

274) $$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax.$$

275) $$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax.$$

276) $$\int \operatorname{sen}^3 ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + \frac{1}{3a}\cos^3 ax.$$

277) $$\int \operatorname{sen}^4 ax\,dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4a}\operatorname{sen} 2ax + \frac{1}{32a}\operatorname{sen} 4ax.$$

278) $$\int \operatorname{sen}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\,dx$$ ($n$ entero, $> 0$).

279) $$\int x\operatorname{sen} ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a}.$$

280) $$\int x^2\operatorname{sen} ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\operatorname{sen} ax - \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\cos ax.$$

281) $$\int x^3\operatorname{sen} ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\operatorname{sen} ax - \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\cos ax.$$

282) $$\int x^n\operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{x^n}{a}\cos ax + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos ax\,dx \qquad (n > 0).$$

---

* Las integrales de las funciones que contienen sen $x$, cos $x$, en combinación con las funciones hiperbólicas y con $e^{ax}$, véanse en las págs. 434-435.

283) $\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = ax - \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} - \frac{(ax)^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$ *.

284) $\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^2}\, dx = -\frac{\operatorname{sen} ax}{x} + a \int \frac{\cos ax\, dx}{x}$ (véase Nº 322).

285) $\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^n}\, dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\operatorname{sen} ax}{x^{n-1}} + \frac{a}{n-1} \int \frac{\cos ax}{x^{n-1}}\, dx$ (véase Nº 324).

286) $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax} = \int \operatorname{cosec} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} = \frac{1}{a} \ln (\operatorname{cosec} ax - \operatorname{ctg} ax).$$

287) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax.$

288) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 ax} = -\frac{\cos ax}{2a \operatorname{sen}^2 ax} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$

289) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \frac{\cos ax}{\operatorname{sen}^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}$ $(n > 1)$.

290) $$\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a^2} \left( ax + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{7\,(ax)^5}{3 \cdot 5 \cdot 5!} + \frac{31\,(ax)^7}{3 \cdot 7 \cdot 7!} + \frac{127\,(ax)^9}{3 \cdot 5 \cdot 9!} + \ldots + \frac{2\,(2^{2n-1}-1)}{(2n+1)!} B_n (ax)^{2n+1} + \ldots \right)^{**}.$$

291) $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{ctg} ax + \frac{1}{a^2} \ln \operatorname{sen} ax.$

292) $$\int \frac{x\, dx}{\operatorname{sen}^n ax} = -\frac{x \cos ax}{(n-1)\, a \operatorname{sen}^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)(n-2)\, a^2 \operatorname{sen}^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\, dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax} \qquad (n > 2).$$

293) $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$

294) $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2} \right).$

295) $\int \frac{x\, dx}{1 + \operatorname{sen} ax} = -\frac{x}{a} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$

296) $\int \frac{x\, dx}{1 - \operatorname{sen} ax} = \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right) + \frac{2}{a^2} \ln \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2} \right).$

297) $\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{1 \pm \operatorname{sen} ax} = \pm x + \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2} \right).$

---

* La integral definida $\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ se llama *integral-seno* y se designa por Si $(x)$: Si $x = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$

** $B_n$ son los números de Bernoulli (véase la pág. 347).

298) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax(1 \pm \operatorname{sen} ax)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$

299) $\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{sen} ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

300) $\int \frac{dx}{(1 - \operatorname{sen} ax)^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

301) $\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{(1 + \operatorname{sen} ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a} \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

302) $\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{(1 - \operatorname{sen} ax)^2} = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{1}{6a} \operatorname{ctg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right).$

303) $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a} \operatorname{arcsen}\left(\frac{3 \operatorname{sen}^2 ax - 1}{\operatorname{sen}^2 ax + 1}\right).$

304) $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen}^2 ax} = \int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax.$

305) $\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\, dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)x}{2(a+b)}$ $(|a| \neq |b|;$
para $|a| = |b|$ (véase N° 275).

306) $\int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} ax/2 + c}{\sqrt{b^2 - c^2}}$ para $b^2 > c^2$,

$= \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{b \operatorname{tg} ax/2 + c - \sqrt{c^2 - b^2}}{b \operatorname{tg} ax/2 + c + \sqrt{c^2 - b^2}}$ para $b^2 < c^2$.

307) $\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c} \int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax}$ (véase N° 306).

308) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax(b + c \operatorname{sen} ax)} = \frac{1}{ab} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2} - \frac{c}{b} \int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax}$ (véase N° 306).

309) $\int \frac{dx}{(b + c \operatorname{sen} ax)^2} = \frac{c \cos ax}{a(b^2 - c^2)(b + c \operatorname{sen} ax)} + \frac{b}{b^2 - c^2} \int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax}$
(véase N° 306).

310) $\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{(b + c \operatorname{sen} ax)^2} = \frac{b \cos ax}{a(c^2 - b^2)(b + c \operatorname{sen} ax)} + \frac{c}{c^2 - b^2} \int \frac{dx}{b + c \operatorname{sen} ax}$
(véase N° 306).

311) $\int \frac{dx}{b^2 + c^2 \operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 + c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 + c^2} \operatorname{tg} ax}{b}$ $(b > 0)$.

312) $\int \frac{dx}{b^2 - c^2 \operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{b^2 - c^2} \operatorname{tg} ax}{b}$ $(b^2 > c^2,\ b > 0)$,

$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{tg} ax + b}{\sqrt{c^2 - b^2} \operatorname{tg} ax - b}$ $(c^2 > b^2,\ b > 0)$.

### *Integrales que contienen cosenos*

313) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\,\text{sen}\,ax.$

314) $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4a}\,\text{sen}\,2ax.$

315) $\int \cos^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\,\text{sen}\,ax - \frac{1}{3a}\,\text{sen}^3\,ax.$

316) $\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3}{8}\,x + \frac{1}{4a}\,\text{sen}\,2ax + \frac{1}{32a}\,\text{sen}\,4ax.$

317) $\int \cos^n ax\,dx = \frac{\cos^{n-1} ax\,\text{sen}\,ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,dx.$

318) $\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\,\text{sen}\,ax}{a}.$

319) $\int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\text{sen}\,ax.$

320) $\int x^3\cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\text{sen}\,ax.$

321) $\int x^n\cos ax\,dx = \frac{x^n\,\text{sen}\,ax}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\,\text{sen}\,ax\,dx.$

322) $\int \frac{\cos ax}{x}\,dx = \ln(ax) - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \ldots$*.

323) $\int \frac{\cos ax}{x^2}\,dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int \frac{\text{sen}\,ax\,dx}{x}$ (véase N° 283).

324) $\int \frac{\cos ax}{x^n}\,dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1}\int \frac{\text{sen}\,ax\,dx}{x^{n-1}}$ $(n \neq 1)$
(véase N° 285).

325) $\int \frac{dx}{\cos ax} = \int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\text{tg}\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \text{tg}\,ax).$

326) $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\,\text{tg}\,ax.$

327) $\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\text{sen}\,ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

328) $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)}\,\frac{\text{sen}\,ax}{\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$ $(n > 1).$

---

* La integral definida $-\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ se llama *integral-coseno* y se designa por Ci $x$:

$$\text{Ci}\,x = C - \ln x - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} - \frac{x^6}{6\cdot 6!} + \ldots,$$

donde $C$ es la constante de Euler (véase la pág. 324).

329) $\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 2!} + \frac{5\,(ax)^6}{6\cdot 4!} + \frac{61\,(ax)^8}{8\cdot 6!} + \frac{1385\,(ax)^{10}}{10\cdot 8!} + \dots \right.$
$\left. \dots + \frac{E_n\,(ax)^{2n+2}}{(2n+2)\,(2n)!} + \dots\right)$*.

330) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg} ax + \frac{1}{a^2}\ln\cos ax.$

331) $\int \frac{x\,dx}{\cos^n ax} = \frac{x \operatorname{sen} ax}{(n-1)\,a\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-1)\,(n-2)\,a^2\cos^{n-2} ax} +$
$+ \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cos^{n-2} ax} \qquad (n > 2).$

332) $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

333) $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$

334) $\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2}.$

335) $\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\frac{ax}{2}.$

336) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1+\cos ax} = x - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

337) $\int \frac{\cos ax\,dx}{1-\cos ax} = -x - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$

338) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(1+\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$

339) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(1-\cos ax)} = \frac{1}{a}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2}.$

340) $\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}.$

341) $\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}.$

342) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{tg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{tg}^3\frac{ax}{2}.$

343) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(1-\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\operatorname{ctg}\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\operatorname{ctg}^3\frac{ax}{2}.$

344) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 ax} = \frac{1}{2\sqrt{2}a}\operatorname{arcsen}\left(\frac{1-3\cos^2 ax}{1+\cos^2 ax}\right).$

345) $\int \frac{dx}{1-\cos^2 ax} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{ctg} ax.$

346) $\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-b)\,x}{2\,(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)\,x}{2\,(a+b)}$
$(|a| \neq |b|$; para $|a| = |b|$ véase Nº 314).

---

* $E_n$ son los números de Euler (véase la pág. 347).

347) $\int \frac{dx}{b+c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{(b-c)\operatorname{tg}^{ax/2}}{\sqrt{b^2-c^2}}$ (para $b^2 > c^2$),

$= \frac{1}{a\sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{(c-b)\operatorname{tg}^{ax/2}+\sqrt{c^2-b^2}}{(c-b)\operatorname{tg}^{ax/2}-\sqrt{c^2-b^2}}$ (para $b^2 < c^2$).

348) $\int \frac{\cos ax\,dx}{b+c\cos ax} = \frac{x}{c} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$ (véase N° 347).

349) $\int \frac{dx}{\cos ax\,(b+c\cos ax)} = \frac{1}{ab} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{c}{b}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$

(véase N° 347).

350) $\int \frac{dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{c\operatorname{sen} ax}{a(c^2-b^2)(b+c\cos ax)} - \frac{b}{c^2-b^2}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$

(véase N° 347).

351) $\int \frac{\cos ax\,dx}{(b+c\cos ax)^2} = \frac{b\operatorname{sen} ax}{a(b^2-c^2)(b+c\cos ax)} - \frac{c}{b^2-c^2}\int \frac{dx}{b+c\cos ax}$

(véase N° 347).

352) $\int \frac{dx}{b^2+c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2+c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2+c^2}}$ ($b > 0$).

353) $\int \frac{dx}{b^2-c^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ab\sqrt{b^2-c^2}} \operatorname{arctg} \frac{b\operatorname{tg} ax}{\sqrt{b^2-c^2}}$ ($b^2 > c^2$, $b > 0$),

$= \frac{1}{2ab\sqrt{c^2-b^2}} \ln \frac{b\operatorname{tg} ax-\sqrt{c^2-b^2}}{b\operatorname{tg} ax+\sqrt{c^2-b^2}}$

($c^2 > b^2$, $b > 0$).

### *Integrales que contienen senos y cosenos*

354) $\int \operatorname{sen} ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\operatorname{sen}^2 ax.$

355) $\int \operatorname{sen}^2 ax\cos^2 ax\,dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}.$

356) $\int \operatorname{sen}^n ax\cos ax\,dx = \frac{1}{a(n+1)}\operatorname{sen}^{n+1} ax$ ($n \neq -1$).

357) $\int \operatorname{sen} ax\cos^n ax\,dx = -\frac{1}{a(n+1)}\cos^{n+1} ax$ ($n \neq -1$).

358) $\int \operatorname{sen}^n ax\cos^m ax\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos^{m+1} ax}{a(n+m)} +$

$+ \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-2} ax\cos^m ax\,dx$

(reducción del grado $n$; $m$ y $n > 0$),

$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax\cos^{m-1} ax}{a(n+m)} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n ax\cos^{m-2} ax\,dx$

(reducción del grado $m$; $m$ y $n > 0$).

359) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{tg} ax.$

360) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a}\left[\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)-\frac{1}{\operatorname{sen} ax}\right].$

361) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}+\frac{1}{\cos ax}\right).$

362) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 ax \cos ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax-\frac{1}{2\operatorname{sen}^2 ax}\right).$

363) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left(\ln \operatorname{tg} ax+\frac{1}{2\cos^2 ax}\right).$

364) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2}{a} \operatorname{ctg} 2ax.$

365) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax \cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\operatorname{sen} ax}{2\cos^2 ax}-\frac{1}{\operatorname{sen} ax}+\frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right].$

366) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\cos ax}-\frac{\cos ax}{2\operatorname{sen}^2 ax}+\frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right).$

367) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax}+\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos^{n-2} ax} \qquad (n \neq 1)$

(véanse N°N° 361, 363).

368) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n ax \cos ax} = -\frac{1}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax}+\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax \cos ax} \qquad (n \neq 1)$

(véase N° 360 y 362).

369) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n ax \cos^m ax} = -\frac{1}{a(n-1)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^{n-1} ax \cos^{m-1} ax}+$

$\displaystyle+\frac{n+m-2}{n-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax \cos^m ax}$

(reducción del grado $n$; $m > 0, n > 1$),

$\displaystyle=\frac{1}{a(m-1)} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^{n-1} ax \cos^{m-1} ax}+\frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n ax \cos^{m-2} ax}$

(reducción del grado $m$, $n > 0, m > 1$).

370) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a\cos ax} = \frac{1}{a} \sec ax.$

371) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{\cos^3 dx} = \frac{1}{2a\cos^2 ax}+C = \frac{1}{2a} \operatorname{tg}^2 ax + C_1.$

372) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a(n-1)\cos^{n-1} ax}.$

373) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 ax\, dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax+\frac{1}{a}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right).$

374) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 ax\, dx}{\cos^3 ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{\operatorname{sen} ax}{2\cos^2 ax}-\frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)\right].$

375) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{\operatorname{sen} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax}-\frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax} \qquad (n \neq 1)$

(véanse N°s 325, 326, 328).

376) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 ax\, dx}{\cos ax} = -\frac{1}{a}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2} + \ln \cos ax\right).$

377) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 ax\, dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \frac{1}{\cos ax}\right).$

378) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 ax\, dx}{\cos^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{(n-3)\cos^{n-3} ax}\right] \quad (n \neq 1,\ n \neq 3).$

379) $\int \frac{\operatorname{sen}^n ax}{\cos ax}\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\operatorname{sen}^{n-2} ax\, dx}{\cos ax} \quad (n \neq 1).$

380) $\int \frac{\operatorname{sen}^n ax}{\cos^m ax}\, dx =$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\operatorname{sen}^n ax}{\cos^{m-2} ax}\, dx \quad (m \neq 1),$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax}{a(n-m)\cos^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-2} ax\, dx}{\cos^m ax} \quad (m \neq n),$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax}{a(m-1)\cos^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\, dx}{\cos^{m-2} ax} \quad (m \neq 1).$$

381) $\int \frac{\cos ax\, dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a \operatorname{sen} ax} = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec} ax.$

382) $\int \frac{\cos ax\, dx}{\operatorname{sen}^3 ax} = -\frac{1}{2a \operatorname{sen}^2 ax} + C = -\frac{\operatorname{ctg}^2 ax}{2a} + C_1.$

383) $\int \frac{\cos ax\, dx}{\operatorname{sen}^n ax} = -\frac{1}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax}.$

384) $\int \frac{\cos^2 ax\, dx}{\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\left(\cos ax + \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}\right).$

385) $\int \frac{\cos^2 ax\, dx}{\operatorname{sen}^3 ax} = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\cos ax}{\operatorname{sen}^2 ax} - \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}\right).$

386) $\int \frac{\cos^2 ax\, dx}{\operatorname{sen}^n ax} = -\frac{1}{(n-1)}\left(\frac{\cos ax}{a \operatorname{sen}^{n-1} ax} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}\right) \quad (n \neq 1)$ (véase Nº 289).

387) $\int \frac{\cos^3 ax\, dx}{\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{a}\left(\frac{\cos^2 ax}{2} + \ln \operatorname{sen} ax\right).$

388) $\int \frac{\cos^3 ax\, dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a}\left(\operatorname{sen} ax + \frac{1}{\operatorname{sen} ax}\right).$

389) $\int \frac{\cos^3 ax\, dx}{\operatorname{sen}^n ax} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{(n-3)\operatorname{sen}^{n-3} ax} - \frac{1}{(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax}\right] \quad (n \neq 1,\ n \neq 3).$

390) $\int \frac{\cos^n ax}{\operatorname{sen} ax}\, dx = \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \frac{\cos^{n-2} ax\, dx}{\operatorname{sen} ax} \quad (n \neq 1).$

391) $\int \frac{\cos^n ax\, dx}{\operatorname{sen}^m ax} =$

$$= -\frac{\cos^{n+1} ax}{a(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} ax} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{\cos^n ax\, dx}{\operatorname{sen}^{m-2} ax} \quad (m \neq 1),$$

$$= \frac{\cos^{n-1} ax}{a(n-m)\operatorname{sen}^{m-1} ax} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\cos^{n-2} ax\, dx}{\operatorname{sen}^m ax} \quad (m \neq n).$$

$$= -\frac{\cos^{n-1} ax}{a(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} ax} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} ax\, dx}{\operatorname{sen}^{m-2} ax} \quad (m \neq 1).$$

392) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax(1 \pm \cos ax)} = \pm \frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$

393) $\int \frac{dx}{\cos ax(1 \pm \operatorname{sen} ax)} = \mp \frac{1}{2a(1 \pm \operatorname{sen} ax)} + \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

394) $\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{\cos ax(1 \pm \cos ax)} = \frac{1}{a} \ln \frac{1 \pm \cos ax}{\cos ax}.$

395) $\int \frac{\cos ax\, dx}{\operatorname{sen} ax(1 \pm \operatorname{sen} ax)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{1 \pm \operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} ax}.$

396) $\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{\cos ax(1 \pm \operatorname{sen} ax)} = \frac{1}{2a(1 \pm \operatorname{sen} ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right).$

397) $\int \frac{\cos ax\, dx}{\operatorname{sen} ax(1 \pm \cos ax)} = -\frac{1}{2a(1 \pm \cos ax)} \pm \frac{1}{2a} \ln \operatorname{tg} \frac{ax}{2}.$

398) $\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{\operatorname{sen} ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln (\operatorname{sen} ax \pm \cos ax).$

399) $\int \frac{\cos ax\, dx}{\operatorname{sen} ax \pm \cos ax} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln (\operatorname{sen} ax \pm \cos ax).$

400) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} \pm \frac{\pi}{8}\right).$

401) $\int \frac{dx}{1 + \cos ax \pm \operatorname{sen} ax} = \pm \frac{1}{a} \ln \left(1 \pm \operatorname{tg} \frac{ax}{2}\right).$

402) $\int \frac{dx}{b \operatorname{sen} ax + c \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}} \ln \operatorname{tg} \frac{ax+\theta}{2},$

donde $\operatorname{sen} \theta = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}$, y $\operatorname{tg} \theta = \frac{c}{b}$.

403) $\int \frac{\operatorname{sen} ax\, dx}{b + c \cos ax} = -\frac{1}{ac} \ln (b + c \cos ax).$

404) $\int \frac{\cos ax\, dx}{b + c \operatorname{sen} ax} = \frac{1}{ac} \ln (b + c \operatorname{sen} ax).$

405) $\int \frac{dx}{b + c \cos ax + f \operatorname{sen} ax} = \int \frac{d\left(x + \frac{\theta}{a}\right)}{b + \sqrt{c^2+f^2} \operatorname{sen} (ax+\theta)},$

donde $\operatorname{sen} \theta = \frac{c}{\sqrt{c^2+f^2}}$, y $\operatorname{tg} \theta = \frac{c}{f}$ (véase N° 306).

406) $\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax + c^2 \operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{abc} \operatorname{arctg} \left(\frac{c}{b} \operatorname{tg} ax\right).$

407) $\int \frac{dx}{b^2 \cos^2 ax - c^2 \operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{2abc} \ln \frac{c \operatorname{tg} ax + b}{c \operatorname{tg} ax - b}.$

408) $\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx = -\frac{\cos (a+b)}{2(a+b)} - \frac{\cos (a-b)x}{2(a-b)}$

($a^2 \neq b^2$; para $a = b$ véase N° 354).

## *Integrales que contienen tangentes*

409) $$\int \operatorname{tg} ax\, dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax.$$

410) $$\int \operatorname{tg}^2 ax\, dx = \frac{\operatorname{tg} ax}{a} - x.$$

411) $$\int \operatorname{tg}^3 ax\, dx = \frac{1}{2a} \operatorname{tg}^2 ax + \frac{1}{a} \ln \cos ax.$$

412) $$\int \operatorname{tg}^n ax\, dx = \frac{1}{a(n-1)} \operatorname{tg}^{n-1} ax - \int \operatorname{tg}^{n-2} ax\, dx.$$

413) $$\int x \operatorname{tg} ax\, dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x^5}{15} + \frac{2a^5x^7}{105} + \frac{17a^7x^9}{2835} + \dots$$
$$\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_n a^{2n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots{}^*.$$

414) $$\int \frac{\operatorname{tg} ax\, dx}{x} = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \frac{17(ax)^7}{2205} + \dots$$
$$\dots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \dots{}^*.$$

415) $$\int \frac{\operatorname{tg}^n ax}{\cos^2 ax}\, dx = \frac{1}{a(n+1)} \operatorname{tg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$$

416) $$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \pm \frac{x}{2} + \frac{1}{2a} \ln(\operatorname{sen} ax \pm \cos ax).$$

417) $$\int \frac{\operatorname{tg} ax\, dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a} \ln(\operatorname{sen} ax \pm \cos ax).$$

## *Integrales que contienen cotangentes*

418) $$\int \operatorname{ctg} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{sen} ax.$$

419) $$\int \operatorname{ctg}^2 ax\, dx = -\frac{\operatorname{ctg} ax}{a} - x.$$

420) $$\int \operatorname{ctg}^3 ax\, dx = -\frac{1}{2a} \operatorname{ctg}^2 ax - \frac{1}{a} \ln \operatorname{sen} ax.$$

421) $$\int \operatorname{ctg}^n ax\, dx = -\frac{1}{a(n-1)} \operatorname{ctg}^{n-1} ax - \int \operatorname{ctg}^{n-2} ax\, dx \quad (n \neq 1).$$

422) $$\int x \operatorname{ctg} ax\, dx = \frac{x}{a} - \frac{ax^3}{9} - \frac{a^3x^5}{225} - \dots - \frac{2^{2n} B_n a^{2n-1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \dots{}^*.$$

423) $$\int \frac{\operatorname{ctg} ax\, dx}{x} = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \frac{2(ax)^5}{4725} - \dots$$
$$\dots - \frac{2^{2n} B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \dots{}^*.$$

---

* $B_n$ son los números de Bernoulli (véase la pág. 347).

424) $\int \frac{\operatorname{ctg}^n ax}{\operatorname{sen}^2 ax}\, dx = -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{ctg}^{n+1} ax \qquad (n \neq -1).$

425) $\int \frac{dx}{1 \pm \operatorname{ctg} ax} = \int \frac{\operatorname{tg} ax\, dx}{\operatorname{tg} ax \pm 1}$ (véase Nº 417).

## Integrales de otras funciones trascendentes

### *Integrales de funciones hiperbólicas*

426) $\int \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{ch} ax.$

427) $\int \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{sh} ax.$

428) $\int \operatorname{sh}^2 ax\, dx = \frac{1}{2a} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax - \frac{1}{2} x.$

429) $\int \operatorname{ch}^2 ax\, dx = \frac{1}{2a} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} ax + \frac{1}{2} x.$

430) $\int \operatorname{sh}^n ax\, dx = \frac{1}{an} \operatorname{sh}^{n-1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sh}^{n-2} ax\, dx$

(para $n > 0$),

$= \frac{1}{a(n+1)} \operatorname{sh}^{n+1} ax \operatorname{ch} ax - \frac{n+2}{n+1} \int \operatorname{sh}^{n+2} ax\, dx$

(para $n < 0$, $(n \neq -1)$.

431) $\int \operatorname{ch}^n ax\, dx = \frac{1}{an} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n-1} ax + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{ch}^{n-2} ax\, dx$

(para $n > 0$),

$= -\frac{1}{a(n+1)} \operatorname{sh} ax \operatorname{ch}^{n+1} ax + \frac{n+2}{n+1} \int \operatorname{ch}^{n+2} ax\, dx$

(para $n < 0$), $\qquad (n \neq -1)$.

432) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{th} \frac{ax}{2}.$

433) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} e^{ax}.$

434) $\int x \operatorname{sh} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{ch} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ax.$

435) $\int x \operatorname{ch} ax\, dx = \frac{1}{a} x \operatorname{sh} ax - \frac{1}{a^2} \operatorname{ch} ax.$

436) $\int \operatorname{th} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} ax.$

437) $\int \operatorname{cth} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{sh} ax.$

438) $\int \operatorname{th}^2 ax\, dx = x - \frac{\operatorname{th} ax}{a}.$

439) $\int \operatorname{cth}^2 ax\, dx = x - \frac{\operatorname{cth} ax}{a}.$

$$\left.\begin{array}{ll}440) & \int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\, dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} ax).\\ 441) & \int \operatorname{ch} ax \operatorname{ch} bx\, dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} ax \operatorname{ch} bx - b \operatorname{sh} bx \operatorname{ch} ax).\\ 442) & \int \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx\, dx = \frac{1}{a^2-b^2}(a \operatorname{sh} bx \operatorname{sh} ax - b \operatorname{ch} bx \operatorname{ch} ax).\end{array}\right\} a^2 \neq b^2.$$

443) $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \operatorname{sen} ax - \operatorname{sh} ax \cos ax).$

444) $\int \operatorname{ch} ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \cos ax + \operatorname{ch} ax \operatorname{sen} ax).$

445) $\int \operatorname{sh} ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} ax \cos ax + \operatorname{sh} ax \operatorname{sen} ax).$

446) $\int \operatorname{ch} ax \operatorname{sen} ax\, dx = \frac{1}{2a}(\operatorname{sh} ax \operatorname{sen} ax - \operatorname{ch} ax \cos ax).$

## *Integrales de funciones exponenciales*

447) $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$

448) $\int xe^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1).$

449) $\int x^2e^{ax}\, dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right).$

450) $\int x^ne^{ax}\, dx = \frac{1}{a} x^ne^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\, dx.$

451) $\int \frac{e^{ax}}{x}\, dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \ldots$*.

452) $\int \frac{e^{ax}}{x^n}\, dx = \frac{1}{n-1}\left(-\frac{e^{ax}}{x^{n-1}} + a\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}\, dx\right) \qquad (n \neq 1).$

453) $\int \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{1}{a} \ln \frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}.$

454) $\int \frac{dx}{b+ce^{ax}} = \frac{x}{b} - \frac{1}{ab} \ln (b+ce^{ax}).$

---

* La integral definida $\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$ se llama *función exponencial-integral* y se designa por Ei $(x)$. Para $x > 0$ la integral es divergente en el punto $t = 0$; en este caso se entiende por Ei $(x)$ el valor principal de la integral impropia (véase la pág. 460).

$$\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt = C + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 1!} + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot n!} + \ldots$$

($C$ es la constante de Euler, véase la pág. 324).

455) $\int \frac{e^{ax}\,dx}{b+ce^{ax}} = \frac{1}{ac} \ln (b+ce^{ax}).$

456) $\int \frac{dx}{be^{ax}+ce^{-ax}} = \frac{1}{a\sqrt{bc}} \operatorname{arctg} \left(e^{ax} \sqrt{\frac{b}{c}}\right) \qquad (bc > 0),$

$= \frac{1}{2a\sqrt{-bc}} \ln \frac{c+e^{ax}\sqrt{-bc}}{c-e^{ax}\sqrt{-bc}} \qquad (bc < 0).$

457) $\int \frac{xe^{ax}\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}.$

458) $\int e^{ax} \ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx$ (véase N° 451).

459) $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx).$

460) $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx).$

461) $\int e^{ax} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen}^{n-1} x}{a^2+n^2}(a \operatorname{sen} x - n\cos x) +$

$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$ (véanse N° 447 y N° 459).

462) $\int e^{ax} \cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1} x}{a^2+n^2}(a \cos x + n\operatorname{sen} x) +$

$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} x\,dx$ (véanse N° 447 y N° 460).

463) $\int xe^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bx - b\cos bx) -$

$-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\operatorname{sen} bx - 2ab\cos bx].$

464) $\int xe^{ax} \cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b\operatorname{sen} bx) -$

$-\frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}[(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\operatorname{sen} bx].$

### *Integrales de funciones logarítmicas*

465) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x.$

466) $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x^2) - 2x\ln x + 2x.$

467) $\int (\ln x)^3\,dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x.$

468) $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx \qquad (n \neq -1).$

469) $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln \ln x + \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\ln x)^3}{3 \cdot 3!} + \ldots$ *.

470) $\int \frac{dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{dx}{(\ln x)^{n-1}}$

$(n \neq 1)$ (véase N° 469).

471) $\int x^m \ln x \, dx = x^{m+1}\left[\frac{\ln x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right] \qquad (m \neq -1).$

472) $\int x^m (\ln x)^n \, dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m (\ln x)^{n-1} \, dx$

$(m \neq -1, n \neq -1$; (véase N° 471).

473) $\int \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$

474) $\int \frac{\ln x}{x^m} \, dx = -\frac{\ln x}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2 x^{m-1}} \qquad (m \neq 1).$

475) $\int \frac{(\ln x)^n}{x^m} \, dx = -\frac{(\ln x)^n}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{n}{m-1} \int \frac{(\ln x)^{n-1}}{x^m} \, dx$

$(m \neq 1)$ (véase N° 474).

476) $\int \frac{x^m \, dx}{\ln x} = \int \frac{e^{-y}}{y} \, dy$, donde $y = -(m+1) \ln x$

(véanse N° 451).

477) $\int \frac{x^m \, dx}{(\ln x)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m \, dx}{(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$

478) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln \ln x.$

479) $\int \frac{dx}{x^n \ln x} = \ln \ln x - (n-1) \ln x + \frac{(n-1)^2 (\ln x)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(n-1)^3 (\ln x)^3}{3 \cdot 3!} +$

$+ \ldots$

480) $\int \frac{dx}{x(\ln x)^n} = \frac{-1}{(n-1)(\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$

481) $\int \frac{dx}{x^p (\ln x)^n} = \frac{-1}{x^{p-1}(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{p-1}{n-1} \int \frac{dx}{x^p (\ln x)^{n-1}} \qquad (n \neq 1).$

482) $\int \ln \operatorname{sen} x \, dx = x \ln x - x - \frac{x^3}{18} - \frac{x^5}{900} - \ldots -$

$- \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n+1}}{n(2n+1)!} - \ldots$ **.

---

* La integral definida $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ se llama *logaritmo-integral* y se designa por $\operatorname{li} x$. Para $x > 1$ la integral es divergente en el punto $t = 1$; en este caso se entiende por $\operatorname{li} x$ el valor principal de la integral impropia (pág. 460). El logaritmo-integral está relacionado con la función exponencial-integral (véase la pág. 434): $\operatorname{li} x = \operatorname{Ei}(\ln x)$.

** $B_n$ son los números de Bernoulli (véase la pág. 347).

483) $\int \ln \cos x \, dx = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^5}{60} - \frac{x^7}{315} - \ldots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} - \ldots$ *.

484) $\int \ln \operatorname{tg} x \, dx = x \ln x - x + \frac{x^3}{9} + \frac{7x^5}{450} + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n+1)!} x^{2n+1} + \ldots$ *.

485) $\int \operatorname{sen} \ln x \, dx = \frac{x}{2} (\operatorname{sen} \ln x - \cos \ln x).$

486) $\int \cos \ln x \, dx = \frac{x}{2} (\operatorname{sen} \ln x + \cos \ln x).$

487) $\int e^{ax} \ln x \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \ln x - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x} dx$ (véase Nº 451).

*Integrales de las funciones trigonométricas inversas*

488) $\int \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} dx = x \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}.$

489) $\int x \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$

490) $\int x^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$

491) $\int \frac{\operatorname{arcsen} \frac{x}{a} \, dx}{x} = \frac{x}{a} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} + \ldots$

492) $\int \frac{\operatorname{arcsen} \frac{x}{a} \, dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} - \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$

493) $\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}.$

494) $\int x \arccos \frac{x}{a} dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4} \sqrt{a^2 - x^2}.$

495) $\int x^2 \arccos \frac{x}{a} dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9} (x^2 + 2a^2) \sqrt{a^2 - x^2}.$

496) $\int \frac{\arccos \frac{x}{a} \, dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ln x - \frac{x}{a} - \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 3} \frac{x^3}{a^3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \frac{x^5}{a^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 7} \frac{x^7}{a^7} - \ldots$

---

* $B_n$ son los números de Bernoulli (véase la pág. 347).

497) $$\int \frac{\arccos \frac{x}{a}\, dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \arccos \frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

498) $$\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2).$$

499) $$\int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}.$$

500) $$\int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln (a^2 + x^2).$$

501) $$\int x^n \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{a^2 + x^2} \qquad (n \neq -1).$$

502) $$\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx}{x} = \frac{x}{a} - \frac{x^3}{3^2 a^3} + \frac{x^5}{5^2 a^5} - \frac{x^7}{7^2 a^7} + \ldots (|x| < |a|).$$

503) $$\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

504) $$\int \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1) x^{n-1}} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)}$$
$(n \neq 1)$.

505) $$\int \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2).$$

506) $$\int x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2} (x^2 + a^2) \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}.$$

507) $$\int x^2 \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln (a^2 + x^2).$$

508) $$\int x^n \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1}\, dx}{a^2 + x^2} \qquad (n \neq -1).$$

509) $$\int \frac{\operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx}{x} = \frac{\pi}{2} \ln x - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3^2 a^3} - \frac{x^5}{5^2 a^5} + \frac{x^7}{7^2 a^7} - \ldots$$

510) $$\int \frac{\operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2a} \ln \frac{a^2 + x^2}{x^2}.$$

511) $$\int \frac{\operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1) x^{n-1}} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{n-1} \int \frac{dx}{x^{n-1}(a^2 + x^2)}$$
$(n \neq 1)$.

*Integrales de las funciones hiperbólicas inversas*

512) $\int \operatorname{Arsh} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Arsh} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}$.

513) $\int \operatorname{Arch} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Arch} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2-a^2}$.

514) $\int \operatorname{Arth} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Arth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2-x^2)$.

515) $\int \operatorname{Arcth} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{Arcth} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (x^2-a^2)$.

## B. INTEGRALES DEFINIDAS

### 8. *Conceptos y teoremas fundamentales*

DEFINICIÓN. Se llama *integral definida* (entre los límites $a$ y $b$) de una función $y = f(x)$ dada en el intervalo cerrado $[a, b]$* [en este caso puede ser $a < b$ (caso $A$) ó $a > b$ (caso $B$)], al número obtenido de la siguiente manera:

1) el intervalo $[a, b]$ se divide en $n$ "intervalos elementales" mediante números arbitrarios $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ que se han elegido de tal modo que sea

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ (en el caso $A$)

ó

$a = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_i > \ldots > x_{n-1} > x_n = b$ (en el caso $B$);

2) en el interior (o en la frontera) de cada intervalo elemental $[x_{i-1}, x_i]$ se elige un número arbitrario $\xi_i$ (fig. 302):

$x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ (en el caso $A$) ó $x_{i-1} \geqslant \xi_i \geqslant x_i$ (en el caso $B$);

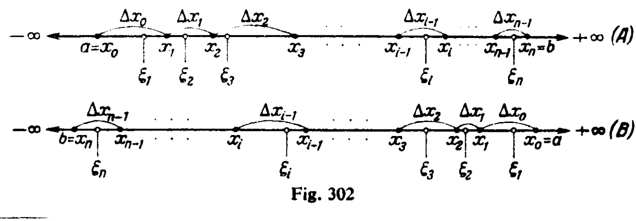



Fig. 302

* El concepto de integral definida también se puede generalizar para las funciones que estan dadas en una región conexa cualquiera (en un intervalo abierto o semiabierto, en un semieje o en todo el eje numérico) o en una región conexa, a excepción de un número finito de puntos aislados. Las integrales consideradas en tal sentido generalizado pertenecen a las llamadas integrales **impropias** (véanse las págs. 446-462).

3) los valores $f(\xi_i)$ de la función $f(x)$ en estos puntos elegidos se multiplican por las diferencias correspondientes $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ (las longitudes de los intervalos elementales $[x_{i-1}, x_i]$ se toman con signo «+» en el caso $A$ y con signo «−» en el caso $B$);

4) todos los $n$ productos obtenidos $f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}$ se suman;

5) se calcula el límite de la suma obtenida

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1},$$

cuando la longitud de cada intervalo elemental $\Delta x_{i-1}$ tiende a cero (y, por consiguiente, $n \to \infty$).

SI ESTE LÍMITE EXISTE Y NO DEPENDE DE LA ELECCIÓN DE LOS NÚMEROS $x_i$ Y $\xi_i$, **ÉSTE SE LLAMA INTEGRAL DEFINIDA**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_{i-1}. \qquad (*)$$

TEOREMA DE EXISTENCIA. La integral definida de una función continua en el intervalo $[a, b]$ existe, es decir, existe el límite $(*)$ y éste no depende de la elección de los números $x_i$ y $\xi_i$*.

ELEMENTOS DE LA INTEGRAL DEFINIDA. En la fórmula $(*)$ el símbolo $\int$ se llama *signo integral;* el número $a$, *límite inferior;* el número $b$, *límite superior*; la función $f(x)$, *función integrando*; la expresión $f(x)\,dx$, *expresión integrando;* la letra $x$, *variable de integración.* El valor de la integral sólo depende del tipo de función $f$ y de los límites $a$ y $b$, pero no depende de la variable de integración, la cual puede estar designada por cualquier letra. Así, pues,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz, \text{ etc.}$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA de la integral definida de una función continua. El valor numérico de la integral $(*)$ es igual al área limitada por una parte de la gráfica de la función $y = f(x)$, por el eje $Ox$ y por las ordenadas $f(a)$ y $f(b)$, tomada con signo «+» ó «−» según el esquema

---

* La integral definida también existe para una función **acotada** que tiene un número finito de puntos de discontinuidad en el intervalo $[a, b]$.

Una función, para la cual existe la integral definida en el intervalo dado, se llama *integrable* en este intervalo.

de la fig. 303. Si la curva corta una o varias veces al eje $Ox$ en el interior del intervalo $[a, b]$, entonces el valor numérico de la integral es igual a la suma algebraica de las áreas que están situadas a cada lado del eje $Ox$.

LA INTEGRAL CON LÍMITES IGUALES. Por definición, es

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

LAS PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA SE EXPRESAN MEDIANTE LOS SIGUIENTES TEOREMAS:

1) *Teorema de la permutación de los límites.* Al permutar los límites de integración, la integral cambia de signo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

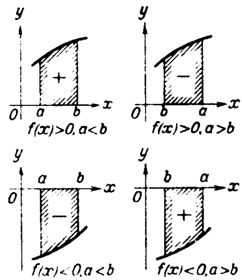


Fig. 303

2) *Teorema de la división de la integral.* Para **cualesquiera** números $a$, $b$, $c$ se tiene que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3) *La integral de una suma algebraica* de varias funciones es igual a la suma de las integrales de estas funciones:

$$\int_a^b [f(x)+\varphi(x)-\psi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

4) *El factor constante* se puede sacar fuera del signo de la integral:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

5) *Teorema del valor medio.* Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces en el interior del intervalo $[a, b]$ hay por lo menos un número $\xi$ (en el caso $A$ $a < \xi < b$, en el caso $B$ $a > \xi > b$, véase la pág. 439) tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi);$$

la interpretación geométrica de este teorema se muestra en la fig. 304; entre los puntos $a$ y $b$ existe un punto $\xi$ tal, que el área de la figura $ABCD$ es igual al área del rectángulo $AB'C'D$.

*Teorema generalizado del valor medio.* Para la integral del producto de dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ (donde $f(x)$ es continua y $\varphi(x)$ no cambia de signo en el intervalo $[a, b]$) hay en el interior de este intervalo por lo menos un número $\xi$ tal que

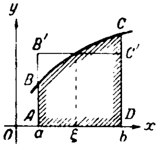


Fig. 304

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

6) *Teorema de la acotación de la integral.* El valor de la integral definida está comprendido entre los productos del valor máximo absoluto y del valor mínimo absoluto de la función integrando por la longitud del intervalo de integración:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

donde $m$ es el valor mínimo absoluto y $M$ es el valor máximo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

La interpretación geométrica de este teorema es evidente en la fig. 305.

7) *Teorema de Leibniz - Newton.* La integral definida con límite superior variable $\int_a^x f(t)\,dt$* es una función continua $F(x)$ de este límite que es **primitiva** con respecto a la función integrando:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ó}$$

$$d\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,dx.$$

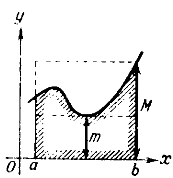


Fig. 305

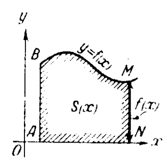


Fig. 306

*Interpretación geométrica* de este teorema: la derivada del área variable $S(x)$, representada en la fig. 306, es igual a la ordenada finita variable $NM$ (tanto el área como la ordenada se toman con signo «+» ó «−», véase la fig. 303 de la pág. 441).

---

* Aquí la variable de integración se designa por $t$, para no confundirla con el límite variable $x$ (véase la pág. 440).

8) *Teorema fundamental del cálculo integral* (expresión de la integral definida mediante la indefinida). Si

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \qquad (**)$$

Frecuentemente, el segundo miembro de la igualdad (∗ ∗) se designa con el *símbolo de sustitución:*

$$F(b)-F(a) \equiv \Big[F(x)\Big]_a^b \quad \text{ó} \quad F(x)\Big|_a^b.$$

Al sustituir los límites, la constante de integración $C$ se elimina, por lo cual puede ser omitida al calcular la integral definida según la fórmula (∗ ∗). De este modo, la igualdad (∗ ∗) puede expresarse en la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b.$$

La igualdad (∗ ∗) puede expresarse también como la integral de la diferencial

$$\int_a^b dF(x) = F(b)-F(a).$$

## 9. *Cálculo de integrales definidas*

El método principal para calcular integrales definidas se basa en la expresión de la integral definida mediante la indefinida (véase el teorema fundamental en esta página, arriba):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b.$$

En este caso, para calcular la integral definida es necesario hallar la función primitiva de $f(x)$.

Reglas de transformación de la integral definida. Frecuentemente una integral definida se transforma en otra mediante las siguientes reglas, que son análogas a las reglas de transformación de las integrales indefinidas.

1) *Regla de sustitución.* Mediante una función auxiliar $x = \varphi(t)$ (donde la nueva variable $t$ es una función uniforme $t = \psi(x)$ en el intervalo $[a, b]$) la integral se transforma a la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Esta fórmula da la posibilidad de no efectuar la sustitución inversa al calcular la integral indefinida.

*Ejemplo:*

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_{\operatorname{arcsen} 0}^{\operatorname{arcsen} 1} a^2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\,d\operatorname{sen} t^{*} = a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\Big[t\Big]_0^{\pi/2} + \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}\cos z\,dz^{**} =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\Big[\operatorname{sen} z\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2) *Regla de integración por partes.* Representando la expresión integrando $f(x)\,dx$, por cualquier procedimiento, en la forma $u\,dv$ y encontrando $du$ (por diferenciación) y $v$ (por integración) transformamos la integral dada en la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u\,dv = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

*Ejemplo:*

$$\int_0^1 \underbrace{xe^x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \Big[xe^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e-(e-1) = 1.$$

MÉTODOS ARTIFICIALES. Si es muy difícil calcular la integral indefinida, o no puede ser expresada en general, mediante funciones elementales, entonces en una serie de casos el valor de la integral definida puede ser encontrado a pesar de todo por métodos artificiales. Por ejemplo, se

---

* La sustitución: $x = \varphi(t) = a\operatorname{sen} t$, $t = \psi(x) = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{a}$, $\psi(0) = 0$, $\psi(a) = \dfrac{\pi}{2}$.

** La sustitución: $t = \varphi(z) = \dfrac{z}{2}$, $z = \psi(t) = 2t$, $\psi(0) = 0$, $\psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$.

pueden emplear las propiedades de las funciones analíticas de variable compleja (los ejemplos en las págs. 591 y 594-595), el teorema de derivación de una integral con respecto al parámetro (véase la pág. 463):

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x, t)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx. \tag{A}$$

*Ejemplo:* Calcular

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\, dx.$$

Introducimos el parámetro $t$ y consideramos la integral

$$F(t) = \int_0^1 \frac{x^t-1}{\ln x}\, dx; \quad F(0) = 0; \quad F(1) = I.$$

Aplicando a $F(t)$ la fórmula (A), tenemos que:

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{x^t-1}{\ln x}\right] dt = \int_0^1 \frac{x^t \ln x}{\ln x}\, dx = \int_0^1 x^t\, dx = \left[\frac{1}{t+1}\, x^{t+1}\right]_0^1 = \frac{1}{t+1}\,.$$

La integración da

$$F(t) - F(0) = \int_0^t \frac{dt}{t+1} = \Big[\ln(t+1)\Big]_0^t = \ln(t+1),$$

de donde la integral buscada es: $I = F(1) = \ln 2$.

INTEGRACIÓN POR DESARROLLO EN SERIE. Si la función integrando $f(x)$ puede representarse en el intervalo de integración $[a, b]$ mediante una serie uniformemente convergente de funciones (véase la pág. 348)

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots,$$

entonces se cumple la igualdad

$$\int f(x)\, dx = \int \varphi_1(x)\, dx + \int \varphi_2(x)\, dx + \ldots + \int \varphi_n(x)\, dx + \ldots$$

y, por consiguiente, la integral definida puede representarse en forma de una serie numérica convergente

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \varphi_1(x)\, dx + \int_a^b \varphi_2(x)\, dx + \ldots + \int_a^b \varphi_n(x)\, dx + \ldots$$

En el caso de funciones fácilmente integrables $\varphi_i(x)$ (por ejemplo, al desarrollar $f(x)$ en una serie de potencias uniformemente convergente en el intervalo $[a, b]$), la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede calcular con cualquier grado de exactitud.

*Ejemplo:* Calcular $I = \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx$ con una exactitud de 0,0001.

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots$$

(véase la tabla de la pág. 381); la serie es uniformemente convergente en cualquier intervalo finito (según el teorema de Abel, véase la pág. 350); por lo tanto,

$$\int e^{-x^2}\,dx = x\left(1 - \frac{x^2}{1!\,3} + \frac{x^4}{2!\,5} - \frac{x^6}{3!\,7} + \frac{x^8}{4!\,9} \ldots\right),$$

de donde

$$I = \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2\cdot 1!\cdot 3} + \frac{1}{2^4\cdot 2!\cdot 5} - \frac{1}{2^6\cdot 3!\cdot 7} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^8\cdot 4!\cdot 9} - \ldots\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{160} - \frac{1}{2688} + \frac{1}{55296} - \ldots\right);$$

según el teorema de Leibniz de las series alternadas (véase la pág. 345), para calcular $I$ con una exactitud dada podemos limitarnos a los cuatro primeros términos del desarrollo:

$$I \approx \frac{1}{2}(1 - 0{,}08333 + 0{,}00625 - 0{,}00037) = \frac{1}{2}\cdot 0{,}92255 = 0{,}46127,$$

$$\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx = 0{,}4613.$$

Métodos de aproximación. Los más empleados de ellos se basan en el reemplazo de la integral por una suma finita. Para el cálculo de $\int_a^b y\,dx$ el intervalo desde $a$ ($= x_0$) hasta $b$ ($= x_n$) se divide en $n$ partes **iguales** y para los puntos de división $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ se calculan los valores de la función integrable $y$. Después se emplean una de las tres fórmulas $\left(\text{haciendo } h = \frac{b-a}{n}\right)$:

1) *Fórmula de los rectángulos* (fig. 307, $a$):

$$\int_a^b y\,dx \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}).$$

2) *Fórmula de los trapecios* (fig. 307, *b*):

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0+2y_1+2y_2+\ \dots\ +2y_{n-1}+y_n).$$

3) *Fórmula de las parábolas* (de Simpson); *n* es par (fig. 307, *c*);

$$\int_a^b y\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\ \dots\ +2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n). \qquad \text{(I)}$$

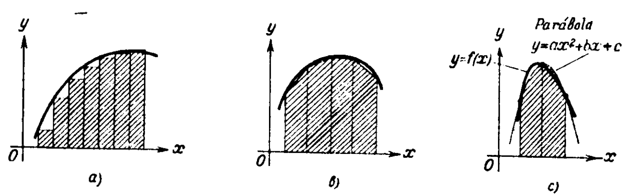



Fig. 307

Estas tres fórmulas son tanto más exactas cuanto mayor sea *n*. Para un mismo valor de *n* la segunda fórmula es más exacta que la primera y la tercera es aún más exacta, por lo cual es la más empleada. Para acotar el error obtenido al calcular la integral por la fórmula de Simpson (si *n* es múltiplo de 4) se calcula la suma auxiliar

$$\frac{2h}{3}(y_0+4y_2+2y_4+\ \dots\ +4y_{n-2}+y_n), \qquad \text{(II)}$$

que representa la misma fórmula de Simpson para franjas de anchura $2h$ (que se obtiene después de despreciar las ordenadas de subíndices impares). Se puede considerar aproximadamente que

$$\int_a^b y\,dx-\text{(I)} = \frac{\text{(I)}-\text{(II)}}{15}.$$

Sustituyendo la función integrando por cualquier polinomio de interpolación (véase la pág. 660) se pueden obtener muchas otras fórmulas de integración aproximada. De éstas, las más empleadas son (véanse las designaciones en la pág. 662):

$$\int_a^b y\,dx = 2h\Big[(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+$$
$$+\frac{1}{6}(\Delta^2 y_0+\Delta^2 y_2+\ldots+\Delta^2 y_{n-2})-\frac{1}{180}(\Delta^4 y_{-1}+\Delta^4 y_1+\ldots+\Delta^4 y_{n-3})+$$
$$+\frac{1}{1512}(\Delta^6 y_{-2}+\Delta^6 y_0+\ldots+\Delta^6 y_{n-4})\Big] \quad (n \text{ es par}).$$

$$\int_a^b y\,dx = h\Big[\Big(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\Big)-$$
$$-\frac{1}{12}\Big(\frac{\Delta y_{n-1}+\Delta y_n}{2}-\frac{\Delta y_{-1}+\Delta y_0}{2}\Big)+$$
$$+\frac{11}{720}\Big(\frac{\Delta^3 y_{n-2}+\Delta^3 y_{n-1}}{2}-\frac{\Delta^3 y_{-2}+\Delta^3 y_{-1}}{2}\Big)-$$
$$-\frac{1}{317}\Big(\frac{\Delta^5 y_{n-3}+\Delta^5 y_{n-2}}{2}-\frac{\Delta^5 y_{-3}+\Delta^5 y_{-2}}{2}\Big)\Big].$$

Generalmente, no se calcula el último sumando de estas fórmulas y sólo sirve para la acotación aproximada del error de los cálculos según la fórmula dada.

MÉTODO GRÁFICO. Si la función integrable $y=f(x)$ está representada por la gráfica $AB$ (fig. 308), entonces $\int_a^b f(x)\,dx$, siendo igual al área de $M_0ABN$, puede hallarse gráficamente por el siguiente procedimiento:

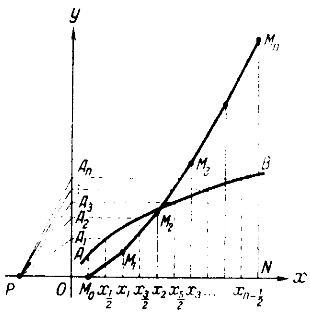


Fig. 308

1) dividimos $M_0N$ en $2n$ partes iguales mediante los puntos

$$x_{1/2},\ x_1,\ x_{3/2},$$
$$x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_{n-1/2}$$

(cuanto más puntos de división haya, tanto más exacto será el resultado).

2) por los puntos de división

$$x_{1/2},\ x_{3/2},\ \ldots,\ x_{n-1/2}$$

trazamos las ordenadas de la curva y las marcamos en el eje $Oy$ (los segmentos $OA_1$, $OA_2$, ..., $OA_n$);

3) trazamos un segmento $OP$ de longitud arbitraria en el lado izquierdo del eje $Ox$ y unimos $P$ con los puntos $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$;

4) trazamos por el punto $M_0$ un segmento $M_0M_1$ paralelo a $PA_1$ hasta la intersección con la ordenada del punto $x_1$, trazamos por $M_1$ un segmento $M_1M_2 \parallel PA_2$ hasta la intersección con la ordenada del punto $x_2$, después $M_2M_3 \parallel PA_3$, etc., y así hasta que alcancemos la última ordenada en el punto $M_n$.

La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es numéricamente igual al producto de las longitudes de los segmentos $OP$ y $NM_n$; la arbitrariedad de la longitud de $OP$ se emplea para regular las dimensiones del dibujo (cuanto menores sean las dimensiones admisibles, tanto mayor se debe elegir $OP$). Si $OP = 1$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = NM_n$ y la quebrada $M_0 M_1 M_2 \ldots$ $\ldots M_n$ representa aproximadamente la gráfica de la función primitiva de $f(x)$ $\left[\text{la integral indefinida } \int f(x)\,dx\right]$.

El cálculo mediante un planímetro. *Los planímetros* son aparatos que permiten determinar el área limitada por una curva cualquiera y, por lo tanto, permiten calcular las integrales definidas de una función $y = f(x)$ dada por su gráfica. Los planímetros de tipo especial no sólo calculan $\int y\,dx$, sino que también $\int y^2\,dx$ y $\int y^3\,dx$.

Intégrafos. Existen aparatos que dibujan la gráfica de la función integral

$$Y = \int_a^x f(t)\,dt$$

por la gráfica de la función dada $y = f(x)$; tales aparatos se llaman *intégrafos*.

## *10. Aplicaciones de las integrales definidas*

Principio general de las aplicaciones de la integral definida para el cálculo de los valores geométricos, físicos y otros, es:

1) la cantidad calculada $A$ se divide de una manera determinada en un gran número de cantidades pequeñas: $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$;

2) cada cantidad $a_i$ se reemplaza por una cantidad $\tilde{a}_i$ (próxima a $a_i$), cuyo cálculo se efectúa por una fórmula conocida; el error $\alpha_i = a_i - \tilde{a}_i$ debe ser en comparación con $\tilde{a}_i$ un infinitésimo de orden superior, es decir, $a_i$ y $\tilde{a}_i$ son infinitésimos equivalentes;

3) la cantidad $\tilde{a}_i$ se expresa mediante una variable $x$ elegida de tal modo que $\tilde{a}_i$ tome la forma $f(x_i)\,\Delta x_i$;

4) la cantidad buscada se calcula como el límite de la suma

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx,$$

donde $a$ y $b$ son los valores límites de $x$.

*Ejemplo:* Cálculo del volumen de la pirámide ($S$ es el área de la base, $H$ es la altura):

1) el volumen calculado $V$ se divide mediante secciones planas en volúmenes de pirámides delgadas truncadas (fig. 309, *a*)

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n;$$

2) cada pirámide truncada se reemplaza por una prisma $\tilde{v}_i$ de la misma altura y con el área de la base igual a la de la base superior de la pirámide truncada (fig. 309, *b*). El volumen despreciado es un infinitésimo de orden superior que $v_i$;

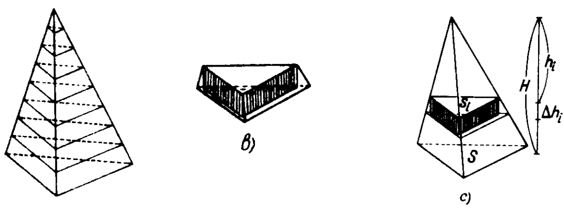



Fig. 309

3) la fórmula del volumen $\tilde{v}_i$ se reduce al tipo $\tilde{v}_i = S_i\,\Delta h_i$, donde $h_i$ (fig. 309, *c*) es la distancia de la cara superior al vértice de la pirámide (pues $S_i : S = h_i^2 : H^2$):

$$\tilde{v}_i = \frac{Sh_i^2}{H^2}\,\Delta h_i;$$

4) el volumen buscado se calcula como el límite de la suma:

$$V_{\text{pir}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{Sh_i^2}{H^2}\,\Delta h_i = \int_0^H \frac{Sh^2}{H^2}\,dh = \frac{SH}{3}.$$

APLICACIONES PRINCIPALES A LA GEOMETRÍA.

*Área.* La fórmula del área de un *trapecio curvilíneo* (fig. 310, *a*) si la ecuación de la curva está dada explícitamente [$y = f(x)$ y $a \leqslant x \leqslant b$]

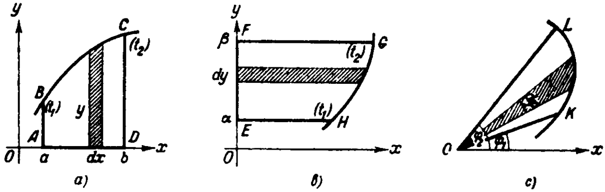



Fig. 310

o en forma paramétrica $[x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2]$ es:

$$S_{ABCD} = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt;$$

la fórmula del área del trapecio curvilíneo representado en la fig. 310, б $[x = g(y),\ \alpha \leqslant y \leqslant \beta$ o, paramétricamente, $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2]$ es:

$$S_{EFGH} = \int_\alpha^\beta g(y)\,dy = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt;$$

la fórmula del área del *sector curvilíneo* (fig. 310, *c*), si la curva está dada por una ecuación en coordenadas polares $[\rho = \rho(\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2]$, es:

$$S_{OKL} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2\,d\varphi.$$

El cálculo de áreas de figuras más complicadas se efectúa mediante la integral curvilínea (véase pág. 476) o mediante la integral doble (pág. 489).

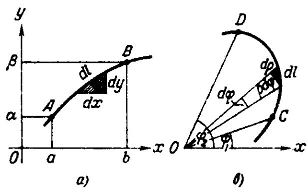



Fig. 311

*Longitud de un arco*. La fórmula de la longitud de un arco de una curva (fig. 311, *a*), si la ecuación de la curva está dada explícitamente $[y = f(x)$ ó $x = g(y)]$ o en forma paramétrica $[x = \varphi(t),\ y = \psi(t)]$, es:

$$L_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{[g'(y)]^2+1}\,dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt;$$

ó $L = \int dl$, donde $dl$ es la diferencial de arco: $dl^2 = dx^2+dy^2$, Si la curva (fig. 311, *b*) está dada por una ecuación en coordenadas polares [$\rho = \rho(\varphi)$], entonces

$$L_{\overset{\frown}{OD}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho^2}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi$$

ó $L = \int dl$, donde $dl$ es la diferencial de arco: $dl^2 = \rho^2\, d\varphi^2 + d\rho^2$.

***Superficie.*** La fórmula del área de la superficie formada por la revolución de una curva $y = f(x)$ alrededor del eje $Ox$ (fig. 312, *a*), es:

$$S = 2\pi \int_a^b y\, dl = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx;$$

de la curva $x = f(y)$ alrededor del eje $Oy$ (fig. 312, *b*), es:

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta x\, dl = 2\pi \int_\alpha^\beta x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy.$$

Véanse en las págs. 489, 493 el cálculo de las superficies que limitan cuerpos más complicados.

*Volumen.* La fórmula del volumen de un sólido de revolución engendrado por una curva que gire alrededor del eje $Ox$ (fig. 312, *a*), es:

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx;$$

alrededor del eje $Oy$ (fig. 312, *b*), es:

$$V = \pi \int_\alpha^\beta x^2\, dy.$$

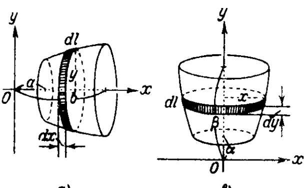



Fig. 312

La fórmula del volumen de un sólido, si el área de su sección trazada perpendicularmente al eje $Ox$ es una función de $x[S = f(x)]$ (fig. 313), es:

$$V = \int_a^b f(x)\, dx.$$

El cálculo del volumen de sólidos más complicados se efectúa mediante la integral doble o la triple (véanse las págs. 481, 489, 490).

APLICACIONES A LA MECÁNICA Y A LA FÍSICA.

*El camino* recorrido por un punto desde el momento inicial $t_0$ hasta el momento $T$ [si la velocidad del movimiento es variable, dependiente del tiempo, $v = f(t)$], se determina por la fórmula

$$S = \int_{t_0}^{T} v\, dt.$$

*El trabajo* realizado por una fuerza en el desplazamiento de un cuerpo por una recta $Ox$ que coincide con la dirección de la fuerza, desde $x=a$ hasta $x=b$ [si la magnitud de la fuerza es la variable $F=f(x)$] se determina por la fórmula (fig. 314)

$$A = \int_a^b F\, dx^*.$$

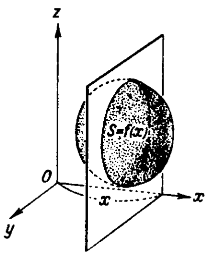



Fig. 313

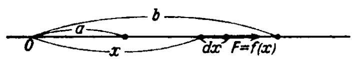



Fig. 314

*La presión* que ejerce un líquido de peso específico $\gamma$ sobre una cara de una lámina vertical sumergida en el mismo, si la distancia ($x$) de los puntos de la lámina hasta el nivel del líquido varía desde $a$ hasta $b$ (fig. 315), se determina por la fórmula

$$P = \int_a^b \gamma x y\, dx,$$

donde $y$ es la longitud de la sección horizontal de la lámina [$y = f(x)$].

*El momento de inercia:* 1) de un arco de una curva homogénea $y = f(x)$ [$a \leqslant x \leqslant b$] con respecto al eje $Oy$ (fig. 316, $a$), se determina por la fórmula

$$I_y = \delta \int_a^b x^2\, dl = \delta \int_a^b x^2 \sqrt{1+(y')^2}\, dx \quad (\delta \text{ es la densidad lineal});$$

---

* En general, si la dirección de la fuerza no coincide con la dirección del movimiento o si el cuerpo se desplaza por un camino curvilíneo, el trabajo se calcula mediante una integral curvilínea (véase la pág. 618).

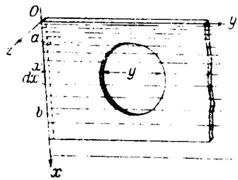



Fig. 315

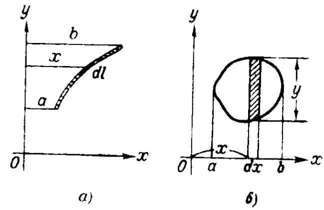



Fig. 316

2) de una figura plana homogénea (fig. 316, $b$) con respecto al eje $Oy$, por la fórmula

$$I_x = \delta \int_a^b x^2 y \, dx \ (\delta \text{ es la densidad de la figura}),$$

donde $y$ es la longitud de la sección paralela al eje $Oy$. Véase también la pág. 489.

*El centro de gravedad C de un arco* (fig. 317, $a$) de una curva plana homogénea $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ tiene las coordenadas:

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2} \, dx}{L}, \quad y_c = \frac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2} \, dx}{L},$$

donde $L$ es la longitud de la curva (véanse las págs. 451-452). El centro de gravedad de una *curva cerrada* (fig. 317, $b$) es:

$$x_c = \frac{\int_a^b x \left(\sqrt{1+(y_1')^2} + \sqrt{1+(y_2')^2}\right) dx}{L},$$

$$y_c = \frac{\int_a^b \left(y_1 \sqrt{1+(y_1')^2} + y_2 \sqrt{1+(y_2')^2}\right) dx}{L},$$

donde $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ son las ecuaciones de las partes superior e inferior del contorno y $L$ es la longitud de todo el contorno.

*Primer teorema de Guldin.* El área de la superficie de un cuerpo, engendrado por una curva plana que gira alrededor de un eje, situado en el plano de esta curva y que no la corta, es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia descrita en esta revolución por el centro de gravedad de la curva:

$$S_{rv} = L \cdot 2\pi y_c .$$

*El centro de gravedad C de un trapecio curvilíneo homogéneo* (fig. 317, *c*) tiene las coordenadas

$$x_c = \frac{\int_a^b xy\,dx}{S}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{S},$$

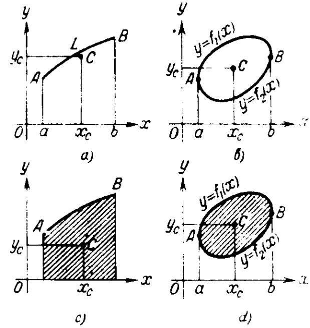



Fig. 317

donde $S$ es el área del trapecio, $y = f(x)$ es la ecuación de la curva $AB$. El centro de gravedad de una *figura plana cualquiera* (fig. 317, *d*) es:

$$x_c = \frac{\int_a^b x(y_1 - y_2)\,dx}{S}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y_1^2 - y_2^2)\,dx}{S},$$

donde $y_1 = f_1(x)$ e $y_2 = f_2(x)$ son las ecuaciones de las partes superior e inferior del contorno, $S$ es el área de la figura.

*Segundo teorema de Guldin.* El volumen de un cuerpo engendrado por una figura plana que gira alrededor de un eje situado en el plano de esta figura y que no la corta, es igual al producto del área de la figura por la longitud de la circunferencia descrita en esta revolución por el centro de gravedad de esta figura

$$V_{rv} = S \cdot 2\pi y_c .$$

Sobre los centros de gravedad de las figuras planas y de los cuerpos, véanse en las págs. 489-490 (integrales múltiples).

## *11. Integrales impropias*

CONCEPTOS GENERALES. Las generalizaciones más simples del concepto de integral definida (págs. 439-440) son las *integrales impropias**.

---

* El concepto de integral puede generalizarse a casos más complicados, en que el campo de definición de la función (el recinto de integración) es el conjunto de valores de cierta función *(integral de Stieltjes)*. Sobre esto, véase en los cursos completos de análisis matemático.

Dos tipos principales de integrales impropias:

1) *Integral con límites infinitos.* El campo de definición de la función integrando es el semieje cerrado $[a, \infty)$, o $(-\infty, b]$, o todo el eje numérico $(-\infty, +\infty)$.

2) *Integrales de funciones discontinuas.* La función dada es continua en todo el intervalo desde $a$ hasta $b$, a excepción de un número finito de puntos aislados, llamados *singulares.*

También pueden presentarse casos más complicados, como son las combinaciones de ambos tipos.

INTEGRALES CON LÍMITES INFINITOS.

*Definición.* Sea el campo de definición de la función el semieje cerrado $[a, \infty)$. Por definición

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,dx. \tag{1}$$

Si este límite existe, la integral (1) *existe* o es *convergente* y se llama *integral impropia.* Si el límite no existe, la integral (1) *no existe* o es *divergente.* Si $\lim\limits_{B\to\infty} \int_a^B f(x)\,dx = \infty$, se escribe

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty;$$

esta integral es divergente.

Análogamente se determinan las integrales impropias para las funciones dadas en el semieje $(-\infty, b]$ o en todo el eje numérico $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_A^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_A^B f(x)\,dx^*. \tag{3}$$

* Los números $A$ y $B$ tienden al infinito independientemente uno del otro. Si el límite (3) no existe, pero existe

$$\lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{+A} f(x)\,dx, \tag{4}$$

entonces el límite (4) se llama *valor principal de la integral impropia.*

*Interpretación geométrica de la integral con límites infinitos* (1), (2), (3): es el límite de las áreas de las figuras representadas en la fig. 318, *a*, *b*, *c*.

*Ejemplos:*

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B \to \infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B \to \infty} \ln B = \infty$ (es divergente)

2) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \to \infty} \int_2^B \frac{dx}{x^2} = \lim_{B \to \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{B}\right) = \frac{1}{2}$ (es convergente)

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} \int_A^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A \to -\infty \\ B \to +\infty}} [\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A] =$

$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ (es convergente).

Si es difícil calcular directamente los límites (1), (2), (3) o si sólo se pide establecer si son o no convergentes las integrales, entonces se puede aplicar cualquiera de los criterios suficientes de convergencia.

*Criterios suficientes de convergencia.* Aquí sólo se considera la integral del tipo (1). Para una integral del tipo (2) se puede hacer la

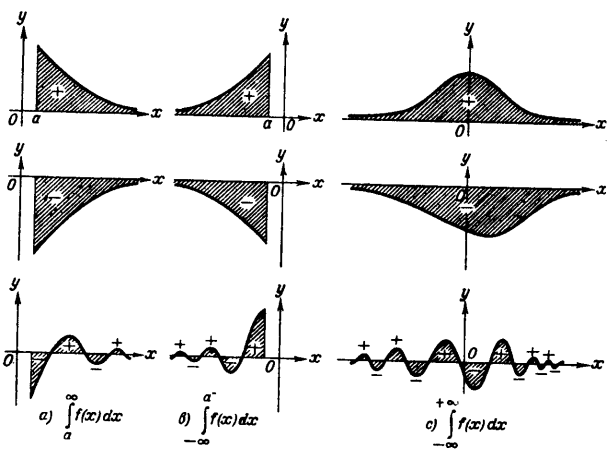



Fig. 318

sustitución de la variable $x = -z$ y reducir la integral al tipo (1):

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{\infty} f(-x)\,dx.$$

La integral del tipo (3) se descompone en una suma de dos integrales de los tipos (2) y (1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

donde $c$ es un número arbitrario.

CRITERIO 1. Si existe la integral $\int_{a}^{\infty} |f(x)|\,dx$, también existe la integral (1). En este caso, la integral (1) se llama *absolutamente convergente* y la función $f(x)$ *absolutamente integrable* en el semieje $[a, +\infty)$.

CRITERIO 2. Si $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones positivas que verifican la condición $f(x) \leqslant \varphi(x)$ para $a \leqslant x < \infty$, entonces de la convergencia de la integral $\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx$ se deduce la convergencia de la integral $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ y de la divergencia de la integral $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$, la divergencia de la integral $\int_{a}^{\infty} \varphi(x)\,dx$.

En particular, haciendo $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$ y teniendo en cuenta que $\int_{a}^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ es convergente para $\alpha > 1$ $\left[\text{e igual a } \dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}\right]$ y es divergente para $\alpha \leqslant 1$, se puede reducir el criterio indicado al siguiente:

CRITERIO 3. Si $f(x)$ es una función positiva para $a \leqslant x < \infty$ y existe un número $\alpha > 1$ tal, que para los $x$ suficientemente grandes

$$f(x) \cdot x^{\alpha} < \infty,$$

entonces la integral (1) es convergente; si $f(x)$ es positiva y existe un número $\alpha \leqslant 1$, tal, que

$$f(x) \cdot x^{\alpha} > c > 0,$$

entonces la integral (1) es divergente.

*Ejemplo:* $\int\limits_0^\infty \frac{x^{3/2}\,dx}{1+x^2}$. Haciendo $\alpha = \frac{1}{2}$, se tiene que $\frac{x^{3/2}}{1+x^2}\cdot x^{1/2} =$ $= \frac{x^2}{1+x^2} \to 1$; la integral dada es divergente.

*Relación entre las integrales impropias y las series infinitas.* Si $x_1$, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$ es una sucesión arbitraria que crece indefinidamente, es decir,

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = \infty \tag{A}$$

y la función $f(x)$ es positiva para $a \leqslant x < \infty$; entonces el problema de la convergencia de la integral (1) se puede reducir al problema de la convergencia de la serie

$$\int\limits_a^{x_1} f(x)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx + \ldots \tag{B}$$

Si la serie (B) es convergente, la integral (1) es convergente e igual a la suma de esta serie; si la serie (B) es divergente, la integral (1) también es divergente. Esto da la posibilidad de aplicar los criterios de convergencia de las series a la convergencia de las integrales. El criterio integral de convergencia de las series (pág. 344) reducía el problema de la convergencia de una serie a la convergencia de una integral impropia.

INTEGRALES DE LAS FUNCIONES DISCONTINUAS

DEFINICIÓN. Sea el campo de definición de la función un intervalo semiabierto $[a, b)$ o todo el intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que el límite en el punto $b$ es: $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$. En uno y otro caso, por definición tenemos:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon - 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Si este límite existe, la integral (1) *existe* o es *convergente* y se llama ***integral impropia***. Si el límite no existe, la integral (1) ***no existe*** o es *divergente*.

$$\text{Si} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \infty, \quad \text{se escribe} \quad \int\limits_a^b f(x)\,dx = \infty;$$

esta integral es divergente.

La integral (1) siempre existe si la función $f(x)$ es continua a trozos y acotada en la región $[a, b)$. En lo sucesivo supondremos que la función $f(x)$ no está acotada, es decir, que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$.

Análogamente se define la integral impropia para una función dada en un intervalo abierto a la izquierda: $(a, b]$, o en el intervalo $[a, b]$, pero siendo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Finalmente, si la función está dada en todo el intervalo $[a, b]$ a excepción de un punto interior $c (a < c < b)$, es decir, en los dos intervalos semiabiertos $[a, c)$ y $(c, b]$, o está definida en el punto $c$, pero $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, entonces la integral impropia se define así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx^*. \tag{3}$$

Los números $\varepsilon$ y $\delta$ tienden a cero independientemente uno del otro. Si el límite (3) no existe, pero existe

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right\}, \tag{4}$$

el límite (4) se llama *valor principal de la integral impropia.*

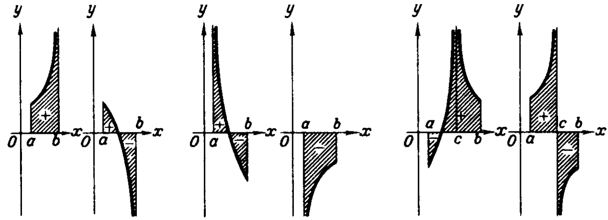
*Interpretación geométrica de las integrales de las funciones discontinuas* (1), (2), y (3): es el área de las figuras infinitamente extendidas, que tienen la forma representada en la fig. 319 (las curvas tienen una ásintota vertical).

*Ejemplos:* 1) $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$; el caso (2), el punto singular es $x = 0$;

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} (2\sqrt{b} - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{b} \text{ (es convergente).}$$

---

* Análogamente al caso (1), en los casos de integrales (2) y (3) se supone que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, respectivamente.



a) Caso (1) б) Caso (2) c) Caso (3)

Fig. 319

2) $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx$; el caso (1), el punto singular es $x = \frac{\pi}{2}$;

$$\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int\limits_0^{\pi/2-\varepsilon} \operatorname{tg} x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\ln \cos 0 - \ln \cos \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right] = \infty$$

(es divergente).

3) $\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; el caso (3), el punto singular es $x = 0$;

$$\int\limits_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\delta}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{2} (\varepsilon^{2/3} - 1) +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0} \frac{3}{2} (4 - \delta^{2/3}) = \frac{9}{2} \quad \text{(es convergente).}$$

4) $\int\limits_{-2}^{+2} \frac{2x\, dx}{x^2-1}$ es caso (3); los puntos singulares son $x = -1$ y $x = +1$;

$$\int\limits_{-2}^{+2} \frac{2x\, dx}{x^2-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-2}^{-1-\varepsilon} + \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \nu\to 0}} \int\limits_{-1+\delta}^{1-\nu} + \lim_{\gamma\to 0} \int\limits_{1+\gamma}^{+2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln (x^2-1) \Big|_{-2}^{-1-\varepsilon} +$$

$$+ \ldots = \lim_{\varepsilon\to 0} [\ln (1+2\varepsilon+\varepsilon^2-1) - \ln 3] + \ldots = \infty \quad \text{(es divergente).}$$

*Aplicación del teorema fundamental del cálculo integral.* Al calcular las integrales impropias con puntos singulares del tipo (3) **no se puede** aplicar mecánicamente el teorema fundamental (págs. 441-443)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b, \quad \text{donde} \quad F'(x) = f(x),$$

sin tener en cuenta los puntos singulares que están situados en el interior del intervalo $[a, b]$; **esto puede dar lugar a errores.** Así, aplicando el teorema fundamental al ejemplo (4), obtenemos que:

$$\int_{-2}^{+2} \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \ln(x^2-1)\Big|_{-2}^{+2} = \ln 3 - \ln 3 = 0,$$

mientras que esta integral es divergente.

*Regla general:* el teorema fundamental se puede aplicar al caso (3) solamente si la función primitiva de $f(x)$ es continua en el punto singular.

En el ejemplo 4 esto no se cumple: la función $\ln(x^2-1)$ es discontinua para $x = \pm 1$; en el ejemplo (3), la función $\frac{3}{2}x^{2/3}$ es continua para $x = 0$ y por esto se puede aplicar el teorema fundamental:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{2}\left(8^{2/3} - 1^{2/3}\right) = \frac{9}{2}.$$

*Criterios suficientes de convergencia* de la integral de una función discontinua.

1) Si existe la integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$, entonces también existe la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ la cual se llama en este caso *absolutamente convergente;* la función $f(x)$ se llama *absolutamente integrable* en el intervalo dado.

2) Si $f(x)$ es una función positiva en la región $[a, b)$ y existe un número $\alpha < 1$, tal, que para todos los $x$ suficientemente próximos a $b$,

$$f(x)(b-x)^\alpha < \infty,$$

la integral (1) es convergente; si $f(x)$ es positiva en la región $[a, b)$ y existe un número $\alpha > 1$ tal, que para todos los $x$ suficientemente próximos a $b$,

$$f(x)(b-x)^\alpha > c > 0,$$

la integral (1) es divergente.

## *12. Integrales dependientes de un parámetro*

DEFINICIÓN. La integral definida

$$\int_a^b f(x, y)\, dx = F(y) \tag{1}$$

es función de una variable $y$, llamada en el caso dado *parámetro*.

En muchos casos la función $F(y)$ no es una función elemental. La integral (1) puede ser una integral en el sentido ordinario o ser impropia* [integral con límites infinitos o de una función discontinua $f(x, y)$].

*Ejemplo:*

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty x^{y-1}e^{-x}\, dx \quad \text{(es convergente para } y > 0)$$

es la *función Gamma* o la *integral de Euler de segunda especie.*

DERIVACIÓN BAJO EL SIGNO INTEGRAL. Si la función (1) está definida en el intervalo $c \leqslant y \leqslant e$ y la función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant e$ y tiene en esta región la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}$, entonces para cualquier $y$ del intervalo $[c, e]$ se cumple la fórmula

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx \tag{2}$$

*(derivación bajo el signo integral).*

*Ejemplo:* En cualquier intervalo, para $y > 0$,

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\, dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right) dx = -\int_0^1 \frac{x\, dx}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.$$

$$\text{Comprobación:} \int_0^1 \operatorname{arctg}\frac{x}{y}\, dx = \operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\, y \ln\frac{y^2}{1+y^2};$$

$$\frac{d}{dy}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\, y \ln\frac{y^2}{1+y^2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{y^2}{1+y^2}.$$

---

* La teoría de la convergencia de las integrales impropias dependientes de un parámetro, puede estudiarse en los cursos completos de análisis matemático.

Para $y = 0$, la condición de continuidad de la función no se cumple; no existe derivada.

*Generalización de la fórmula* (2) *al caso en que los límites de la integral dependen de parámetro.* Si en las mismas condiciones, las funciones $\alpha(y)$ y $\beta(y)$ están definidas en el intervalo $[c, e]$, y tienen derivadas continuas $\alpha'(y), \beta'(y)$ y las curvas $x = \alpha(y), x = \beta(y)$ están contenidas en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant e$, entonces la fórmula (2) admite la generalización

$$\frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\, dx + \beta'(y)\cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y)\cdot f(\alpha(y), y). \qquad (2')$$

Integración bajo el signo integral. Si la función (1) está definida en el intervalo $[c, e]$ y la función $f(x, y)$ es continua en el rectángulo $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant e$, entonces se cumple la fórmula

$$\int_c^e \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^e f(x, y)\, dy\right] dx \qquad (3)$$

*(integración bajo el signo integral).*

*Ejemplos:* 1) $f(x, y) = x^y$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ a \leqslant y \leqslant b;\ a > 0)$. Para $a > 0$ se cumple la condición de continuidad: la función $x^y$ es discontinua para $x = 0, y = 0$. Por lo tanto,

$$\int_a^b \left[\int_0^1 x^y\, dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_a^b x^y\, dy\right] dx.$$

El primer miembro da $\int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}$; el segundo miembro nos da $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx$; la integral indefinida no se expresa mediante funciones elementales, pero ya se ha hallado la integral definida

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\, dx = \ln \frac{1+b}{1+a} \qquad (0 < a < b).$$

2) $f(x, y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1)$. En el punto (0, 0) a función es discontinua; la fórmula (3) no es aplicable. Comprobación :

$$\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{1+y^2};$$

$$\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy = -\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{y=1} = -\frac{1}{x^2+1};$$

$$-\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = -\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{4}.$$

## *13. Tabla de algunas integrales definidas**

INTEGRALES DE FUNCIONES EXPONENCIALES

(en combinación con algebraicas, trigonométricas y logarítmicas)

1) $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)^{**}}{a^{n+1}}$ para $a > 0,\quad n > -1$.

En particular, para $n > 0$ y entero esta integral $\frac{n!}{a^{n+1}}$.

2) $\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{**}}{2a^{(n+1)/2}}$ para $a > 0,\quad n > -1$.

En particular, para $n$ entero y par ($n = 2k$) esta integral es igual a $\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}a^{k+1/2}}$ y para $n$ entero e impar ($n = 2k+1$), es igual a $\frac{k!}{2a^{k+1}}$.

3) $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ para $a > 0$.

4) $\int_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3}$ para $a > 0$.

* Detalladamente, véase en E. Goursat: Cours d'analyse mathématique, Vol. II, 7ª ed. 1949, Gouthier-Villars, París.

** Véase en la pág. 185 la función Γ (Gamma), véase en la pág. 81 la tabla de $\Gamma(x)$.

5) $\int_0^\infty e^{-a^2x^2} \cos bx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \cdot e^{-b^2/4a^2}$ para $a > 0$.

6) $\int_0^\infty \frac{x\, dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$.

7) $\int_0^\infty \frac{x\, dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}$.

8) $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} \operatorname{sen} x}{x}\, dx = \operatorname{arcctg} a = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$ para $a > 0$.

9) $\int_0^\infty e^{-x} \ln x\, dx = -C \approx -0{,}5772$*.

INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

(en combinación con algebraicas)

10) $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2\alpha+1} x \cos^{2\beta+1} x\, dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+\beta+2)} =$

$= \frac{1}{2} B(\alpha+1, \beta+1)$** $= \frac{\alpha!\, \beta!}{2(\alpha+\beta+1)!}$ (para $\alpha$ y $\beta$ enteros y positivos).

Esta fórmula es válida para cualesquiera $\alpha$ y $\beta$; puede aplicarse para hallar

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}\, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}, \text{ etc.}$$

11) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\, dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para } a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{para } a < 0. \end{cases}$

12) $\int_0^\alpha \frac{\cos ax\, dx}{x} = \infty$ ($\alpha$ es un número arbitrario).

---

* $C$ es la constante de Euler (véase pág. 324).

** $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ es la función Beta o la integral de Euler de primera especie, $\Gamma(y)$ es la función Gamma o la integral de Euler de segunda especie (véase pág. 185).

13) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} ax\,dx}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para} \quad a > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{para} \quad a < 0. \end{cases}$$

14) $$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = \ln \frac{b}{a}.$$

15) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x \cos ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{para} \quad |a| < 1, \\ \frac{\pi}{4} & \text{para} \quad |a| = 1, \\ 0 & \text{para} \quad |a| > 1. \end{cases}$$

16) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

17) $$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} bx}{a^2+x^2}\,dx = \pm \frac{\pi}{2} e^{-|ab|}$$ (el signo coincide con el signo del número $b$).

18) $$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.$$

19) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}|a|.$$

20) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

21) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{2k} \ln \frac{1+k}{1-k} \quad \text{para} \quad |k| < 1.$$

22) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{k} \operatorname{arcsen} k \quad \text{para} \quad |k| < 1.$$

23) $$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{k^2}(\mathrm{K}-\mathrm{E})^* \quad \text{para} \quad |k| < 1.$$

---

* E y K son integrales elípticas completas: $E = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$, $K = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$ (véase la pág. 400 y la tabla de la pág. 86).

24) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\,dx}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2 x}} = \frac{1}{k^2}\,[\mathrm{E}-(1-k^2)\,\mathrm{K}]^*$ para $|k| < 1$.

25) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos ax\,dx}{1-2b\cos x+b^2} = \frac{\pi b^a}{1-b^2}$ para $a$ entero $\geqslant 0$, $|b| < 1$.

INTEGRALES DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

(en combinación con algebraicas y trigonométricas)

26) $\displaystyle\int_0^1 \ln\ln x\,dx = -C \approx -0{,}5772^{**}$ (se reduce al Nº 9).

27) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,dx = \frac{\pi^2}{6}$ (se reduce al Nº 6).

28) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$ (se reduce al Nº 7).

29) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}$.

30) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

31) $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right)^a dx = \Gamma(a+1)^{***}$ $(-1 < a < \infty)$.

32) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\operatorname{sen} x\,dx = \int_0^{\pi/2} \ln\cos x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

33) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\ln\operatorname{sen} x\,dx = -\frac{\pi^2\ln 2}{2}$.

34) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x\ln\operatorname{sen} x\,dx = \ln 2-1$.

---

* Véase la llamada de la página anterior.

** $C$ es la constante de Euler (véase la pág. 324).

*** $\Gamma(x)$ es la función Gamma (véase la pág. 185 y la tabla de la pág. 81).

35) $\int_0^{\pi} \ln(a \pm b\cos x)\,dx = \pi \ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ para $a \geqslant b$.

36) $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi \ln a & (a \geqslant b > 0), \\ 2\pi \ln b & (b \geqslant a > 0). \end{cases}$

37) $\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{tg} x\,dx = 0.$

38) $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{\pi}{8} \ln 2.$

### INTEGRALES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

39) $\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,dx = 2\int_0^1 x^{2\alpha+1}(1-x^2)^{\beta}\,dx =$

$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)^{*}$ (se reduce al N° 10).

40) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^a} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}$ para $a < 1$.

41) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1-x)x^a} = -\pi \operatorname{ctg} a\pi$ para $a < 1$.

42) $\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\,dx = \frac{\pi}{b \operatorname{sen} \frac{a\pi}{b}}$ para $0 < a < b$.

43) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^a}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)^{**}}{a\Gamma\left(\frac{2+a}{2a}\right)}.$

---

* $\mathrm{B}(x, y)\ \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ es la función Beta o la integral de Euler de primera especie, $\Gamma(x)$ es la función Gamma o la integral de Euler de segunda especie (véase la pág. 185).

** $\Gamma(x)$ es la función Gamma (véase pág. 185 y la tabla de la pág. 81).

44) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{2\,\mathrm{sen}\, a} \qquad \left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right).$

45) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos a+x^2} = \frac{a}{\mathrm{sen}\, a} \qquad \left(0 < a < \frac{\pi}{2}\right).$

## C. INTEGRALES CURVILÍNEAS, MÚLTIPLES Y DE SUPERFICIES

El concepto de integral definida (véanse las págs. 439-440) puede generalizarse en diferentes direcciones. La región de integración de la integral definida simple era un segmento (un intervalo) $[a, b]$ del eje numérico. Si se toma por región de integración un segmento de una **curva** (plana o alabeada), resulta una **integral curvilínea;** si se toma una **superficie plana,** resulta una **integral doble;** si se toma una parte de una superficie, resulta una **integral de superficie;** si se toma una parte del **espacio** (un **volumen),** resulta una **integral triple.**

### *14. Integrales curvilíneas de primer tipo*

(INTEGRALES RESPECTO DEL ARCO)

DEFINICION. Se llama *integral curvilínea de primer tipo*

$$\int_{(K)} f(x, y)\, ds$$

*de la función de dos variables* $u = f(x, y)$ (dada en una región conexa*), *tomada sobre un segmento* $K \equiv \overset{\frown}{AB}$ *de una curva plana,* dada por su ecuación (este segmento está situado en la misma región y se llama *camino de integración),* al número que se obtiene de la siguiente manera (fig. 320):

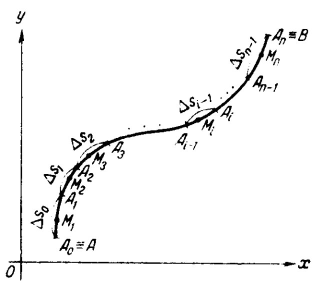


Fig. 320

1) el segmento $AB$ se divide en $n$ «segmentos elementales» mediante unos puntos arbitrarios $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ que van del origen del segmento $A \equiv A_0$ hasta su extremo $B \equiv A_n$;

2) en el interior (o en la frontera) de cada segmento elemental $A_{i-1}A_i$ se elige un punto arbitrario $M_i$ con las coordenadas $\xi_i, \eta_i$;

* La región conexa de dos variables, véase en la pág. 334.

3) los valores de la función $f(\xi_i, \eta_i)$ en estos puntos elegidos se multiplican por las longitudes de los segmentos $A_{i-1}A_i = \Delta s_{i-1}$ (estas longitudes se consideran **positivas**);

4) todos los $n$ productos $f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_{i-1}$ obtenidos se suman;

5) se calcula el límite de la suma obtenida

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_{i-1},$$

cuando la longitud de cada segmento elemental $\Delta s_{i-1}$ tiende a cero (y, por tanto, $n \to \infty$).

SI TAL LÍMITE EXISTE Y NO DEPENDE DE LA ELECCIÓN DE LOS PUNTOS $A_i$ Y $M_i$, ENTONCES ÉSTE SE LLAMA INTEGRAL CURVILÍNEA DE PRIMER TIPO:

$$\int_{(K)} f(x, y)\,ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta s_{i-1}. \tag{A}$$

De un modo análogo se define la *integral curvilínea de primer tipo de una función de tres variables $u = f(x, y, z)$ tomada sobre el segmento $K$ de una curva del espacio:*

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\,ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\Delta s_{i-1}. \tag{B}$$

TEOREMA DE EXISTENCIA. Si una función $f(x, y)$ o $f(x, y, z)$ es continua, y el segmento $K$ de la curva es continuo y tiene tangente que gira continuamente, entonces la integral curvilínea de primer tipo (A) o (B) existe (es decir, los límites indicados existen y no dependen de la elección de los puntos $A_i$ y $M_i$).

EL CÁLCULO DE LA INTEGRAL CURVILÍNEA DE PRIMER TIPO se reduce al cálculo de una integral definida. Si las ecuaciones del camino de integración vienen dadas en forma paramétrica (véanse las págs. 270 y 290) $x = x(t), y = y(t)$ y (para la curva en el espacio) $z = z(t)$, entonces

$$\int_{(K)} f(x, y)\,ds = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt \quad \text{(en el caso A)}$$

y

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\,ds = \int_{t_0}^{T} f(x(t), y(t), z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,dt$$

(en el caso B);

aquí $t_0$ es el valor del parámetro $t$ para el punto $A$ y $T$ para el punto $B$; los puntos $A$ y $B$ se eligen de tal modo que sea $t_0 < T$.

Si las ecuaciones del camino de integración vienen dadas en forma explícita: $y = \varphi(x)$ para la curva plana o $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ para la curva del espacio, y $a$ y $b$ son las abscisas de los puntos $A$ y $B$ $(a < b)$, respectivamente*, entonces

$$\int\limits_{(K)} f(x, y)\, ds = \int\limits_a^b f[x, \varphi(x)] \sqrt{1+[\varphi'(x)]^2}\, dx \quad \text{(en el caso A)}$$

y

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\, ds = \int\limits_a^b f[x, \varphi(x), \psi(x)] \sqrt{1+[\varphi'(x)]^2+[\psi'(x)]^2}\, dx$$

(en el caso B).

Aplicaciones de la integral curvilínea del primer tipo:

1) La *longitud* de un segmento curvilíneo $K$ es:

$$L_{(K)} = \int\limits_{(K)} ds.$$

2) La *masa* de un segmento curvilíneo no homogéneo $K$, si $\delta$ es la densidad lineal variable [$\delta = f(x, y)$ para la curva plana y $\delta = f(x, y, z)$ para la curva del espacio], es:

$$M_{(K)} = \int\limits_{(K)} \delta\, ds.$$

## *15. Integrales curvilíneas de segundo tipo*

(Integrales respecto de las proyecciones e integrales de tipo general)

Definiciones. *Se llama integral curvilínea de segundo tipo*

$$\int\limits_{(K)} f(x, y)\, dx \qquad (A_x)$$

ó

$$\int\limits_{(K)} f(x, y, z)\, dx \qquad (B_x)$$

* En este caso se supone que el segmento de curva $K$ tiene una forma tal que a cada punto de su proyección sobre el eje $Ox$ corresponde un solo punto del segmento $K$ (el punto de la curva se determina unívocamente por su abscisa). Si esto no es así, el segmento $K$ se divide en varias partes de modo que cada una de ellas tenga esta propiedad; la integral curvilínea tomada sobre todo el segmento $K$ se considera como la suma de las integrales tomadas sobre sus partes.

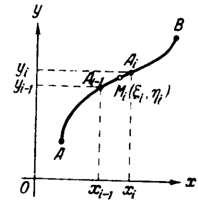


Fig. 321

***de una función de dos variables*** $f(x, y)$ ***o, respectivamente, de tres variables*** $f(x, y, z)$ (dada en una región conexa), *respecto de la proyección del segmento* $K \equiv \overparen{AB}$ de una curva plana [o *del espacio*] (el camino de integración está situado en esta misma región), *sobre el eje Ox*, al número que se obtiene igual que en el caso de la integral curvilínea de primer tipo (véanse las págs. 470—471), pero con la diferencia de que en la etapa 3), los valores de la función $f(\xi_i, \eta_i)$ [respectivamente, los de $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ no se multiplican por las longitudes de los segmentos $A_{i-1}A_i$, sino por sus **proyecciones** sobre el eje $Ox$ (véase fig. 321)]:

$$\mathrm{Pr}_x \overparen{A_{i-1}A_i} = x_i - x_{i-1} = \Delta x_{i-1}.$$

$$\int_{(K)} f(x, y)\, dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta x_{i-1}, \qquad (\mathrm{A}_x)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dx = \lim_{\substack{\Delta x_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta x_{i-1}. \qquad (\mathrm{B}_x)$$

De forma análoga se definen las integrales curvilíneas de segundo tipo respecto de la proyección del segmento $K$ de la curva sobre el eje $Oy$ [y para el caso (B) también sobre el eje $Oz$]:

$$\int_{(K)} f(x, y)\, dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, \Delta y_{i-1}, \qquad (\mathrm{A}_y)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dy = \lim_{\substack{\Delta y_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta y_{i-1}, \qquad (\mathrm{B}_y)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dz = \lim_{\substack{\Delta z_{i-1} \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta z_{i-1} \qquad (\mathrm{B}_z)$$

TEOREMA DE EXISTENCIA. Si la función $f(x, y)$ o $f(x, y, z)$ es continua, y el segmento K de la curva es continuo y tiene tangente que gira continuamente, entonces las integrales curvilíneas de segundo tipo $(\mathrm{A}_x)$, $(\mathrm{A}_y)$, $(\mathrm{B}_x)$, $(\mathrm{B}_y)$, $(\mathrm{B}_z)$ existen.

EL CÁLCULO DE LAS INTEGRALES CURVILÍNEAS DE SEGUNDO TIPO SE REDUCE AL CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS. Si las ecuaciones del camino de integración vienen dadas en forma paramétrica (véanse las págs. 270 y 290):

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{y} \quad z = z(t) \quad \text{(para una curva del espacio),}$$

entonces las integrales ($A_x$), ($A_y$), ($B_x$), ($B_y$), ($B_z$) se calculan por las fórmulas siguientes:

$$\int_{(K)} f(x, y)\, dx = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)]\, x'(t)\, dt, \qquad (A_x)$$

$$\int_{(K)} f(x, y)\, dy = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)]\, y'(t)\, dt, \qquad (A_y)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dx = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\, x'(t)\, dt, \qquad (B_x)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dy = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t), z(t)]\, y'(t)\, dt, \qquad (B_y)$$

$$\int_{(K)} f(x, y, z)\, dz = \int_{t_0}^{T} f[x(t), y(t)\, z(t)]\, z'(t)\, dt. \qquad (B_z)$$

Aquí $t_0$, $T$ son los valores respectivos del parámetro $t$ para el origen $A$ y el extremo $B$ del segmento. Aquí, a diferencia de la integral curvilínea de primer tipo, no es necesario que sea $t_0 < T$; al permutar los puntos $A$ y $B$ (cambio de la dirección del camino de integración), las integrales cambian de signo.

Si las ecuaciones del camino de integración vienen dadas explícitamente: $y = \varphi(x)$ para la curva plana e $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ para la curva del espacio y $a$ y $b$ son las abscisas respectivas de los puntos $A$ y $B$*, entonces en las fórmulas ($A_x$) – ($B_z$) la abscisa $x$ sirve de parámetro $t$.

INTEGRAL CURVILÍNEA DE TIPO GENERAL.** Si en una región conexa vienen dadas dos funciones de dos variables $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ [o tres funciones de tres variables $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ y $R(x, y, z)$] y el segmento $K$ de la curva plana [o del espacio, respectivamente], entonces se llama a *integral curvilínea de tipo general* a la suma de las integrales

---

* Aquí no es necesario que sea $a < b$.

** Una exposición vectorial de la teoría de la integral curvilínea de tipo general y de su interpretación mecánica puede verse en el capítulo "Teoría de campo" (pág. 618).

de segundo tipo con respecto a todas las proyecciones:

$$\int\limits_{(K)} P\,dx+Q\,dy = \int\limits_{(K)} P\,dx+\int\limits_{(K)} Q\,dy \quad \text{para la curva plana,}$$

$$\int\limits_{(K)} P\,dx+Q\,dy+P\,dz = \int\limits_{(K)} P\,dx+\int\limits_{(K)} Q\,dy+\int\limits_{(K)} R\,dz$$

para la curva del espacio.

*Propiedades de la integral curvilínea:*

1) La integral puede dividirse por un punto intermedio $C$ (o por un punto $C$ que esté situado en la curva fuera del segmento $\overparen{AB}$) en dos integrales:

$$\int\limits_{\underbrace{}_{AB}} P\,dx+Q\,dy = \int\limits_{\underbrace{}_{AC}} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{\underbrace{}_{CB}} P\,dx = Q\,dy^{*} \quad (\text{fig. } 322, a, b).$$

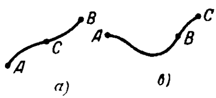



Fig. 322

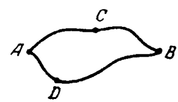



Fig. 323

2) Al integrar sobre un mismo camino, pero en sentido contrario, la integral cambia de signo:

$$\int\limits_{\underbrace{}_{AB}} P\,dx+Q\,dy = -\int\limits_{\underbrace{}_{BA}} P\,dx+Q\,dy^{*}$$

3) EN GENERAL, la integral curvilínea depende tanto del punto inicial $A$ y del final $B$ como del camino de integración que los une

$$\int\limits_{\underbrace{}_{ACB}} P\,dx+Q\,dy \neq \int\limits_{\underbrace{}_{ADB}} P\,dx+Q\,dy^{*} \quad (\text{fig. } 323).$$

*Ejemplos de cálculo de integrales curvilíneas:*

1) $I = \int\limits_{(K)} xy\,dx+yz\,dy+zx\,dz$, donde $(K)$ es una espira de la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$ (veáse la pág. 295) desde $t_0 = 0$

* Las fórmulas análogas son válidas también para el caso de tres variables.

hasta $T = 2\pi$:

$$I = \int_0^{2\pi} (-a^3 \operatorname{sen}^2 t \cos t + a^2 bt \operatorname{sen} t \cos t + ab^2 t \cos t)\, dt = -\frac{\pi a^2 b}{2}$$

2) $I = \int\limits_{(K)} y^2\, dx + (xy - x^2)\, dy$, donde $(K)$ es un arco de la parábola $y^2 = 9x$ desde el punto $A$ (0, 0) hasta $B$ (1,3):

$$I = \int_0^3 \left| \frac{2}{9} y^3 + \left(\frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{81}\right) \right| dy = 6\,\frac{3}{20}.$$

Se llama *circulación* a la integral curvilínea a lo largo de un contorno cerrado $\Bigg($se designa $\oint\limits_{(C)} P\, dx + Q\, dy$ ó $\oint\limits_{(C)} P\, dx + Q\, dy + R\, dz$, donde $C$ es el camino cerrado de integración, cuyo origen $A$ coincide con el extremo $B\Bigg)$. En general, la circulación no es igual a cero.

El *área de una figura plana* puede calcularse como la circulación

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_{(C)} (x\, dy - y\, dx),$$

donde $C$ es el contorno que limita a la figura plana (el camino de integración se recorre en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj).

Condición de independencia de la integral curvilínea del camino de integración *(integrabilidad de una diferencial total).*

*Caso bidimensional.* Para que la integral curvilínea

$$\int P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy,$$

donde $P$ y $Q$ son funciones continuas en una región simplemente conexa, dependa sólo del punto inicial $A$ y del final $B$ y no dependa del camino que los una, situado en esta región, es decir, que para cualesquiera $A$ y $B$ y para caminos arbitrarios $ACB$ y $ADB$ (fig. 323), se cumpla la igualdad $\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\, dx + Q\, dy = \int\limits_{\overset{\frown}{ADB}} P\, dx + Q\, dy$, es necesario y suficiente que exista una función de dos variables $U(x, y)$ tal, que su diferencial total sea la expresión integrando:

$$P\, dx + Q\, dy = dU, \tag{1}$$

es decir,

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{2}$$

Tal función $U(x, y)$ se llama primitiva* de la diferencial total (1).

El criterio necesario y suficiente de existencia de la función primitiva *(condición de integrabilidad de la expresión $P\,dx+Q\,dy$)* es:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3}$$

suponiendo que estas derivadas parciales son continuas.

*Caso tridimensional.* La condición de independencia de la integral curvilínea

$$\int P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz$$

del camino de integración es análoga: debe existir una función *primitiva* $U(x, y, z)$ tal, que

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz = dU, \tag{1'}$$

es decir,

$$P = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2'}$$

En este caso, la condición de integrabilidad consta de tres igualdades que deben cumplirse simultáneamente:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3'}$$

suponiendo que estas derivadas parciales son continuas.

CÁLCULO DE LA FUNCIÓN PRIMITIVA. Cuando se cumple la condición (3), la función primitiva $U(x, y)$ es igual a la integral curvilínea

$$U = \int\limits_{\widetilde{AM}} P\,dx = Q\,dy$$

a lo largo de **cualquier** camino [perteneciente a la región en que se cumple la condición (3)] que una un punto arbitrario fijo $A$ de coordenadas $(x_0, y_0)$ con el punto variable $M$ de coordenadas $(x, y)$. Prácticamente, lo más conveniente es tomar por este camino [si éste no sale fuera de la región en que se cumple la condición (3)] una de las dos poligonales $AKM$ o $ALM$ con los lados paralelos a los ejes de coorde-

* La función primitiva $U(x, y)$ es el *potencial* del campo vectorial $P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}$ (en otros términos, es el potencial con signo contrario), véase la pág. 619.

nadas (fig. 324). Esto nos da dos fórmulas para calcular la función primitiva $U(x, y)$ de la diferencial total $P\,dx+Q\,dy$:

$$U=\int_{\overline{AK}}+\int_{\overline{KM}}+U(x_0, y_0)=\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\,d\xi+\int_{y_0}^{y} Q(x, \eta)\,d\eta+C, \qquad (4_1)$$

$$U=\int_{\overline{AL}}+\int_{\overline{LM}}+U(x_0, y_0)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0, \eta)\,d\eta+\int_{x_0}^{x} P(\xi, y)\,d\xi+C'. \qquad (4_2)$$

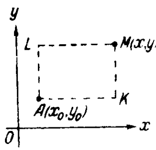


Fig. 324

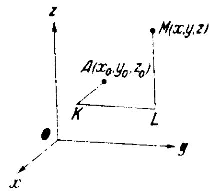


Fig. 325

Análogamente, en el caso tridimensional, cuando se cumplen las condiciones (3′), la primitiva $U(x, y, z)$ se calcula por las siguientes fórmulas (fig. 325):

$$U=\int_{\overline{AK}}+\int_{\overline{KL}}+\int_{\overline{LM}}+U(x_0, y_0, z_0)=$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0, z_0)\,d\xi+\int_{y_0}^{y} Q(x, \eta, z_0)\,d\eta+$$

$$+\int_{z_0}^{z} R(x, y, \zeta)\,d\zeta+C \qquad (4')$$

o por las cinco fórmulas análogas que corresponden a las otras poligonales posibles con los lados paralelos a los ejes de coordenadas.

*Ejemplos:*

1) $P\,dx+Q\,dy=-\dfrac{y\,dx}{x^2+y^2}+\dfrac{x\,dy}{x^2+y^2}$; se verifica la condición (3): $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. Aplicamos la fórmula $(4_2)$ haciendo $x_0=0$, $y_0=1$ (no se puede tomar $x_0=0$, $y_0=0$, pues las funciones $P$ y $Q$

¡no son continuas en el punto (0, 0)!):

$$U = \int_1^y \frac{0\cdot d\eta}{0^2+\eta^2} + \int_0^x \frac{-y\,d\xi}{\xi^2+y^2} + U(0,1) = -\operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_1 .$$

$$2)\ P\,dx + Q\,dy + R\,dz = z\left(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\right)dx + \frac{z}{xy^2}\,dy + \left(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\right)dz.$$

Se verifican las condiciones (3′). Aplicamos la fórmula (4′), haciendo $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$.

$$U = \int_1^x 0\cdot d\xi + \int_1^y 0\cdot d\eta + \int_0^z \left(\frac{x}{x^2+\zeta^2} - \frac{1}{xy}\right)d\zeta + C = \operatorname{arctg}\frac{z}{x} - \frac{z}{xy} + C.$$

*La circulación a lo largo de un circuito plano* (la integral curvilínea de $P\,dx + Q\,dy$ a lo largo de una curva cerrada plana), *cuando se cumple la condición* (3), *es igual a cero*, si este circuito no contiene en su **interior** puntos en los cuales una de las funciones $P$, $Q$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ ó $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sea discontinua o no esté definida.

## *16. Integrales dobles y triples*

INTEGRAL DOBLE. Se llama integral doble de una función de dos variables $u = f(x, y)$*, extendida a una región $S$

$$\left[\text{se designa} \quad \int_S f(x,y)\,dS, \qquad \text{a veces} \quad \iint_S f(x,y)\,dS\right],$$

al número obtenido de la siguiente manera:

1) la región $S$ (fig. 326) se divide arbitrariamente en $n$ «regiones elementales»;

2) en el interior (o en la frontera) de cada región elemental se elige arbitrariamente un punto $M_i(x_i, y_i)$;

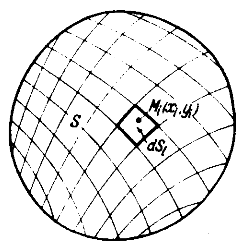



Fig. 326

* Aquí $u$ se considera como función de un punto (véase la pág. 333) que puede ser dada no sólo en un sistema de coordenadas cartesianas.

3) el valor de la función $u$ en este punto $f(x_i, y_i)$ se multiplica por el valor del área $dS_i$ de la región elemental correspondiente;

4) todos los productos $f(x_i, y_i)\,dS_i$ obtenidos de esta manera se suman;

5) se halla el límite de la suma obtenida $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,dS_i$, cuando cada región elemental se contrae hacia un punto* y, por lo tanto, $n \to \infty$.

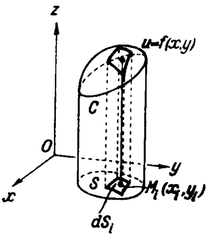



Fig. 327

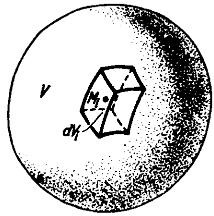



Fig. 328

SI ESTE LÍMITE EXISTE Y NO DEPENDE DEL PROCEDIMIENTO DE DIVISIÓN DE LA REGIÓN $S$ EN REGIONES ELEMENTALES Y DE LA ELECCIÓN DE LOS PUNTOS $M_i(x_i, y_i)$, ENTONCES ÉSTE SE LLAMA INTEGRÁL DOBLE DE LA FUNCIÓN **$u$, extendida a la región $S$** (en este caso $S$ se llama *región*, *recinto*, *dominio* o *campo de integración*).

$$\int_S f(x, y)\,dS = \lim_{\substack{\Delta S_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,dS_i. \qquad (1)$$

*Teorema de existencia.* Si la función $f(x, y)$ es continua en todo el recinto de integración (cerrado, es decir, incluyendo los puntos del contorno), entonces existe la integral (1).

La *interpretación geométrica* de la integral doble es el volumen del cuerpo cilíndrico (cilindroide) (fig. 327) limitado: 1) por la región $S$ en el plano $xOy$, 2) por la superficie cilíndrica, cuyas generatrices son paralelas al eje $Oz$, y cuya directriz es el contorno de la región $S$, y 3) por la superficie $u = f(x, y)$. Cada elemento de la suma $f(x_i, y_i)\,dS_i$ repre-

* No es suficiente exigir que $dS$ tienda a cero. Debe tender a cero el diámetro de la región elemental, es decir, la distancia entre los dos puntos más alejados de la región elemental. Por ejemplo, el área de un rectángulo tiende a cero cuando uno de sus lados tiende a cero mientras que su diagonal permanece finita.

senta el volumen de una columna prismática de base $dS_i$ y altura $f(x_i, y_i)$. El volumen resulta con el signo «+» o «−», según que la parte correspondiente de la superficie $u = f(x, y)$ se encuentre sobre el plano $xOy$ o debajo del mismo (si corta a este plano, entonces el volumen se divide en una suma algebraica de los sumandos separados).

LA INTEGRAL TRIPLE de una función de tres variables $u = f(x, y, z)$ extendida a un cuerpo $V$

$$\left[\text{se designa } \int_V f(x, y, z)\, dV \text{ y a veces } \iiint_V f(x, y, z)\, dV\right],$$

se define similarmente a la integral doble: el cuerpo $V$ (fig. 328) se divide en «cuerpos elementales» y se consideran los productos de la forma $f(x_i, y_i, z_i)\, dV_i$, donde $M_i(x_i, y_i, z_i)$ es un punto interior (o de la frontera) del cuerpo elemental y $dV_i$ es su volumen. Se llama integral triple al límite (si éste existe y no depende del procedimiento de división del cuerpo $V$, y de la elección de los puntos $M_i$) de la suma de tales productos para todos los cuerpos elementales en que se ha dividido el cuerpo, si cada uno de estos cuerpos elementales se contrae hacia un punto* y por consiguiente, la cantidad de ellos tiende al infinito:

$$\int_V f(x, y, z)\, dV = \lim_{\substack{dV_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, dV_i \,^{**}.$$

Para la integral triple de una función continua subsiste un teorema de existencia análogo al enunciado anteriormente.

## 17. *Cálculo de integrales múltiples*

El cálculo de las integrales dobles y triples se reduce al cálculo sucesivo de dos (tres) integrales simples. Esto se realiza de diferentes maneras, según qué sistema de coordenadas sea elegido.

INTEGRAL DOBLE.

I) *En coordenadas cartesianas.* La región se divide por las rectas de coordenadas en rectángulos (fig. 329, *a*) se efectúa la sumación de $f(x, y)\, dS$, primero para todos los rectángulos a lo largo de cada franja vertical y, después, para todas las franjas verticales. Analíticamente se

* En el mismo sentido como se entendía para la integral doble: tiene que tender a cero no el valor del volumen, sino el diámetro del cuerpo (la distancia entre los dos puntos más alejados entre sí del cuerpo).

** Análogamente se define la integral n-ple en el espacio numérico n-dimensional.

escribe:

$$\int_S f(x, y)\, dS = \int_a^b \Big[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \Big] dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx^*,$$

donde $y = \varphi_2(x)$ y $y = \varphi_1(x)$ son las ecuaciones de la parte superior $(\overset{\frown}{AmB})$ y de la parte inferior $(\overset{\frown}{AnB})$ de la curva que limita a $S$; $a$ y $b$ son las abscisas de los puntos extremos de la izquierda y de la derecha de la curva; $dx\, dy = dS$ (*«elemento de área en coordenadas cartesianas»*). La primera integración se efectúa suponiedo que $x$ es constante.

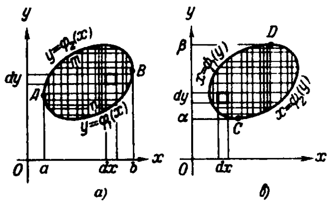



Fig. 329

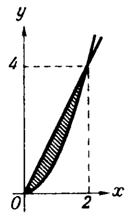



Fig. 330

El cálculo en coordenadas cartesianas se puede efectuar también en orden inverso (véase fig. 329, *b*),

$$\int_S f(x, y)\, dS = \int_\alpha^\beta \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

*Ejemplo:* $A = \int_S xy^2\, dS$, donde $S$ es la región comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$ (fig. 330):

$$A = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xy^2\, dy\, dx = \int_0^2 x\, dx \left[\frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x} = \frac{1}{3} \int_0^2 (8x^4 - x^7)\, dx = \frac{32}{5}$$

ó

$$A = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} xy^2\, dx\, dy = \int_0^4 y^2\, dy \left[\frac{x^2}{2}\right]_{y/2}^{\sqrt{y}} = \frac{1}{2} \int_0^4 y^2 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \frac{32}{5}.$$

---

* Está convenido no escribir los corchetes, sino referir la integral "interior" (que ocupa el segundo lugar) a la variable cuya diferencial también es "interior" (es decir, que ocupa el primer lugar).

2) *En coordenadas polares.* La región se divide por las líneas de coordenadas en partes elementales, limitadas por dos arcos de circunferencias concéntricas y por dos rayos que pasan por el polo (fig. 331); la función integrando se expresa en coordenadas polares: $w = f(\rho, \varphi)$ y la sumación se efectúa, primero, a lo largo de cada sector y, después, respecto a todos los sectores. Analíticamente se escribe:

$$\int_S f(\rho, \varphi)\, dS = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho, \varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi \qquad (*)$$

donde $\rho = \rho_1(\varphi)$ y $\rho = \rho_2(\varphi)$ son las ecuaciones de la parte interior $(\overset{\frown}{AmB})$ y de la parte exterior $(\overset{\frown}{AnB})$ de la curva que limita a $S$; $\varphi_1$ y $\varphi_2$

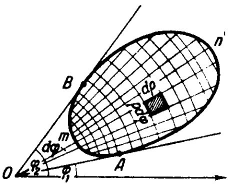



Fig. 331


Fig. 332

son los ángulos polares de los radios vectores extremos que son tangentes a la región, $\rho\, d\rho\, d\varphi = dS$ *(elemento de área en coordenadas polares)*. Raramente se aplica el orden inverso de integración.

*Ejemplo:* $A = \int_S \rho \operatorname{sen}^2 \varphi\, dS$, donde $S$ es la región comprendida dentro del semicírculo $\rho = 3\cos\varphi$ (fig. 332):

$$A = \int_0^{\pi/2} \int_0^{3\cos\varphi} \rho \operatorname{sen}^2 \varphi \cdot \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \varphi\, d\varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{3\cos\varphi} =$$

$$= 9 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^3 \varphi\, d\varphi = 1\frac{1}{5}.$$

3) *En coordenadas curvilíneas arbitrarias $u$ y $v$*, definidas por las fórmulas

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

(véase la pág. 229). La región se divide en partes elementales mediante las líneas de coordenadas $u$ = const, $v$ = const (fig. 333); la función integrando se expresa en las coordenadas $u$ y $v$ y la sumación se efectúa, primero, a lo largo de una franja (por ejemplo, $v$ = const) y, después, con respecto a todas las franjas. Analíticamente se escribe:

$$\int_S f(u,v)\,dS = \int_{u_1}^{u_2}\int_{v_1(u)}^{v_2(u)} f(u,v)\,|D|\,dv\,du, \qquad (\ast\ast)$$

donde $v = v_1(u)$ y $v = v_2(u)$ son las ecuaciones de las partes $\overset{\frown}{AmB}$ y $\overset{\frown}{AnB}$ de la curva que limita a $S$; $u_1$ y $u_2$ son las coordenadas de las líneas extremas que limitan a $S$ $|D|$ es el valor absoluto del jacobiano

$$D = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

$|D|\,dv\,du = dS$ *(elemento de área en coordenadas curvilíneas).*

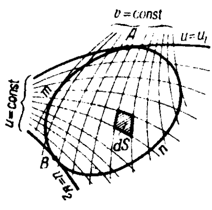



Fig. 333

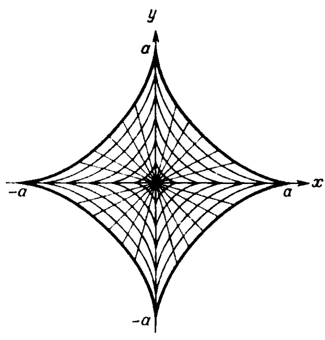



Fig. 334

La fórmula $(\ast)$ es un caso particular de la fórmula $(\ast\ast)$: para las coordenadas polares $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\,\text{sen}\,\varphi$, el jacobiano $D = \rho$.

La elección de las coordenadas curvilíneas se efectúa de tal modo que los límites de la integral $(\ast\ast)$ sean los más simples posibles.

Ejemplo: $A = \int_S f(x,y)\,dS,$

donde $S$ es el área de la astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\text{sen}^3 t$ (fig 334).

Se introducen las coordenadas curvilíneas $x = u\cos^3 v$, $y = u\,\text{sen}^3 v$. Las líneas de coordenadas son: $u = c_1$ es una familia de astroides semejantes $x = c_1\cos^3 t$, $y = c_1\,\text{sen}^3 t$; $v = c_2$ son los rayos $y = kx$, donde $k = \operatorname{tg}^3 c_2$.

$$D = \begin{vmatrix} \cos^3 v & -3u\cos^2 v \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen}^3 v & 3u \operatorname{sen}^2 v \cos v \end{vmatrix} = 3u \operatorname{sen}^2 v \cos^2 v,$$

$$A = \int_0^a \int_0^{2\pi} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot 3u \operatorname{sen}^2 v \cos^2 v \, dv \, du.$$

Integral triple.

1) *En coordenadas cartesianas.* El cuerpo se divide mediante superficies de coordenadas (en el caso dado, planos) en paralelepípedos (fig. 335); y la sumación de $f(x, y, z)\, dV$ se efectúa primeramente con respecto a todos los paralelepípedos a lo largo de cada columna vertical (con respecto a $z$), después, con respecto a las columnas a lo largo de cada «capa» (con respecto a $y$) y, finalmente, con respecto a todas las capas (en la dirección de $x$). Analíticamente se escribe:

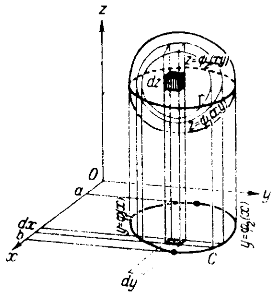



Fig. 335

$$\int_V f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[ \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dy \right\} dx =$$

$$= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx;$$

donde $z = \psi_1(x, y)$ y $z = \psi_2(x, y)$ son las ecuaciones de la parte inferior y de la parte superior de la superficie que limita al cuerpo $V$, es decir, de las partes que se dividen por la curva $\Gamma$, mientras que $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ son las ecuaciones de las partes de la curva $C$ que es la proyección de $\Gamma$ sobre el plano $xOy$, es decir, de las partes que están limitadas por los puntos del plano de abscisas $x = a$, y $x = b$.

Como en el caso de la integral doble, el orden de integración es arbitrario; de este modo, el cálculo de una integral triple se puede efectuar de seis maneras.

*Ejemplo:* Calcular la integral $I = \int_V (y^2 + z^2)\, dV$, donde $V$ es la pirámide limitada por los planos de coordenadas y por el plano $x+y+$

$+z = 1$:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[ \int_0^{1-x-y} (y^2+z^2)\,dz \right] dy \right\} dx = \frac{1}{30}.$$

2) *En coordenadas cilíndricas.* El cuerpo se divide en partes elementales mediante las superficies de coordenadas: $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$. *El elemento de volumen* es: $dV = \rho\,dz\,d\rho\,d\varphi$ (fig. 336). La función se expresa en coordenadas cilíndricas $f(\rho, \varphi, z)$.

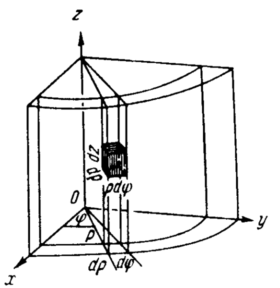



Fig. 336

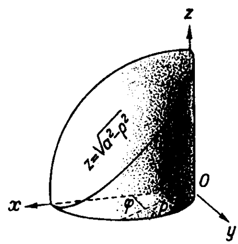



Fig. 337

La fórmula es:

$$\int_V f(\rho, \varphi, z)\,dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \int_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho, \varphi, z)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\varphi. \qquad (*)$$

*Ejemplo* (fig. 337): Calcular la integral $I = \int_V dV$, extendida al cuerpo limitado por los planos $xOy$ y $xOz$, el cilindro $x^2+y^2 = ax$ y la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$*:

---

* Como aquí $f = 1$, la integral es numéricamente igual al volumen del cuerpo dado.

$z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \rho^2}; \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = a \cos \varphi;$
$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}.$

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a\cos\varphi} \int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{a\cos\varphi} \left[ \int_0^{\sqrt{a^2-\rho^2}} dz \right] \rho \, d\rho \right\} d\varphi = \frac{a^3}{18}(3\pi - 4).$$

3) *En coordenadas esféricas*. El cuerpo se divide en partes elementales mediante las superficies de coordenadas: $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$. *El elemento de volumen* es: $dV = r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

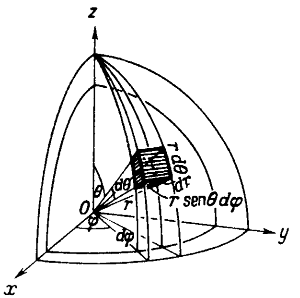


Fig. 338

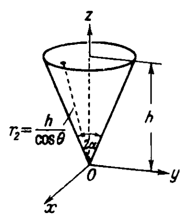


Fig. 339

(fig. 338). La función se expresa en coordenadas esféricas $f(r, \varphi, \theta)$ y se tiene:

$$\int_V f(r, \varphi, \theta) \, dV = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r, \varphi, \theta) \, r^2 \operatorname{sen} \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

$(**)$

*Ejemplo:* Calcular la integral $I = \int_V \frac{\cos \theta}{r^2} dV$ extendida al cono de altura $h$, cuyo ángulo del vértice es igual a $2\alpha$ que está situado con respecto al sistema de coordenadas según la fig. 339.

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{h}{\cos\theta}, \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \alpha, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2\pi.$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{h/\cos\theta} \frac{\cos\theta}{r^2}\, r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\alpha} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \left[ \int_0^{h/\cos\theta} dr \right] d\theta \right\} d\varphi = 2\pi h (1 - \cos\alpha).$$

4) *En coordenadas curvilíneas arbitrarias* $u, v, w$ definidas por las fórmulas

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

(véase la pág. 249). El cuerpo se divide en partes elementales mediante las superficies de coordenadas: $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$. *El elemento de volumen* es:

$$dV = |(D)|\, du\, dv\, dw, \quad \text{donde} \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

La función integrando se expresa en las coordenadas $u, v, w$:

$$\int_V f(u, v, w)\, dV = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \int_{w_1(u,v)}^{w_2(u,v)} f(u, v, w)\, |D|\, dw\, dv\, du. \qquad (***)$$

Las fórmulas $(*)$ y $(**)$ son casos particulares de las fórmulas $(***)$; para las coordenadas cilíndricas $D = \rho$ para las esféricas $D = r^2 \operatorname{sen}\theta$. La elección de las coordenadas curvilíneas se efectúa de modo que los límites de la integral $(***)$ sean los más simples posibles.

# 18. Aplicaciones de las integrales múltiples

## Integrales dobles

| Valor | Fórmula general | En coordenadas cartesianas | En coordenadas polares |
|---|---|---|---|
| Area de una figura plana | $S = \int_S dS$ | $= \iint dy\, dx$ | $= \iint \rho\, d\rho\, d\varphi$ |
| Area de una superficie | $S_{sup} = \int_S \frac{dS^*}{\cos\gamma}$ | $= \iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dy\, dx$ | $= \iint \sqrt{\rho^2+\rho^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\, d\rho\, d\varphi$ |
| Volumen de un cuerpo cilíndrico (véase pág. 480) | $V = \int_S z\, dS$ | $= \iint z\, dy\, dx$ | $= \iint z\rho\, d\rho\, d\varphi$ |
| Momento de inercia de una figura plana con respecto al eje $Ox$ | $I_x = \int_S y^2\, dS$ | $= \iint y^2\, dy\, dx$ | $= \iint \rho^3 \operatorname{sen}^2\varphi\, d\rho\, d\varphi$ |
| Momento de inercia de una figura plana con respecto al polo $O$ | $I_0 = \int_S \rho^2\, dS$ | $= \iint (x^2+y^2)\, dy\, dx$ | $= \iint \rho^3\, d\rho\, d\varphi$ |
| Masa de una figura plana de densidad superficial $\delta$ (en función del punto) | $M = \int_S \delta\, dS$ | $= \iint \delta\, dy\, dx$ | $= \iint \delta\rho\, d\rho\, d\varphi$ |
| Coordenadas del centro de gravedad de una figura plana homogénea | $x_c = \frac{\int_S x\, dS}{S}$ | $= \frac{\iint x\, dy\, dx}{\iint dy\, dx}$ | $= \frac{\iint \rho^2 \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi}{\iint \rho\, d\rho\, d\varphi}$ |
| | $y_c = \frac{\int_S y\, dS}{S}$ | $= \frac{\iint y\, dy\, dx}{\iint dy\, dx}$ | $= \frac{\iint \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi}{\iint \rho\, d\rho\, d\varphi}$ |

* Véase más adelante la integral sobre una superficie. En el caso dado $S$ es la proyección de la superficie sobre el plano $xOy$, $\gamma$ es el ángulo formado por la normal al elemento de superficie y el eje $Oz$.

## Integrales triples

| Valor | Fórmula general | En coordenadas cartesianas | En coordenadas cilíndricas | En coordenadas esféricas |
|---|---|---|---|---|
| Volumen del cuerpo | $V = \int\limits_V dv$ | $= \iiint dz\, dy\, dx$ | $= \iiint \rho\, dz\, d\rho\, d\varphi$ | $= \iiint r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ |
| Momento de inercia del cuerpo con respecto al eje $Oz$ | $I_z = \int\limits_V \rho^2\, dv$ | $= \iiint (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$ | $= \iiint \rho^3\, dz\, d\rho\, d\varphi$ | $= \iiint r^4 \operatorname{sen}^3 \theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ |
| Masa del cuerpo de densidad $\delta$ (en función del punto) | $M = \int\limits_V \delta\, dv$ | $= \iiint \delta\, dz\, dy\, dx$ | $= \iiint \delta\rho\, dz\, d\rho\, d\varphi$ | $= \iiint \delta r^2 \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ |
| Coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo homogéneo | $x_c = \dfrac{\int\limits_V x\, dv}{V}$ | $= \dfrac{\iiint x\, dz\, dy\, dx}{\iiint dz\, dy\, dx}$ | | |
| | $y_c = \dfrac{\int\limits_V y\, dv}{V}$ | $= \dfrac{\iiint y\, dz\, dy\, dx}{\iiint dz\, dy\, dx}$ | | |
| | $z_c = \dfrac{\int\limits_V z\, dv}{V}$ | $= \dfrac{\iiint z\, dz\, dy\, dx}{\iiint dz\, dy\, dx}$ | | |

## *19. Integrales de superficie de primer tipo*

(INTEGRALES CON RESPECTO AL ÁREA DE UNA SUPERFICIE)*

*Definición.* Se llama *integral de superficie de primer tipo*

$$\int_S f(x, y, z)\, dS$$

*de una función de tres variables* $u = f(x, y, z)$ (dada en una región conexa) *sobre una superficie* $S$ (esta superficie está situada en la región dada) al número obtenido de la siguiente manera:

1) La superficie $S$ (fig. 340) se divide arbitrariamente en $n$ «superficies elementales»;

2) en el interior (o en la frontera) de cada superficie elemental se elige arbitrariamente un punto $M_i(x_i, y_i, z_i)$;

3) el valor de la función $f(x_i, y_i, z_i)$ en este punto se multiplica por el valor del área $dS_i$ correspondiente a la superficie elemental;

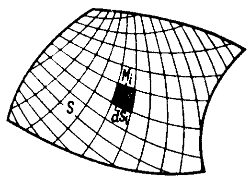


Fig. 340

4) se suman todos los $n$ productos $f(x_i, y_i, z_i)\, dS_i$ obtenidos;

5) se halla el límite de la suma obtenida $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, dS_i$, cuando cada superficie elemental se contrae hacia un punto** y, por lo tanto, la cantidad de ellos $n \to \infty$.

Si este límite existe y no depende de la elección de la división de la superficie $S$ en superficies elementales y de la elección de los puntos $M_i(x_i, y_i, z_i)$, entonces éste se llama integral de superficie de primer tipo

$$\int_S f(x, y, z)\, dS = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i, z_i)\, dS_i\,.$$

TEOREMA DE EXISTENCIA. Si la función $f(x, y, z)$ es continua en la región considerada, y las funciones que expresan la ecuación de la

* Estas integrales generalizan a las integrales dobles (pág. 479), del mismo modo que la integral curvilínea de primer tipo (pág. 470) generaliza a la integral definida simple (pág. 439).

** En el mismo sentido que está indicado en la llamada de la pág. 480.

superficie son continuas y tienen derivadas continuas, entonces la integral de superficie de primer tipo existe.

El cálculo de la integral de superficie de primer tipo se reduce al cálculo de una integral doble sobre una región plana (véanse las págs. 481-485).

Si la ecuación de la superficie $S$ viene dada en *forma explícita*

$$z = \varphi(x, y),$$

entonces

$$\int_S f(x, y, z)\, dS = \iint_{S'} f[x, y, \varphi(x, y)] \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy, \tag{1}$$

donde $S'$ es la proyección de $S$ sobre el plano $xOy$, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ * .

Como la ecuación de la normal a la superficie $z = \varphi(x, y)$ tiene la forma $\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$ (véase la pág. 300), se tiene $\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \cos\gamma$, donde $\gamma$ es el ángulo entre la dirección de la normal y el eje $Oz$** por esto, la ecuación (1) se puede escribir en la forma siguiente:

$$\int_S f(x, y, z,)\, dS = \iint_{S_{xy}} f\left[x, y, \varphi(x, y)\, \frac{dS_{xy}}{\cos\gamma}, \right. \tag{2}$$

donde $S_{xy} = \mathrm{Pr}_{xy} S$.

Si la ecuación de la superficie está dada en forma *paramétrica*

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

(fig. 341), entonces

$$\int_S f(x, y, z)\, dS = \iint_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v) \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv, \tag{3}$$

donde $E$, $F$ y $G$ tienen los valores indicados en la pág. 301, $\sqrt{EG-F^2}\, du\, dv = dS$ *(elemento de superficie)* y $\Delta$ es el campo de variación de los

---

* En este caso se supone que la superficie $S$ es tal, que a cada punto de su proyeccion $S'$ sobre el plano $xOy$ le corresponde un punto único de la superficie $S$ (el punto de la superficie se determina unívocamente por los valores $x$ e $y$). Si esto no es así, la superficie $S$ se divide en varias partes, de modo que, cada una de ellas posea esta propiedad, y la integral sobre toda la superficie $S$ se considera como la suma de las integrales tomadas sobre sus partes.

No hay necesidad de tal restricción si la superficie está dada por ecuaciones en forma paramétrica.

** Este ángulo $\gamma$, en el cálculo de la integral de superficie, de primer tipo, siempre sconsidera agudo; $\cos\gamma > 0$.

argumentos $u$, $v$ que corresponde a la superficie dada $S$. La integral (3) se calcula mediante la integral reiterada según la fórmula:

$$\int_S \Phi(u, v)\,dS = \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \Phi(u, v)\sqrt{EG - F^2}\,dv\,du, \tag{4}$$

donde $u_1$, $u_2$ son las coordenadas de las líneas de coordenadas extremas $u = \text{const}$, entre las que está contenida la superficie $S$ (véase la fig. 341) y $v = v_1(u)$, $v = v_2(u)$ son las ecuaciones del contorno que limita a la superficie $S$ (en la fig. 341 son las líneas $AmB$ y $AnB$). La fórmula (1) es un caso particular de la fórmula (3) para

$$u = x, \quad v = y, \quad E = 1 + p^2,$$
$$F = pq, \quad G = 1 + q^2.$$

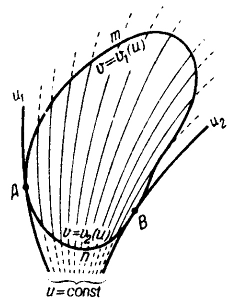


Fig. 341

Aplicaciones de la integral de superficie de primer tipo:

1) El *área* de una superficie alabeada $S$ es:

$$S = \int_S dS.$$

2) La *masa* de una superficie alabeada no homogénea $S$, si $\delta$ es la densidad superficial variable [$\delta = f(x, y, z)$] es:

$$M_S = \int_S \delta\,dS.$$

## 20. *Integrales de superficie de segundo tipo*

### (Integrales respecto de las proyecciones)

**Concepto de superficie orientable.** Generalmente una superficie tiene dos caras, una cualquiera de ellas se puede llamar cara **anterior** y la otra cara **posterior***. Una superficie en la cual se ha tomado una cara como anterior, se llama *orientable*. En una superficie cerrada que no se corta consigo mismo y que contiene en su interior algún volumen (una esfera, un elipsoide, etc.) se toma, generalmente, por cara anterior la cara exterior y por cara posterior, la cara interior.

---

* Existen superficies en las que no se pueden señalar dos caras (por ejemplo, la *banda de Möbius*). En el análisis matemático no se estudian tales superficies.

**Proyección de una superficie orientable sobre un plano coordenado.** Al proyectar un trozo de una superficie orientable $S$ sobre un plano de coordenadas, por ejemplo, sobre el plano $xOy$, se puede asignar a esta proyección $\mathrm{Pr}_{xy}\, S$ el signo «+» o «−» de la manera siguiente (fig. 342). Si al observar el plano $xOy$ desde la parte positiva del tercer eje de coordenadas (en el caso considerado desde el eje $Oz$, es decir, desde arriba) vemos la cara **anterior** de la superficie $S$, la proyección $\mathrm{Pr}_{xy}\, S$ se considera positiva (fig. 342, *a*); si, por el contrario, vemos la cara **posterior**, dicha proyección se considera negativa (fig. 342, *b*). Si

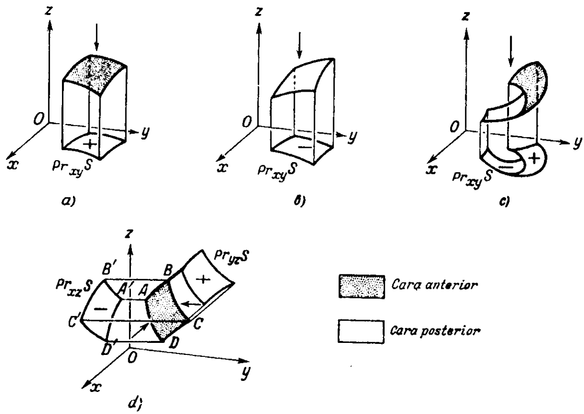



Fig. 342

la superficie está colocada de tal modo que en una parte de la misma se ve la cara anterior y en la otra, la posterior, entonces $\mathrm{Pr}_{xy}\, S$ se obtiene como la suma algebraica de las proyecciones de todas las partes que se ven desde las caras anterior y posterior (fig. 342, *c*). En la fig. 342, *d* están representadas las proyecciones de $S_{xz}$ y $S_{yz}$ de una superficie $S$ (una de ellas es positiva y la otra, negativa).

La proyección de una superficie **cerrada** orientable sobre un plano de coordenadas es igual a cero.

**Definición de integral de superficie de segundo tipo respecto de la proyección sobre un plano de coordenadas.** Se llama integral de superficie de segundo tipo

$$\int_S f(x,\ y,\ z)\, dx\, dy,$$

de una función de tres variables $f(x, y, z)$ dada en una región conexa, respecto de la proyección de una superficie orientable $S$ (perteneciente a la misma región) sobre el plano $xOy$, al número que se obtiene de la misma manera que la integral de superficie de primer tipo (véase la pág. 491), pero con la diferencia de que: en la etapa 3) el valor de la función $f(x_i, y_i, z_i)$ no se multiplica por el área del elemento de superficie $dS_i$, sino por el valor de la **proyección** $\mathrm{Pr}_{xy}\, dS_i$ de este elemento (orientado) sobre el plano $xOy$ (esta proyección se toma con el signo «+» o «−», véase más arriba):

$$\int_S f(x, y, z)\, dx\, dy = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \mathrm{Pr}_{xy}\, dS_i. \qquad (1_{xy})$$

Análogamente se definen las integrales de superficie de segundo tipo, respecto de las proyecciones de la superficie orientable $S$ sobre el plano $yOz$ y sobre el plano $zOx$:

$$\int_S f(x, y, z)\, dy\, dz = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \mathrm{Pr}_{yz}\, dS_i, \qquad (1_{yz})$$

$$\int_S f(x, y, z)\, dz\, dx = \lim_{\substack{dS_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \mathrm{Pr}_{zx}\, dS_i. \qquad (1_{zx})$$

Teorema de existencia. Las integrales de superficie de segundo tipo $(1_{xy})$, $(1_{yz})$, $(1_{zx})$ existen, si la función $f(x, y, z)$ así como las funciones que expresan la ecuación de la superficie, son continuas y tienen derivadas continuas.

El cálculo de las integrales de superficie de segundo tipo se reduce al cálculo de integrales dobles. Si la ecuación de la superficie está dada en *forma explícita* $z = \varphi(x, y)$, entonces la integral $(1_{xy})$ se calcula por la fórmula siguiente:

$$\int_S f(x, y, z)\, dx\, dy = \int_{\mathrm{Pr}_{xy} S} f[x, y, \varphi(x, y)]\, dS_{xy}, \qquad (2_{xy})$$

donde $S_{xy} = \mathrm{Pr}_{xy} S$.

Análogamente se calculan las integrales de superficie de la función $f(x, y, z)$ respecto de las proyecciones de la superficie orientable $S$ sobre los otros planos de coordenadas:

$$\int_S f(x, y, z)\, dy\, dz = \int_{\mathrm{Pr}_{yz} S} f[\psi(y, z), y, z]\, dS_{yz}, \qquad (2_{yz})$$

donde $x = \psi(y, z)$ es la ecuación de la superficie $S$, resuelta en $x$, $S_{yz} = \Pr_{yz} S$, $S_{zx} = \Pr_{zx} S$,

$$\int_S f(x, y, z)\, dz\, dx = \int_{\Pr_{zx} S} f[x, \chi(z, x)\, z]\, dS_{zx}, \qquad (2_{zx})$$

donde $y = \chi(z, x)$ es la ecuación de la superficie $S$, resuelta en $y$.

Al cambiar la orientación de la superficie (al sustituir la cara anterior por la posterior, y viceversa), la integral respecto de la proyección cambia de signo.

Si la superficie está dada en forma paramétrica por las ecuaciones

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

entonces las integrales $(1_{xy})$, $(1_{yz})$, $(1_{zx})$ se calculan por las fórmulas:

$$\int_S f(x, y, z)\, dx\, dy = \int_\Delta f[x(u, v), y(u, v)\, z(u, v)] \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, du\, dv, \qquad (3_{xy})$$

$$\int_S f(x, y, z)\, dy\, dz = \int_\Delta f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{D(y, z)}{D(u, v)}\, du\, dv, \qquad (3_{yz})$$

$$\int_S f(x, y, z)\, dz\, dx = \int_\Delta f[x, (u, v), y(u, v), z(u, v)] \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\, du\, dv. \qquad (3_{zx})$$

Aquí $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$ $\frac{D(z, x)}{D(u, v)}$ son los jacobianos de los pares de funciones $x$, $y$, $z$ de $u$, $v$; $\Delta$ es el campo de variación de los argumentos $u$, $v$ que corresponde a la superficie dada $S$.

Integral de superficie de tipo general. Si en una región conexa están dadas tres funciones de tres variables $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ y una superficie orientable $S$, entonces se llama *integral de superficie de tipo general* la suma de las integrales de segundo tipo respecto de todas las proyecciones:

$$\int_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \int_S P\, dy\, dz + \int_S Q\, dz\, dx + \int_S R\, dx\, dy^*.$$

La fórmula general que reduce la integral de superficie de tipo general a una integral doble ordinaria, es:

$$\int_S P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \int_\Delta \left[P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \right.$$
$$\left. + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right] du\, dv,$$

donde $\frac{D(y, z)}{D(u, v)}$, etc. y $\Delta$ tienen el significado indicado anteriormente.

---

* La exposición vectorial de la teoría de la integral de superficie de tipo general véase en el capítulo "Teoría de campo" (pág. 620).

*Propiedades de la integral de superficie*

1) Si el campo de integración (la superficie $S$) se ha dividido de algún modo en dos partes $S_1$, $S_2$, entonces

$$\int_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy = \int_{S_1} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy+ \\ +\int_{S_2} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy.$$

2) Al cambiar la orientación de la superficie (al sustituir la cara anterior por la posterior, y viceversa) la integral cambia de signo:

$$\int_{S+} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy = -\int_{S-} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

(aquí, $S^+$ y $S^-$ denotan una misma superficie, pero son orientadas inversamente).

3) En el **caso general** la integral de superficie depende tanto de la línea curva que limita la superficie $S$ como de la superficie propia, es decir, las integrales respecto de dos superficies $S_1$ y $S_2$ que tienen por borde un mismo contorno $C$ (fig. 343) no son, por lo general, iguales entre sí:

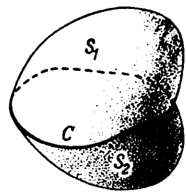


Fig. 343

$$\int_{S_1} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy \neq \int_{S_2} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy.$$

El *volumen* $V$ de un cuerpo, limitado por una superficie cerrada $S$, puede calcularse mediante la integral de superficie

$$V=\frac{1}{3}\int_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy,$$

onde $S$ está orientada de tal modo que su cara ante rior es la **exterior.**

## *21. Fórmulas de Stokes, Green y Ostrogradski-Gauss**

*Fórmula de Stokes* (expresión de una integral curvilínea mediante una de superficie). Si $S$ es una superficie orientable, situada en el interior de una región y limitada por un contorno cerrado ($K$) y $P$, $Q$, $R$ son

* La exposición vectorial de estos teoremas, véase en el capítulo "Teoría de campo", págs. 628-629.

funciones de tres variables $x$, $y$, $z$, dadas en la misma región, entonces se cumple la relación

$$\int_K P\,dx+Q\,dy+R\,dz =$$
$$= \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\;dy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dy\;dz+$$
$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\;dx^{*}, \qquad (1)$$

donde la integral curvilínea en el primer miembro se toma sobre el contorno $K$ en la dirección que es contraria a la del movimiento de las agujas del reloj para un observador que está situado en la cara anterior de la superficie $S$ (fig. 344).

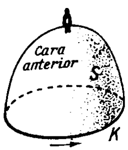



Fig. 344

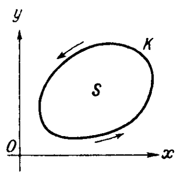



Fig. 345

La *fórmula de Green* es un caso particular de la fórmula de Stokes, para las funciones $P$, $Q$ de dos variables en una región plana (la expresión de una integral curvilínea sobre un contorno plano mediante la integral doble). Si $S$ es una superficie plana, situada en el interior de una región y limitada por un contorno cerrado $K$, y $P$, $Q$ son funciones de dos variables $x$, $y$ dadas en la misma región, entonces se cumple la relación

$$\int_K P\,dx+Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\;dy^{*}, \qquad (2)$$

donde la integral curvilínea en el primer miembro se toma sobre el contorno en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj (fig. 345).

*Fórmula de Ostrogradski-Gauss* (expresión de una integral triple mediante una de superficie). Si $S$ es una superficie cerrada orientable (la cara anterior es exterior) que limita un volumen $V$ y $P$, $Q$, $R$ son funciones de tres variables, dadas en una región simplemente conexa, que contiene a esta superficie, entonces se cumple la relación

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy^{*} \qquad (3)$$

* La fórmula se cumple bajo la condición de existencia y continuidad de las funciones $P$, $Q$, $R$ y de sus derivadas parciales de primer orden.

# IV. ECUACIONES DIFERENCIALES

## *Conceptos generales*

ECUACIÓN DIFERENCIAL es aquella que contiene funciones incógnitas, variables independientes y derivadas de las funciones incógnitas (o sus diferenciales).

*Ejemplos:* 1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy^5 \frac{dy}{dx} + \operatorname{sen} y = 0$; 2) $x\, d^2y\, dx - dy\,(dx)^2 = e^y (dy)^3$; 3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = xyz \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}$.

Si las funciones incógnitas dependen de una variable independiente, la ecuación diferencial se llama *ordinaria* (los ejemplos 1, 2). Si las funciones incógnitas dependen de varias variables independientes, la ecuación diferencial se llama *ecuación en derivadas parciales* (o entre derivadas parciales) (el ejemplo 3). Se llama *orden de una ecuación diferencial* al orden superior de las derivadas o diferenciales contenidas en la ecuación [la ecuación 1) es de primer orden, las ecuaciones 2), 3) son de segundo orden].

Se llaman INTEGRALES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL a una o varias ecuaciones, que ligan a las funciones incógnitas y a las variables independientes, tales que la ecuación diferencial dada se convierte en una identidad al sustituir en la misma las funciones incógnitas y sus derivadas determinadas por estas ecuaciones.

*Integrar* una ecuación diferencial significa hallar sus integrales. La integral que expresa explícitamente la función incógnita mediante las variables independientes se llama *solución* de la ecuación diferencial.

Las integrales de las ecuaciones diferenciales pueden contener constantes o funciones que pueden elegirse arbitrariamente *(funciones y constantes arbitrarias)*. De esta manera las integrales de la ecuación diferencial no se determinan unívocamente. Generalmente, a las funciones incógnitas se les imponen condiciones complementarias llamadas condiciones *iniciales* o condiciones *de contorno* o *de frontera*, que consisten en que las funciones incógnitas, así como algunas de sus derivadas, tienen que tomar unos valores dados para algunos valores determinados de las variables independientes. Con estas condiciones complementarias puede ocurrir que el problema tenga solución única. Por ejemplo, la ecuación diferencial ordinaria $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ tiene (con algunas restricciones) una solución única si se exige que $y$, $y'$, $\ldots$, $y^{(n-1)}$ tomen algunos valores dados para $x = a$ (más exactamente véase en la pág. 513).

La integral de una ecuación diferencial se llama *general* si, mediante una elección adecuada de las constanes arbitrarias o funciones, se puede obtener de ella una integral *particular* determinada, correspondiente a cualquier condición inicial o de contorno que admita solución única. La ecuación diferencial puede tener integrales *singulares*, las cuales no pueden obtenerse de la integral general para ningunos valores particulares de las constantes arbitrarias o de las funciones (véase la pág. 506).

## A. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

### 2. *Ecuaciones de 1^er^ orden*

NOCIONES TEÓRICAS. *Teorema de existencia* (de Cauchy). Si $f(x, y)$ es continua en una región, en la vecindad del punto $(x_0, y_0)$, es decir, para $|x-x_0| < a$ y $|y-y_0| < b$, entonces existe por lo menos una solución de la ecuación

$$y' = f(x, y) \tag{a}$$

que está definida y es continua en un intervalo alrededor de $x_0$ y que toma el valor $y_0$ para $x = x_0$. Si se cumple, además, la *condición de Lipschitz* en esta región, es decir,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < N\,|y_1 - y_2|,$$

y $N$ no depende de $x$, $y_1$ e $y_2$, entonces esta solución es única y es una función continua de $y_0$.

Para el cumplimiento de la condición de Lipschitz es suficiente que $f(x, y)$ tenga derivada parcial acotada $\frac{\partial f}{\partial y}$ en la región considerada. (Ejemplos en que no se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy véanse en las págs. 506-508).

*Campo de direcciones*. Si por un punto $M\,(x, y)$ pasa la gráfica de una solución $y = \varphi(x)$ de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, entonces la pendiente de la tangente a la gráfica en el punto dado $\left(\text{igual a } \frac{dy}{dx}\right)$ puede hallarse directamente de la ecuación diferencial. De esta manera, la ecuación diferencial determina en cada punto la dirección de la tangente a la gráfica de la solución. El conjunto de estas direcciones forma un *campo de direcciones* (fig. 346). Un punto junto con la dirección dada en él se llama *elemento* del campo de direcciones. La integración de una ecuación diferencial de primer orden se reduce geométricamente a la unión de los elementos en *curvas integrales*, cuyas tangentes tienen en cada punto una dirección que coincide con la dirección del campo.

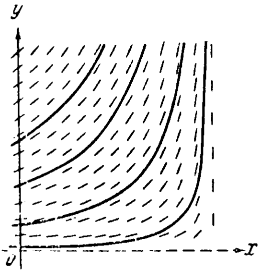


Fig. 346

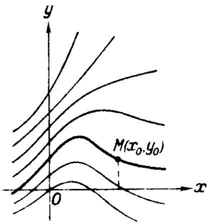


Fig. 347

En muchos problemas se suele operar con campos en los que se encuentran también direcciones verticales, lo que corresponde al caso en que $f(x, y)$ es infinita. En tales casos, la variable independiente y dependiente se cambian de papel, considerando la ecuación

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \qquad \text{(b)}$$

como equivalente a la dada. En equella región en la que cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las ecuaciones (a) o (b), por cada punto $M(x_0, y_0)$ pasa una sola curva integral (fig. 347).

El conjunto de todas las curvas integrales dependerá de un parámetro y la ecuación de esta familia, la integral general de la ecuación de primer orden, contendrá *una constante arbitraria*. Para obtener de la integral general $F(x, y, C) = 0$ la integral particular $y = \varphi(x)$ que verifica a la condición $y_0 = \varphi(x_0)$ es necesario definir $C$ de la ecuación

$$F(x_0, y_0, C) = 0.$$

MÉTODOS PRINCIPALES DE INTEGRACIÓN. *Separación de las variables.* Si una ecuación puede reducirse a la forma

$$M(x) N(y) dx + P(x) Q(y) dy = 0,$$

entonces se la puede representar en la forma

$$R(x)\,dx + S(y)\,dy = 0,$$

donde las variables $x$ e $y$ *están separadas;* para ello es necesario dividir todas las ecuaciones por $P(x)\cdot N(y)$, después de lo cual la integral general obtendrá la forma

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C.$$

Si $P(x)$ ó $N(y)$ se anulan para algunos valores de $\bar{x}$ ó $\bar{y}$, entonces $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ también son integrales de la ecuación dada.

*Ejemplo:* $x\,dy + y\,dx = 0;$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = C; \quad \ln y + \ln x = C = \ln c; \quad yx = c.$$

*Ecuaciones homogéneas.* Si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas de sus argumentos de igual grado (véase la pág. 336), entonces en la ecuación $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ las variables se separan (véase lo anterior) después de introducir en lugar de $y$ una nueva variable $u = \frac{y}{x}$.

*Ejemplo:* $y^2\,dx + x(x-y)\,dy = 0$; $y = ux$; $dy = u\,dx + x\,du$; $u^2x^2\cdot dx + x^2\,(1-u)(x\,du + u\,dx) = 0$; $\frac{dx}{x} + \frac{(1-u)\,d}{z} = 0$;

$\ln x + \ln u - u = C = \ln c$, $ux = ce^u$; $y = ce^{y/x}$. La recta $x = 0$ también es una línea integral (véase más arriba separación de las variables).

Se llama *ecuación diferencial exacta* a una ecuación de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \qquad (*)$$

si existe una función $\Phi(x, y)$ tal, que

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy \equiv d\Phi(x, y)$$

(véase la pág. 356). Si en una región simplemente conexa $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas junto con sus derivadas parciales de primer orden, entonces la condición $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ es necesaria y suficiente para que la ecuación $(*)$ sea una ecuación diferencial exacta. En este caso, la integral general de la ecuación $(*)$ es: $\Phi(x, y) = C$. La función $\Phi(x, y)$ se puede hallar por la fórmula [véase la pág. 356, fórmula $(4_2)$]

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0\eta)\,d\eta$$

($x_0$ e $y_0$ son arbitrarios).

Vease un *ejemplo* más adelante.

*Factor integrante* es una función $\mu(x, y)$ tal que al multiplicar la ecuación $M\,dx + N\,dy = 0$ por ella ésta se transforma en una ecuación diferencial exacta. El factor integrante satisface a la ecuación

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x},$$

además, cualquier solución particular de esta ecuación es un factor integrante.

Si se conoce un factor integrante $\mu$ de la ecuación ($*$) de modo que al multiplicar ésta por $\mu$ resulta la ecuación $d\Phi(x, y) = 0$, entonces la forma general del factor integrante de esta ecuación es $\tilde{\mu} = \mu f(\Phi)$, donde $f$ es una función arbitraria.

*Ejemplo:* Hallar la solución de la ecuación: $(x^2+y)\, dx - x\, dy = 0$. La ecuación para el factor integrante es: $-x \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - (x^2+y) \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 2$. Busquemos un factor integrante independiente de $y$; se tiene: $x \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -2$ ó $\mu = \frac{1}{x^2}$. Multiplicando la ecuación diferencial dada por $\mu$, resulta: $\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x}\, dy = 0$.

La integral general ($x_0 = 1$, $y_0 = 0$) es:

$$\Phi(x, y) \equiv \int_1^x \left(1 + \frac{y}{\xi^2}\right) d\xi - \int_0^y d\eta = C \text{ ó } x - \frac{y}{x} = C_1.$$

*Ecuación lineal.* Una ecuación de la forma

$$y' + P(x)\, y = Q(x),$$

en la cual la función incógnita y su derivada están contenidas linealmente (es decir, figura sólo la primera potencia), se llama ***ecuación diferencial lineal de primer orden***. Esta tiene el factor integrante $\mu = e^{\int P\, dx}$. La integral general se halla por la fórmula

$$y = e^{-\int P\, dx} \left[\int Q e^{\int P\, dx}\, dx + C\right]. \qquad (**)$$

Si sustituimos siempre en esta fórmula la integración indefinida por la integración entre los límites $x_0$ y $x$*, tendremos la solución que toma el valor $C$ para $x = x_0$. Si se conoce una solución particular cualquiera $y_1(x)$ de la ecuación lineal, la solución general se halla por la fórmula $y = y_1 + Ce^{-\int P\, dx}$. Si se conocen dos soluciones particulares linealmente independientes (véase la pág. 516) $y_1(x)$ e $y_2(x)$, la solución general

---

* Véase la pág. 386.

de la ecuación lineal se obtiene sin ninguna integración: $y = y_1 + C(y_2 - y_1)$.

*Ejemplo:* Hallar la solución de la ecuación $y' - y \operatorname{tg} x = \cos x$ que verifica las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Calculamos $e^{-\int_0^x \operatorname{tg} x\, dx} = \cos x$ y por la fórmula ($**$) obtenemos:

$$y = \frac{1}{\cos x} \int_0^x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2}\right] = \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{x}{2 \cos x}.$$

*La ecuación de Bernoulli*

$$y' + P(x)\, y = Q(x)\, y^n$$

se reduce a una lineal al dividirla por $y^n$ e introducir la nueva variable $z = y^{-n+1}$.

*Ejemplo:* $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$. Aquí $n = \frac{1}{2}$. Dividiendo por $\sqrt{y}$ e introduciendo la nueva variable $z = \sqrt{y}$, obtenemos $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}$. Por la fórmula de la solución de la ecuación lineal: $e^{\int P\, dx} = \frac{1}{x^2}$ y $z = x^2\left[\int \frac{x}{2}\,\frac{1}{x^2}\, dx + C\right] = x^2\left[\frac{1}{2}\ln x + C\right]$; por lo tanto, $y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2$.

*La ecuación de Riccati*

$$y' = P(x)\, y^2 + Q(x)\, y + R(x),$$

en general, no se integra en cuadraturas (es decir, la búsqueda de su solución no puede reducirse a un número finito de integraciones sucesivas). Si se conoce una solución particular $y_1$ de la ecuación de Riccati, entonces introduciendo una nueva variable $z$: $y = y_1 + \frac{1}{z}$, la ecuación de Riccati se reduce a una ecuación lineal. Si se conoce otra solución más $y_2$ de la ecuación de Riccati, entonces $z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ es una solución particular de la ecuación lineal para la variable $z$, lo cual permite simplificar su integración. Si para la ecuación de Riccati se conocen tres soluciones particulares: $y_1$, $y_2$ e $y_3$, entonces su integral general es: $\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C$. Mediante la sustitución de las variables $y = \frac{u}{P(x)} + \beta(x)$ la ecuación de Riccati se reduce siempre a la forma canónica: $\frac{du}{dx} = u^2 + R(x)$.

Mediante la sustitución $y = -\frac{v'}{P(x)\,v}$ la ecuación de Riccati se reduce a una ecuación lineal de segundo orden (véase la pág. 530)

$$Pv'' - (P' + PQ)\,v' + P^2 Rv = 0.$$

*Ejemplo:* $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$. Hacemos la sustitución $y = z + \beta(x)$. Después de la sustitución el coeficiente de la primera potencia de $z$ será igual a $2\beta + \frac{1}{x}$, por lo cual, desaparecerá al tomar $\beta(x) = -\frac{1}{2x}$. Así, pues, tendremos: $z' + z^2 - \frac{15}{4x^2} = 0$. Es natural buscar una solución particular $z_1 = \frac{a}{x}$. Sustituyendo, hallamos: $a_1 = -\frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{5}{2}$ (dos soluciones particulares: $z_1 = -\frac{3}{2x}$, $z_2 = \frac{5}{2x}$). Hacemos una nueva sustitución: $z = \frac{1}{u} + z_1 = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x}$. Resulta: $u' + \frac{3u}{x} = 1$. Empleando la solución particular de esta ecuación $u_1 = \frac{1}{z_2 - z_1} = \frac{x}{4}$, hallamos su solución general: $u = \frac{x}{4} + \frac{C}{x^3} = \frac{x^4 + C_1}{4x^3}$;
de donde

$$y = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{2x^4 - 2C_1}{x^5 + C_1 x}.$$

ECUACIONES NO RESUELTAS EN $y'$: $F(x, y, y') = 0$. Si en algún punto $M(x_0, y_0)$ la ecuación $F(x_0, y_0, p) = 0$, donde $p = \frac{dy}{dx}$, tiene $n$ raíces reales $p_1, \ldots, p_n$, y para $x = x_0$, $y = y_0$, $p = p_i$ la función $F(x, y, p)$ con sus derivadas primeras es continua siendo $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, entonces por el punto $M$ pasan $n$ curvas integrales.

Si es posible resolver la ecuación dada con respecto a $y'$, ésta se descompone en $n$ ecuaciones del tipo anteriormente estudiado. Resolviéndolas se obtienen las ecuaciones de $n$ familias de curvas integrales. Si la ecuación se puede representar en la forma $x = \varphi(y, y')$ ó $y = \psi(x, y')$, entonces, haciendo $y' = p$ y considerando $p$ como una variable auxiliar, después de derivar con respecto a $y$ o con respecto a $x$ obtenemos una ecuación con respecto a $\frac{dp}{dy}$ ó $\frac{dp}{dx}$, resuelta en la derivada. Su solución, junto con la ecuación inicial, determina la solución pedida en forma paramétrica.

*Ejemplo:* $x = yy' + y'^2$; $y' = p$; $x = py + p^2$. Derivando con respecto a $y$ y haciendo $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$:

$$\frac{1}{p} = p + (y + 2p)\frac{dp}{dy} \quad ó \quad \frac{dy}{dp} - \frac{py}{1-p^2} = \frac{2p^2}{1-p^2}.$$

Esta ecuación es lineal con respecto a $y$; resolviéndola, obtenemos $y = -p+\frac{c+\operatorname{arcsen} p}{\sqrt{1-p^2}}$; agregando la ecuación inicial $x = py+p^2$, obtenemos la solución pedida en forma paramétrica.

*La ecuación de Lagrange* $a(y')\,x+b(y')\,y+c(y') = 0$ siempre se integra por cuadraturas por el método anteriormente indicado. Si $a(p)+b(p)\,p = 0$ para $p = p_0$, entonces $a(p_0)\,x+b(p_0)\,y+c(p_0) = 0$ es una integral singular (véase más adelante) de la ecuación de Lagrange. Si $a(p)+b(p)_p \equiv 0$, se tiene la *ecuación de Clairaut*, la cual siempre se puede reducir a la forma $y = y'x+f(y')$. Su solución general es: $y = Cx+f(C)$. Además de la solución general (que geométricamente da una familia de rectas, dependiente de un parámetro), la ecuación de Clairaut tiene una integral singular que se obtiene eliminando $C$ entre las ecuaciones $y = Cx+f(C)$ y $0 = x+f'(C)$ (la segunda ecuación se obtiene derivando la primera con respecto a $C$; geométricamente la integral singular es la envolvente de la familia dada de rectas, fig. 348) (véase la pág. 288).

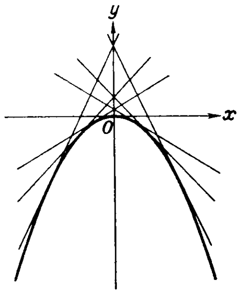


Fig. 348

*Ejemplo:* $y = xy'+y'^2$; la integral general es: $y = Cx+C^2$, la integral singular (agregamos la ecuación $x+2C = 0$ y eliminamos $C$) es:

$$x^2+4y = 0.$$

Las curvas integrales de la ecuación diferencial considerada están representadas en la fig. 348.

*Integrales singulares.* Un elemento $(x_0, y_0, y_0')$ se llama singular si, además de la ecuación $F(x, y, y') = 0$, satisface también a la ecuación $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. La curva integral formada por los elementos singulares se llama *singular*. Para todos sus puntos no se cumple la propiedad de la unicidad de la solución (véase el teorema de Cauchy, pág. 500). Las envolventes (véase la pág. 288) de las curvas integrales (véase la fig. 348) son curvas integrales singulares. La ecuación de una curva integral singular $\varphi(x,y) = 0$ representa una *integral singular*, como norma, ésta no se obtiene de la ecuación general para ningún valor de la constante arbitraria. Para hallar la integral singular de la ecuación diferencial $F(x, y, p) = 0$, donde $p = y'$, se agrega a la ecuación dada la ecuación $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, y se elimina $p$. Si la relación obtenida es una integral de la ecuación diferencial dada, entonces ésta será una integral singular (en este caso la ecuación debe reducirse previamente a una forma que no contenga funciones multiformes* y, en particular, radicales). Si se conoce la ecuación de la familia de las curvas integrales, es decir, la integral general de la ecuación diferencial dada, entonces para hallar las envolventes de esta familia, las cuales dan las soluciones singulares, pueden aplicarse los métodos de la geometría diferencial (véase la pág. 289).

*Ejemplos:* 1) $x-y-\frac{4}{9}p^2+\frac{8}{27}p^3=0.$

La ecuación complementaria $\left(\text{es decir, } \frac{\partial F}{\partial p}=0\right)$: es:

$$-\frac{8}{9}p+\frac{8}{9}p^2=0.$$

Eliminando $p$, obtenemos: a) $x-y=0$, b) $x-y=\frac{4}{27}$; a) no es solución, b) es una solución singular [la solución general de esta ecuación es: $(y-C)^2=(x-C)^3$]. Las curvas integrales y las líneas a) y b) se muestran en la fig. 349.

2) $y'-\ln|x|=0$. La escribamos en la forma $e^p-|x|=0$, puesto que $\ln|x|$ es una función multiforme (véase la pág. 574). $\frac{\partial F}{\partial p}\equiv e^p=0$. Eliminando $p$, obtenemos la integral singular $x=0$.

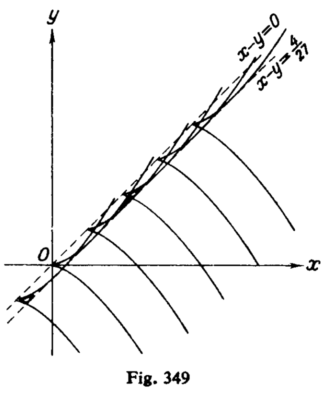



Fig. 349

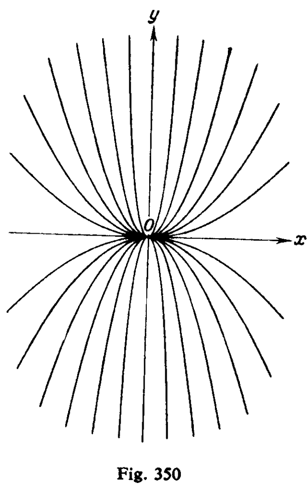



Fig. 350

* También se tienen en cuenta los valores complejos de la función.

PUNTOS SINGULARES DE UNA DIFERENCIAL. Para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by}{cx+ey} \quad (ae-bc \neq 0)$$

el *punto* (0, 0) es *singular aislado*, puesto que en él no se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy (véase la pág. 501), las cuales se cumplen en cualquier otro punto arbitrariamente próximo al mismo*. El comportamiento de las curvas integrales en las proximidades de este punto singular depende de las raíces de la *ecuación característica:*

$$\lambda^2-(b+c)\,\lambda+bc-ae = 0,$$

a saber:

1) Si las raíces son reales y de un mismo signo, el punto singular se llama *nodo*. Todas las curvas integrales en la entorno del punto singular pasan por él, teniendo aquí (si las raíces no coinciden) tangente común, a excepción de una curva integral. Si las raíces coinciden, entonces todas las curvas integrales tienen una tangente común o en cada dirección por el punto singular pasa una sola curva.

*Ejemplos:* a) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$, la ecuación característica es: $\lambda^2-3\lambda+2 = 0$; $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$; las curvas integrales son: $y = Cx^2$** (fig. 350); b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$; la ecuación característica es: $\lambda^2-2\lambda+1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; las curvas integrales son: $y = x\ln|x|+Cx$ (fig. 351); c) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$; la ecuación característica es: $\lambda^2-2\lambda+1 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; las curvas integrales son: $y = Cx$ (fig. 352).

2) Si las raíces son reales, pero de signos contrarios, el punto singular se llama *punto de ensilladura.* Por el punto singular pasan dos curvas integrales.

*Ejemplo:* $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; la ecuación característica es: $\lambda^2-1 = 0$, $\lambda_1 = +1$, $\lambda_2 = -1$; las curvas integrales son: $xy = C$ (fig. 353), para $C = 0$ se tienen las integrales particulares: $x = 0$, $y = 0$.

3) Si las raíces son imaginarias conjugadas, el punto singular es un *foco.* Las curvas integrales "se arrollan" alrededor del punto singular dando un conjunto infinito de vueltas.

---

* Precisando, se puede observar que las condiciones del teorema de Cauchy no se cumplen tampoco en todos aquellos puntos para los cuales $cx+ey = 0$; sin embargo, se cumplen si se permutan los papeles que desempeñan las variables dependiente e independiente y se considera la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{cx+ey}{ax+by}$.

** La recta $x=0$ también está contenida en la solución general, lo cual es evidente al escribirla en la forma $x^2 = C_1 y$.

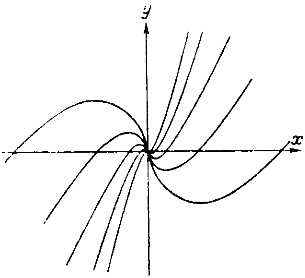



Fig. 351

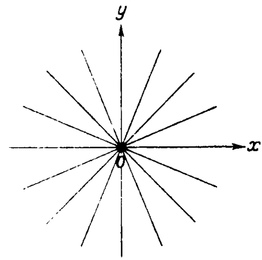



Fig. 352

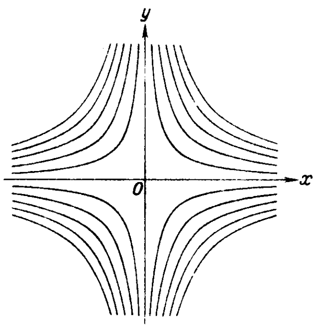



Fig. 353

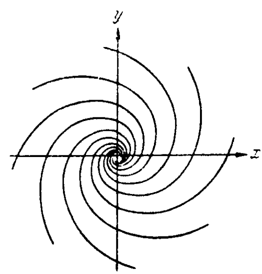



Fig. 354

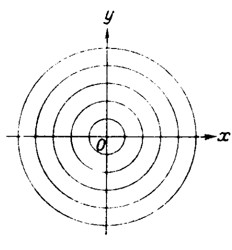



Fig. 355

*Ejemplo:* $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ ; la ecuación característica es: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$; las curvas integrales (en coordenadas polares) son: $\rho = Ce^{\varphi}$ (fig. 354).

4) Si las raíces son imaginarias puras, el punto singular es un *centro*. Este está rodeado por una familia de curvas integrales cerradas.

*Ejemplo:* $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ; la ecuación característica es: $\lambda^2+1 = 0$; $\lambda_1 = i$; $\lambda_2 = -i$. Las curvas integrales son: $x^2+y^2 = C$ (fig. 355).

Para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

los puntos singulares son aquellos en los que simultáneamente $P(x, y) = 0$ y $Q(x, y) = 0$. Suponiendo que $P$ y $Q$ son funciones con derivadas parciales continuas, se puede representar la ecuación dada en la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)+P_1(x,y)}{c(x-x_0)+e(y-y_0)+Q_1(x,y)},$$

donde $x_0, y_0$ son las coordenadas del punto singular y $P_1(x, y)$ y $Q_1(x, y)$ son infinitésimos de orden superior en comparación con la distancia del punto $(x, y)$ al punto singular. Resulta que el carácter del punto singular de la ecuación diferencial dada es el mismo que el del punto singular de la *ecuación de la primera aproximación* que se obtiene al despreciar $P_1$ y $Q_1$. *Las excepciones son:* a) si el punto singular de la ecuación de la primera aproximación es un centro, el punto singular de la ecuación fundamental puede ser un centro o un foco; b) si $ae-bc = 0$ (es decir, $\frac{a}{c} = \frac{b}{e}$, ó $a = c = 0$, ó $a = b = 0$, etc.), entonces para determinar el carácter del puntc singular se requiere el estudio de los términos de orden superior.

MÉTODOS APROXIMADOS DE INTEGRACIÓN. *Método de aproximaciones sucesivas* (Picard). La ecuación $y' = f(x, y)$ con la condición inicial $y = y_0$ para $x = x_0$ puede escribirse en la forma

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx. \tag{1}$$

Si en lugar de $y$ se pone en el segundo miembro una función cualquiera $y_1(x)$, obtenemos en el primer miembro una nueva función $y_2$, la cual no coincidirá con $y_1$, si $y_1$ no es una solución de la ecuación dada. Poniendo en el segundo miembro de la ecuación (1) $y_2$ en lugar de $y$. obtenemos una función $y_3$, etc.

Si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy (véase la pág. 501), la sucesión de funciones obtenida $y_1, y_2, y_3, \ldots$ converge hacia la solución buscada en cierto intervalo que contiene al punto $x_0$. El método de aproximaciones sucesivas también se llama a veces método de *iteraciones* (véase la pág. 164).

*Ejemplo:* $y' = e^x - y^2$; las condiciones iniciales son: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. En forma integral la ecuación se escribe así:

$$y = \int_0^x (e^x - y^2)\,dx.$$

Aplicando el método de Picard, comenzando con $y_0 = 0$, obtenemos la sucesión

$$y_1 = \int_0^x e^x\,dx = e^x - 1;$$

$$y_2 = \int_0^x [e^x - (e^x - 1)^2]\,dx = 3e^x - \frac{1}{2}e^{2x} - x - \frac{5}{2}, \text{ etc.}$$

*Aplicación de las series.* Se puede escribir el desarrollo en serie de Taylor de la solución de la ecuación diferencial (véase la pág. 377)

$$y = y_0 + (x - x_0)\,y_0' + \frac{(x-x_0)^2}{2}\,y_0'' + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\,y_0^{(n)} + \ldots,$$

si se conocen los valores de todas sus derivadas $y_0'$, $y_0''$, $y_0'''$, $\ldots$, $y_0^{(n)}$, $\ldots$ para el valor inicial del argumento $x_0$. Estos valores pueden hallarse de la ecuación diferencial derivando ésta sucesivamente y poniendo las condiciones iniciales. Si la derivación es posible ilimitadamente, la serie obtenida será convergente en un entorno del valor inicial del argumento. Evidentemente, este método es aplicable a ecuación de $n$-ésimo orden.

Muchas veces suele ser más útil prácticamente buscar la solución en forma de una serie con coeficientes indeterminados, los cuales pueden determinarse escribiendo la condición de que la serie verifica la ecuación.

*Ejemplo:* $y' = e^x - y^2$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Hacemos $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ Sustituyendo en la ecuación, obtenemos*: $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + [a_1^2x^2 + 2a_1a_2x^3 + (a_2^2 + 2a_1a_3)x^4 + \ldots] = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$, de donde $a_1 = 1$, $2a_2 = 1$, $3a_3 + a_1^2 = \frac{1}{2}$, $4a_4 +$

* Véase en la pág. 350 la fórmula para el cuadrado de una serie.

$+2a_1a_2 = \frac{1}{6}$, etc. Resolviendo sucesivamente estas ecuaciones y poniendo en la serie los coeficientes encontrados, resulta:

$$y = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5}{24}x^4 + \dots$$

Otro procedimiento: $y' = e^x - y^2$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Poniendo en la ecuación $x = 0$, hallamos $y_0' = 1$. Luego: $y'' = e^x - 2yy'$; $y_0'' = 1$; $y''' = e^x - 2y'^2 - 2yy''$, $y_0''' = -1$; $y^{\mathrm{IV}} = e^x - 6y'y'' - 2yy'''$, $y_0^{\mathrm{IV}} = -5$, etc. Según la fórmula de Taylor:

$$y = x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{5x^4}{4!} + \dots$$

*La integración gráfica de las ecuaciones* se basa en el concepto de campo de direcciones (véase la pág. 500). La curva integral se representa aproximadamente por una poligonal que parte del punto inicial (fig. 356) y que está formada por segmentos no muy grandes, cuyas direcciones coinciden con las direcciones del campo en los puntos iniciales de los segmentos respectivos, los cuales son a su vez los puntos finales de los segmentos precedentes.

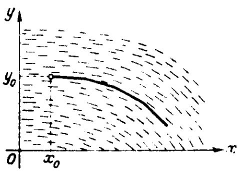



Fig. 356

*Integración numérica.* Para la integración numérica de la ecuación $y' = f(x, y)$ se forma sucesivamente una tabla de la función buscada para los valores del argumento $x_k = x_0 + kh$ $(k = 1, 2, 3 \dots)$. Para esto se emplean generalmente algunas fórmulas de integración aproximada que permitan calcular $y_{k+1} - y_k = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f[x, y(x)]\,dx$.

Las fórmulas de diferencias más usuales son las siguientes (las notaciones véase en la pág. 662):

$$y_{k+1} - y_k = h\left[f_k + \frac{1}{2}\Delta f_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 f_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 f_{k-3}\right], \qquad \text{(A)}$$

$$y_{k+1} - y_k = h\left[f_{k+1} - \frac{1}{2}\Delta f_k - \frac{1}{12}\Delta^2 f_{k-1} - \frac{1}{24}\Delta^3 f_{k-2}\right]. \qquad \text{(B)}$$

Hallando por la fórmula (A) la primera aproximación $y_{k+1}$, se calcula $f_{k+1}$ y se obtiene la segunda aproximación $y_{k+1}$ por la fórmula (B). Así mismo puede hallarse la tercera aproximación, pero generalmente se procura elegir el paso de tal modo que no haya necesidad de ello.

*Ejemplo:* Los términos de la serie obtenidos anteriormente para la solución de la ecuación $y' = e^x - y^2$ que corresponde a las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, permiten calcular los valores de $y$ para $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$ y $x_3 = 0{,}3$, con cuatro cifras decimales. Para calcular los valores siguientes de $y$ se forma una tabla según el esquema siguiente (hasta la línea escalonada):

| $x$ | $y$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 1,0000 | 942 | −147 | −35 |
| 0,1 | 0,1048 | 1,0942 | 795 | −182 | −21 |
| 0,2 | 0,2183 | 1,1737 | 613 | −203 | |
| ,3 | 0,3389 | 1,2350 | 410 | | |
| 0,4 | 0,4646 | 1,2760 | | | |

Es conveniente comprobar el valor $y_3$ por la fórmula (B):

$$y_3 = 0{,}2183 + 0{,}1\,(1{,}2350 - 0{,}0306 + 0{,}0015 + 0{,}0001) = 0{,}3389.$$

Después, para $x_4 = 0{,}4$ según la fórmula (A), obtenemos: $y_4 - y_3 = 0{,}1\,(1{,}2350 + 0{,}0306 - 0{,}0076 - 0{,}0013) = 0{,}1257$. Calculando el valor $f_4$ mediante $y_4 = 0{,}4646$ y prolongando la tabla, obtenemos según la fórmula (B):

$$y_4 - y_3 = 0{,}1\,(1{,}2760 - 0{,}0205 + 0{,}0017 + 0{,}0001) = 0{,}1257.$$

Como el valor $y_4$ se conserva, efectuamos el paso siguiente, etc.

En lugar de las fórmulas de diferencias (A) y (B) suelen aplicarse también las fórmulas:

$$y_{k+1} = y_{k-3} + \frac{4}{3} h\,[2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2}], \tag{A$_1$}$$

$$y_{k+1} = y_{k-1} + \frac{h}{3}\,[f_{k+1} + 4f_k + f_{k-1}]. \tag{B$_1$}$$

Los métodos descritos se extienden fácilmente a los sistemas de ecuaciones diferenciales.

## 3. *Ecuaciones de orden superior y sistemas de ecuaciones*

CONCEPTOS TEÓRICOS. *Teorema de existencia.* Toda ecuación de $n$-ésimo orden

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

mediante la introducción de las nuevas variables $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, $\ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$, puede reducirse al sistema de $n$ ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = F(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

El sistema de ecuaciones más general:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (*)$$

admite un sistema único de soluciones $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, definidas y continuas en cierto intervalo $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$, y que toman para $x = x_0$ los valores iniciales dados: $y_i(x_0) = y_i^0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, si las funciones $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son continuas con respecto a todas las variables y verifican la *condición de Lipschitz:*

$$|f_i(x, y_1+\Delta y_1, y_2+\Delta y_2, \ldots, y_n+\Delta y_n) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant K(|\Delta y_1| + |\Delta y_2| + \ldots + |\Delta y_n|)$$

para los valores $x$, $y_i$ e $y_i + \Delta y_i$ que están situados en una región en la proximidad de los valores iniciales dados. En correspondencia con esto, la ecuación $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ admite una solución única que satisface a las condiciones iniciales $y = y_0, y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ para $x = x_0$ y que es continua junto con sus derivadas hasta el $n$-ésimo orden inclusive, si $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ es continua y satisface a la condición de Lipschitz, expuesta anteriormente para las funciones $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

*Solución general.* Para la ecuación

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

la solución general contiene $n$ constantes independientes:

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Geométricamente esta ecuación determina una familia $n$-paramétrica de curvas integrales; cada curva integral (la gráfica de la solución particular correspondiente) se obtiene de esta familia mediante una elección determinada de los valores de las constantes arbitrarias $C_1$, $C_2$, $\ldots C_n$. Si la integral particular tiene que satisfacer a las condiciones iniciales dadas anteriormente, los valores $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se determinan de las ecuaciones:

$$y(x_0, C_1, \ldots, C_n) = y_0.$$
$$\left[\frac{d}{dx} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x=x_0} = y_0',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y(x, C_1, \ldots, C_n)\right]_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}.$$

Si estas ecuaciones son incompatibles para valores iniciales arbitrarios de una región, entonces la solución no es general en ésta, pues las constantes arbitrarias no son independientes.

Para el sistema ($*$) la *solución general* también contiene $n$ constantes arbitrarias y puede expresarse en forma explícita con respecto a las funciones independientes

$$y_1 = F_1(x, C_1, \ldots, C_n), \quad y_2 = F_2(x, C_1, \ldots, C_n), \ldots, \\ \ldots, y_n = F_n(x, C_1, \ldots, C_n),$$

o en forma explícita con respecto a las constantes arbitrarias

$$\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_n) = C_1, \quad \varphi_2(x, y_1, \ldots, y_n) = C_2, \ldots, \\ \ldots, \varphi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = C_n.$$

En el último caso, cada relación $\varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) = C_i$ representa una *integral primera* del sistema ($*$). La integral primera puede definirse independientemente de la general, como una relación entre $x, y_1, \ldots, y_n$ que se transforma en una constante, si en lugar de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ se pone una solución cualquiera del sistema dado. Cada integral primera del sistema ($*$) verifica la ecuación diferencial lineal en derivadas parciales:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} + \ldots f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_n} = 0,$$

y viceversa, toda solución $\varphi_i\,(x, y_1, y_2, \ldots y_n)$ de esta ecuación es una integral primera del sistema ($*$). El conjunto de $n$ integrales primeras independientes (véase la pág. 337) del sistema ($*$) forma su integral general.

Reducción del orden. Uno de los métodos fundamentales de integración de las ecuaciones de $n$-ésimo orden es el cambio de las variables, que da lugar a ecuaciones más simples, en particular, a ecuaciones de orden inferior.

*Ecuación que no contiene explícitamente $x$:* $f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ se reduce a una ecuación de $(n-1)$-ésimo orden después de hacer la sustitución: $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}$, etc.

*Ejemplo:* $yy'' - y'^2 = 0$, $p = y'$, $p\frac{dp}{dy} = y''$, $yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$, $y\frac{dp}{dy} - p = 0$, $p = Cy = \frac{dy}{dx}$; $y = C_1e^{Cx}$ (al simplificar por $p$, no se pierde ninguna solución, pues $p = 0$ da $y = C_1$, la cual está contenida en la solución general obtenida para $C = 0$).

*Ecuación que no contiene explícitamente $y$:* $f(x, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Se reduce el orden haciendo la sustitución $y' = p$. Si en la ecuación no están contenidas las $k$ primeras derivadas, se debe hacer la sustitución $y^{(k+1)} = p$.

*Ejemplo:* $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$. Haciendo la sustitución $y'' = p$ se obtiene la ecuación de Clairaut: $p - x\frac{dp}{dx} + \left(\frac{dp}{dx}\right)^3 = 0$. Su solución general es: $p = C_1x + C_1^3$. De aquí que $y = \frac{C_1x^3}{6} - \frac{C_1^3x^2}{2} + C_2x + C_3$. La solución singular de la ecuación de Clairaut $p = \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2}$ da una solución singular de la ecuación inicial

$$y = \frac{8\sqrt{3}}{315}x^{7/2} + C_1x + C_2.$$

*La ecuación* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, en la que $f$ es una función *homogénea* (véase la pág. 337) *con respecto a* $y, y', \ldots, y^{(n)}$ admite una reducción del orden al introducir la nueva función $z = \frac{y'}{y}$ $\left(\text{es decir, } y = e^{\int z\,dx}\right)$.

*Ejemplo:* $yy'' - y'^2 = 0$; $z = \frac{y'}{y}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{yy'' - y'^2}{y^2}$; por lo tanto, $z = C_1$, de donde $\ln y = C_1x + C_2$ ó $y = Ce^{C_1x}$, en que $\ln C = C_2$.

*La ecuación* $y^{(n)} = f(x)$. Por la integración sucesiva la solución general se obtiene en la forma

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + \ldots + C_nx^{n-1} + \psi(x),$$

donde

$$\psi(x) = \iint \ldots \int f(x)(dx)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Aquí $x_0$ no es una constante arbitraria complementaria. Al variar $x_0$, $C_k$ también varía, pues $C_k = \frac{1}{(k-1)!}y^{(k-1)}(x_0)$.

Ecuaciones lineales. Se llama ecuación lineal de n-ésimo orden a la de la forma

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = F, \qquad \text{(L)}$$

donde $a_i$ y $F$ *(segundo miembro)* son funciones de $x$, las cuales supondremos continuas en un intervalo. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes, ésta se llama *ecuación de coeficientes constantes*. Una ecuación lineal se llama *homogénea*, si $F = 0$, y *no homogénea*, en el caso contrario.

Un sistema de soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación lineal homogénea se llama *fundamental*, si estas funciones son *linealmente independientes* en el intervalo considerado, es decir, si su combinación lineal $C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ para ningunos valores de $C_1, C_2, \ldots, C_n$, a excepción de $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, no se anula idénticamente (para todos los valores de $x$ en el intervalo considerado). Las soluciones

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación lineal homogénea forman un sistema fundamental cuando, y sólo cuando, su *wronskiano*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

es distinto de cero. Para cualquier sistema de soluciones de la ecuación lineal homogénea se verifica la *fórmula de Liouville:*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\, dx}$$

debido a la cual el determinante $W$ sólo puede anularse idénticamente [es decir, sólo si $W(x_0) = 0$]. Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forman un sistema fundamental de soluciones, la solución general de la ecuación lineal homogénea es: $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$.

Si se conoce una solución particular $y_1$ de la ecuación homogénea, entonces puede reducirse el orden, conservando la linealidad, mediante la introducción de una nueva función incógnita $u = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)$.

*Teorema de superposición.* Si $y_1$ e $y_2$ son soluciones de la ecuación (L) para segundos miembros distintos $F_1$ y $F_2$, entonces su suma $y = y_1 + y_2$ es una solución de la misma ecuación, pero con el segundo miembro $F = F_1 + F_2$. De aquí se deduce que para la obtención de la solución general de una ecuación no homogénea, es suficiente agregar a cualquiera de sus soluciones particulares la solución general de la ecuación homogénea.

*Teorema de descomposición.* Si la ecuación (L) tiene coeficientes reales y $F = F_1 + iF_2$, donde $F_1$ y $F_2$ también son reales, su solución es compleja $y = y_1 + iy_2$; además $y_1$ e $y_2$ son soluciones de la ecuación (L), con el segundo miembro igual a $F_1$ y $F_2$, respectivamente.

Si se conoce el sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente, la *solución de la ecuación no homogénea* (L) puede obtenerse por cuadraturas, por uno de los métodos siguientes.

*Método de variación de las constantes.* Escribiendo la solución buscada en la forma $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ consideramos que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ no son constantes, sino funciones de $x$. Exigiendo que se cumplan las relaciones:

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n &= 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} &= 0, \end{aligned}$$

y poniendo $y$ en la ecuación (L) resulta:

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = F.$$

Resolviendo el sistema lineal de ecuaciones, hallamos $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ y después, por cuadraturas, $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

*Método de Cauchy.* Determinemos las constantes en la solución general de la ecuación homogénea $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ de tal modo que para $x = \alpha$ sea $y = 0, y' = 0, \ldots, y^{(n-2)} = 0, y^{(n-1)} = F(\alpha)$, donde $\alpha$ es un parámetro arbitrario. Si representamos ahora por $\varphi(x, \alpha)$ la solución de la ecuación homogénea, obtenida de esta manera, la integral $y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha)\, d\alpha$ será una solución particular de la ecuación (L) que para $x = x_0$ se anula junto con sus derivadas hasta el $(n-1)$-ésimo orden inclusive.

## *4. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes*

ANOTACIÓN OPERACIONAL. La ecuación (L) (véase la pág. 516) puede escribirse simbólicamente en la forma

$$P_n(D)_y \equiv (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = F,$$

donde $D$ es el operador de derivación:

$$Dy = \frac{dy}{dx}, \qquad D^k y = \frac{d^k y}{dx^k}.$$

Si los coeficientes $a_i$ son constantes, $P_n(D)$ es un polinomio de $n$-ésimo grado con respecto al operador $D$ (de coeficientes numéricos).

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA $P_n(D)y = 0$. Para hallar la solución general es necesario encontrar las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de la ecuación algebraica (véanse las págs. 158-165) $P_n(r) = 0$ *(ecuación característica)*. A cada raíz $r_i$ corresponde una solución $e^{r_i x}$ de la ecuación $P_n(D)\,y = 0$. Si $r_i$ es una raíz múltiple de orden $k$, las funciones $xe^{r_i x}, x^2 e^{r_i x}, \ldots, x^{k-1} e^{r_i x}$ también son soluciones. La combinación lineal de estas soluciones para todas las raíces $r_i$

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + e^{r_i x}(C_i + C_{i+1} x + \ldots + C_{i+k-1} x^{k-1}) + \ldots$$

es la solución general de la ecuación homogénea.

Si entre las raíces hay complejas (sólo pueden ser conjugadas dos a dos*), por ejemplo, si: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, entonces en los términos

* Suponemos que los coeficientes $a_k$ son reales.

correspondientes de la solución general las funciones $e^{r_1x}$ y $e^{r_2x}$ deben sustituirse por $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}$ sen $\beta x$. En este caso, las expresiones obtenidas de la forma $C_1\cos\beta x+C_2$ sen $\beta x$ también pueden representarse en la forma $A\cos(\beta x+\varphi)$, donde $A$ y $\varphi$ son constantes arbitrarias.

*Ejemplo:* Para la ecuación $y^{\text{VI}}+y^{\text{IV}}-y''-y=0$ la ecuación característica $r^6+r^4-r^2-1=0$ tiene las raíces: $r_1=1$, $r_2=-1$, $r_{3,4}=i$, $r_{5,6}=-i$. La solución general es:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+(C_3+C_4x)\cos x+(C_5+C_6x)\operatorname{sen} x$$

ó

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+A_1\cos(x+\varphi_1)+xA_2\cos(x+\varphi_2).$$

TEOREMA DE HURWITZ. En la teoría de las oscilaciones y en otras aplicaciones, frecuentemente, es importante establecer que cualquier solución de una ecuación diferencial lineal homogénea dada de coeficientes constantes, tiende a cero cuando $x\to+\infty$. Esto se cumplirá si las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica resultan negativas. Todas las raíces de la ecuación

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ \dots\ +a_nx^n=0\ \ (a_0>0)$$

tendrán las partes reales negativas si, y sólo si, todos los determinantes

$$D_1=a_1,\quad D_2=\begin{vmatrix}a_1&a_0\\a_3&a_2\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_1&a_0&0\\a_3&a_2&a_1\\a_5&a_4&a_3\end{vmatrix},\ \dots$$

$$\dots,\ D_n=\begin{vmatrix}a_1&a_0&0&\dots&0\\a_3&a_2&a_1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{2n-1}&a_{2n-2}&a_{2n-3}&\dots&a_n\end{vmatrix}\quad(\text{donde } a_m=0 \text{ para } m>n)$$

son positivos *(teorema de Hurwitz)*.

LA SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN NO HOMOGÉNEA de coeficientes constantes siempre puede encontrarse por el método de variación de las constantes o por el método de Cauchy (véanse las págs. 517-518). Otro método es el operacional (véase la pág. 527). Si el segundo miembro de tal ecuación tiene una forma especial (véase más adelante), la solución particular se determina muy fácilmente.

*Segundo miembro de forma especial.* En algunos casos la solución particular de la ecuación no homogénea $P_n(D)y=F(x)$ puede hallarse por procedimientos algebraicos sencillos.

Si $F(x)=Ae^{kx}$ y $P_n(k)\neq 0$, la solución particular es $y=\dfrac{Ae^{kx}}{P_n(k)}$. Si $k$ es una raíz múltiple de orden $m$ de la ecuación característica, es decir, $P_n(k)=P_n'(k)=\ \dots\ =P_n^{(m-1)}(k)=0$ la solución particular es:

$y = \frac{Ax^m e^{kx}}{P_n^{(m)}(k)}$. Mediante el teorema de descomposición (pág. 517) estas fórmulas pueden aplicarse también en el caso en que $F(x) = Ae^{kx} \cos \omega x$ ó $Ae^{kx}$ sen $\omega x$. Las soluciones particulares correspondientes se obtienen como la parte real o imaginaria de la solución de la misma ecuación pero con el segundo miembro: $F(x) = Ae^{kx} (\cos \omega x + i \operatorname{sen} \omega x) = Ae^{(k+i\omega)x}$.

*Ejemplos:* 1) Para la ecuación $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$ la solución particular es: $y = -\frac{xe^{2x}}{2}$, pues $P(D) = D^2 - 6D + 8$, $P(2) = 0$ y $P'(D) = 2D - 6$, $P'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$. 2) Para la ecuación $y'' + y' + y = e^x \operatorname{sen} x$ la solución particular $y_1 = \frac{e^x}{13}(2 \operatorname{sen} x - 3 \cos x)$ se obtiene como la parte imaginaria de la solución

$$y = \frac{e^{(1+i)x}}{(1+i)^2 + (1+i) + 1} = \frac{e^x (\cos x + i \operatorname{sen} x)}{2 + 3i}$$

de la ecuación $(D^2 + D + 1)\, y = e^{(1+i)x}$.

Si $F(x)$ tiene la forma $Q_p(x)\, e^{kx}$, donde $Q_p(x)$ es un polinomio de grado $p$, entonces siempre se puede encontrar una solución particular del mismo tipo, es decir, $y = R(x)\, e^{kx}$. Aquí $R(x)$ es un polinomio de grado $p$, multiplicado por $x^m$, si $k$ es la raíz de $m$-éximo orden de la ecuación característica. Escribiendo esta solución con coeficientes indeterminados en $R(x)$ y exigiendo que ésta verifique a la ecuación dada, se obtienen ecuaciones algebraicas lineales para la determinación de los coeficientes indeterminados*.

*Ejemplo:* $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 6x + 2x \operatorname{sen} x$; las raíces de la ecuación característica son: $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k_4 = -1$. Según el teorema de superposición (véase la pág. 517), se pueden buscar separadamente las soluciones particulares que corresponden a cada sumando del segundo miembro. Haciendo $y_1 = x^2(ax + b)$ y sustituyendo en la ecuación, resulta $12a + 2b + 6ax = 6x$, de donde $a = 1$, $b = -6$. Así mismo, para el segundo sumando hacemos $y_2 = (cx + d) \operatorname{sen} x + (fx + g) \cos x$ lo que da $(2g + 2f - 6c + 2fx) \operatorname{sen} x - (2c + 2d + 6f + 2cx) \cos x = 2x \operatorname{sen} x$, de donde $c = 0$, $d = -3$, $f = 1$, $g = -1$. Finalmente, la solución general es

$$y = c_1 + c_2 x - 6x^2 + x^3 + (c_3 x + c_4)\, e^{-x} - 3 \operatorname{sen} x + (x - 1) \cos x.$$

* En particular, este método es aplicable, si $F(x) = Q_p(x)$ (es decir, si $k = 0$) y si $F(x) = Q_p(x)\, e^{rx} \cos \omega x$ ó $F(x) = Q_p(x) e^{rx} \operatorname{sen} \omega x$, lo cual corresponde a $k = r \pm i\omega$. En el último caso la solución se debe buscar en la forma $y = x^m e^{rx} [M_p(x) \cos \omega x + N_p(x) \operatorname{sen} \omega x]$.

*La ecuación de Euler* de la forma $\sum_{k=0}^{n} a_k(cx+d)^k y^{(k)} = F(x)$ se reduce a una ecuación lineal de coeficientes constantes haciendo la sustitución $cx+d = e^t$.

*Ejemplo:* La ecuación $x^2y''-5xy'+8y = x^2$, después de la sustitución $x = e^t$, se transforma en la estudiada en la pág. 520 $\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+8y = e^{2t}$. Por lo tanto,

$$y = C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-\frac{t}{2}e^{2t} = C_1x^2+C_2x^4-\frac{x^2}{2}\ln x.$$

## 5. *Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes*

**Sistemas normales de primer orden.** Los casos mas simples de sistemas de ecuaciones lineales de primer orden de coeficientes constantes son los llamados sistemas *normales:*

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ \dots\ +a_{1n}y_n, \\ y_2' &= a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ \dots\ +a_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ \dots\ +a_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(N)}$$

Para hallar la solución general de tal sistema es necesario ante todo resolver la *ecuación característica** algebraica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-r & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0.$$

A cada raíz no múltiple $r_i$ de la ecuación característica le corresponde el sistema de soluciones particulares:

$$y_1 = A_1e^{r_ix},\quad y_2 = A_2e^{r_ix},\quad \dots,\quad y_n = A_ne^{r_ix}, \qquad (*)$$

donde los coeficientes $A_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) se determinan del sistema de ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} (a_{11}-r_i)\,A_1+a_{12}A_2+\ \dots\ +a_{1n}A_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}A_1+a_{n2}A_2+\ \dots\ +(a_{nn}-r_i)\,A_n &= 0. \end{aligned}$$

* Sobre los determinantes, véase la pág. 166.

Como en este sistema sólo se pueden hallar las relaciones entre las $A_k$ (véase la pág. 174), el sistema de soluciones particulares, obtenido por el procedimiento indicado para cada $r_i$, contendrá una constante arbitraria. Si todas las raíces de la ecuación característica son distintas, la suma de todas estas soluciones particulares contendrá $n$ constantes arbitrarias independientes y será la solución general del sistema. Si alguna raíz $r_i$ de la ecuación característica es de orden $m$, entonces a tal raíz le corresponde un sistema de soluciones particulares de la forma:

$$y_1 = A_1(x)\, e^{r_i x}, \quad y_2 = A_2(x)\, e^{r_i x}, \quad \ldots, \quad y_n = A_n(x)\, e^{r_i x},$$

donde $A_1(.)$, $\ldots$, $A_n(x)$ son polinomios de grado no mayor que $m-1$ Poniendo estas expresiones de coeficientes indeterminados en el sistema dado y, después de haber simplificado por $e^{r_i x}$, identificando los coeficientes de potencias iguales de $x$ en ambos miembros de las igualdades, resultan unas ecuaciones que permiten expresar todos los coeficientes desconocidos mediante cualesquiera $m$ de ellos, que se conservan arbitrarios. En algunos casos, los grados de los polinomios pueden resultar inferiores a $m-1$. En particular, si el sistema (N) es simétrico (es decir, $a_{ik} = a_{ki}$), es suficiente tomar $A_i(x) = \text{const}$. Si entre las raíces de la ecuación característica hay complejas, los términos correspondientes de la solución general pueden reducirse a la forma real, así como en el caso de una ecuación de coeficientes constantes (véase la pág. 518).

*Ejemplo:* Para el sistema

$$y_1' = 2y_1+2y_2-y_3; \quad y_2' = -2y_1+4y_2+y_3;$$
$$y_3' = -3y_1+8y_2+2y_3$$

la ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} 2-r & 2 & -1 \\ -2 & 4-r & 1 \\ -3 & 8 & 2-r \end{vmatrix} = -(r-6)\,(r-1)^2 = 0.$$

Para la raíz simple $r_1 = 6$, obtenemos:

$$-4A_1+2A_2-A_3 = 0, \quad -2A_1-2A_2+A_3 = 0,$$
$$-3A_1+8A_2-4A_3 = 0,$$

de donde $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $A_3 = C_1$, es decir,

$$y_1 = 0, \quad y_2 = C_1 e^{6x}, \quad y_3 = 2C_1 e^{6x}.$$

Para la raiz múltiple $r_2 = 1$, hacemos

$$y_1 = (P_1 x+Q_1)\, e^x, \quad y_2 = (P_2 x+Q_2)\, e^x,$$
$$y_3 = (P_3 x+Q_3)\, e^x.$$

Sustituyendo en las ecuaciones, obtenemos:

$$P_1x+(P_1+Q_1) = (2P_1+2P_2-P_3)\,x+(2Q_1+2Q_2-Q_3);$$
$$P_2x+(P_2+Q_2) = (-2P_1+4P_2+P_3)\,x+(-2Q_1+4Q_2+Q_3);$$
$$P_3x+(P_3+Q_3) = (-3P_1+8P_2+2P_3)\,x+(-3Q_1+8Q_2+2Q_3),$$

de donde

$$P_1 = 5C_2,\quad P_2 = C_2,\quad P_3 = 7C_2;\quad Q_1 = 5C_3-6C_2,$$
$$Q_2 = C_3,\quad Q_3 = 7C_3-11C_2.$$

La solución general del sistema es:

$$y_1 = (5C_2x+5C_3-6C_2)\,e^x,\quad y_2 = C_1e^{6x}+(C_2x+C_3)\,e^x,$$
$$y_3 = 2C_1e^{6x}+(7C_2x+7C_3-11C_2)\,e^x.$$

Sistemas homogéneas de primer orden. La forma general de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas de primer orden de coeficientes constantes es:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y'_k+\sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si el determinante $|a_{ik}|$* no es igual a 0, este sistema puede reducirse a la forma normal. Sin embargo, la solución puede obtenerse inmediatamente del sistema dado por el mismo método que en el caso de un sistema normal. La ecuación característica toma la forma $|a_{ik}r+b_{ik}| = 0$ y los coeficientes $A_i$ en la solución $(*)$ que corresponde a la raíz simple $r_j$, se determinan en este caso por las ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}r_j+b_{ik})\,A_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En lo restante, el método de resolución es el mismo que en el caso de un sistema normal.

El caso $|a_{ik}| = 0$ requiere un estudio complementario.

*Ejemplo:* $5y'_1+4y_1-2y'_2-y_2 = 0$; $y'_1+8y_1-3y_2 = 0$. La ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} 5r+4 & -2r-1 \\ r+8 & -3 \end{vmatrix} = 2r^2+2r-4 = 0;\quad r_1 = 1,\quad r_2 = -2.$$

Hallamos $A_1$ y $A_2$ para $r_1 = 1$: $9A_1-3A_2 = 0$, $9A_1-3A_2 = 0$, ó $A_2 = 3A_1 = 3C_1$; del mismo modo, para $r_2 = -2$ obtenemos $A_2 = 2A_1 = 2C_2$. La solución general es: $y_1 = C_1e^x+C_2e^{-2x}$, $y_2 = 3C_1e^x+2C_2e^{-2x}$.

* Notación abreviada del determinante con los elementos $a_{ik}$.

SISTEMAS NO HOMOGÉNEOS DE ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN. LA FORMA GENERAL ES:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} y'_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k = F_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

*Teorema de superposición.* Si $y_j^{(1)}$ e $y_j^{(2)}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ son soluciones de sistemas no homogéneos que se diferencian sólo en los segundos miembros, los cuales son iguales a $F_i^{(1)}$ y $F_i^{(2)}$, respectivamente, entonces $y_j = y_j^{(1)} + y_j^{(2)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ es la solución de un sistema igual de ecuaciones pero con los segundos miembros $F_i(x) = F_i^{(1)}(x) + F_i^{(2)}(x)$. De aquí se deduce que para obtener la solución general de un sistema no homogéneo es suficiente agregar a su solución particular la solución general del sistema homogéneo correspondiente. Para buscar una solución particular del sistema no homogéneo puede aplicarse el *método de variación de las constantes:* la solución general del sistema homogéneo se pone en el sistema no homogéneo, reemplazando las constantes arbitrarias $C_1, \ldots, C_n$ por las funciones incógnitas $C_1(x)$, $C_2(x), \ldots, C_n(x)$.

En este caso, en las expresiones para las derivadas de $y'_k$ aparecen términos que contienen derivadas de las nuevas funciones incógnitas $C_k(x)$. Al hacer la sustitución en el sistema dado, en los primeros miembros sólo quedan estos términos agregados, los restantes se simplifican puesto que $y_1, \ldots, y_n$, por hipótesis son una solución del sistema homogéneo. De esta manera, para $C'_k(x)$ resulta un sistema no homogéneo de ecuaciones algebraicas lineales. Resolviéndolo y efectuando $n$ integraciones, obtenemos las funciones $C_1(x), \ldots, C_n(x)$. Poniendo estas funciones en lugar de las constantes en la solución del sistema homogéneo, resulta la solución particular buscada.

*Ejemplo:* $5y'_1 + 4y_1 - 2y'_2 - y_2 = e^{-x}$; $y'_1 + 8y_1 - 3y_2 = 5e^{-x}$. La solución general del sistema homogéneo (véase la pág. 523) es: $y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}$; poniéndola en las ecuaciones dadas y considerando $C_1$ y $C_2$ como funciones de $x$, obtenemos: $5C'_1 e^x + 5C'_2 e^{-2x} - 6C'_1 e^x - 4C'_2 e^{-2x} = e^{-x}$; $C'_1 e^x + C'_2 e^{-2x} = 5e^{-x}$ ó $C'_2 e^{-2x} - C'_1 e^x = e^{-x}$, $C'_1 e^x + C'_2 e^{-2x} = 5e^{-x}$. De aquí $2C'_1 e^x = 4e^{-x}$, $C_1 = -e^{-2x} + \text{const}$; $2C'_2 e^{-2x} = 6e^{-x}$, $C_2 = 3e^x + \text{const}$. Considerando todas las const $= 0$ (puesto que se busca una solución particular), obtenemos $y_1 = 2e^{-x}$, $y_2 = 3e^{-x}$; la solución general es: $y_1 = 2e^{-x} + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$, $y_2 = 3e^{-x} + 3C_1 e^x + 2C_2 e^{-2x}$.

En caso de que los segundos miembros sean de la forma especial $Q_p(x)e^{kx}$, puede aplicarse con éxito el método de los coeficientes indeterminados, así como se hizo en las págs. 520-521 para una ecuación de $n$-ésimo orden.

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN. Los métodos expuestos anteriormente pueden aplicarse a los sistemas de ecuaciones lineales de mayor orden. En particular, para el sistema

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k'' + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}y_k' + \sum_{k=1}^{n} c_{ik}y_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

también se pueden buscar soluciones particulares de la forma $y_i = A_i e^{r_i x}$, donde $r_i$ se determina de la ecuación característica $|a_{ik}r^2 + b_{ik}r + c_{ik}| = 0$, y $Ai$, de las ecuaciones algebraicas homogéneas lineales correspondientes.

## 6. *Método operacional de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias*

TRANSFORMACIÓN DE FUNCIONES. Se llama *imagen* o *transformada* de Carson-Heaviside de una función dada $\varphi(t)$, denominada *función-objeto*,* a la función de la variable compleja $p$, definida por la igualdad

$$f(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt. \qquad (*)$$

En este caso, consideraremos que para $t < 0$, $\varphi(t) = 0$ y para $t > 0$ se verifica la desigualdad $|\varphi(t)| < Me^{at}$, donde $M$ y $a$ son unas constantes positivas. Por los métodos de la teoría de funciones de variable compleja se puede obtener la *fórmula de inversión* que permite determinar unívocamente la función-objeto $\varphi(t)$, una vez conocida su imagen $f(p)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to\infty}\int_{s-ir}^{s+ir} e^{pt}\frac{f(p)}{p}\,dp,$$

donde $s$ se elige de tal modo que todos los puntos singulares de la función integrando estén situados a la izquierda de la recta $\operatorname{Re} p = s$ (sobre la integración de una función de variable compleja véase la pág. 589). La relación $(*)$ se escribirá convencionalmente en la forma $f(p) \risingdotseq \varphi(t)$**. En la tabla de la pág. 529 se dan algunas funciones elementales y sus imágenes.

---

* Empleamos la denominación función-objeto, siguiendo la terminología empleada en "Rey Pastor, Pi Calleja, C. A. Trejo, Análisis matemático, volumen III, 487, Editorial Kapelusz". La traducción literal del vocablo empleado en el texto ruso para la función-objeto es "original, o función original". *(Nota de la Edit.)*

** La función $\dfrac{f(p)}{p}$ se llama *transformada de Laplace* de la función $\varphi(t)$ o, abreviadamente, *L-imagen*.

*Propiedades fundamentales de las imágenes de las funciones.* De la fórmula (✳) se pueden obtener las siguientes:

$$\frac{d\varphi}{dt} \dot{\to} pf(p) - \varphi(0)p; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} \dot{\to} p^2 f(p) - p^2\varphi(0) - p\varphi'(0); \; \ldots;$$

$$\frac{d^n\varphi}{dt^n} \dot{\to} p^n f(p) - p^n\varphi(0) - p^{n-1}\varphi'(0) - \;\ldots\; - p\varphi^{(n-1)}(0);^*$$

$$\int_0^t \varphi(t)\,dt \dot{\to} \frac{1}{p} f(p); \quad \varphi(at) \dot{\to} f\frac{p}{a}, \quad (a = \text{const} > 0).$$

Si $\varphi_1(t) \dot{\to} f_1(p)$ y $\varphi_2(t) \dot{\to} f_2(p)$, se tiene $a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) \dot{\to} a_1 f_1(p) + a_2 f_2(p)$.

*Teorema del desplazamiento.* Si $\varphi(t) \dot{\to} f(p)$, se tiene $e^{-at}\varphi(t) \dot{\to} \frac{p}{p+a} f(p+a)$.

*Teorema de la tardanza.* Si $\varphi(t) \dot{\to} f(p)$, y $\lambda > 0$, se tiene

$$e^{-\lambda p} f(p) \dot{\leftarrow} \begin{cases} \varphi(t-\lambda) & \text{para } t > \lambda, \\ 0 & \text{para } t < \lambda. \end{cases}$$

*Teorema de Borel.* Si $\varphi_1(t) \dot{\to} f_1(p)$, $\varphi_2(t) \dot{\to} f_2(p)$, se tiene

$$\int_0^t \varphi_1(t-\tau)\,\varphi_2(\tau)\,d\tau \dot{\to} \frac{1}{p} f_1(p) f_2(p).$$

*Función impulsiva.* La función-objeto para $f(p) = p$ es la llamada *función-delta* $\delta(t)$, que se anula para $t \neq 0$ y es infinita para $t = 0$, de modo que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$. Esta función se puede definir de otra manera, por ejemplo: $\delta(t) = \lim_{h\to 0} f(t, h)$, donde $f(t, h) = \frac{1}{h}$ para $0 < t < h$ y $f(t, h) = 0$ en el exterior de este intervalo. La función-delta sirve para la representación de impulsos instantáneos (mecánicos, eléctricos, etc.; véase el ejemplo 3 de la pág. 528).

Método operacional. Este método de resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias consiste principalmente en que de la ecuación para la función incógnita se pasa a la ecuación para su imagen (llamada *ecuación auxiliar)*. Esta ecuación ya no es diferencial, sino sencillamente algebraica. Habiéndose obtenido la imagen se halla después mediante

---

* En este caso se supone que $\frac{d^n\varphi}{dt^n}$ satisface a la desigualdad introducida anteriormente para las funciones que tienen imagen.

ésta la función buscada. De esta manera, la dificultad principal en el método operacional no es la resolución de la ecuación, sino el paso de la función a su imagen, y viceversa.

*Ecuaciones lineales de coeficientes constantes*

$$L_n(D)y \equiv (D^n+a_1(D^{n-1}+a_2D^{n-2}+ \dots +a_{n-1}D+a_n)y = F(t)$$

($D$ es el operador de derivación respecto de la variable independiente $t$).

Sea $y(t) \stackrel{\cdot}{\to} \bar{y}(p)$, $F(t) \stackrel{\cdot}{\to} \bar{F}(p)$. Entonces, según las fórmulas de la pág. 528, la ecuación auxiliar es:

$$\begin{aligned} L_n(p)\bar{y} = \bar{F}(p) &+ (p^n y_0 + p^{n-1}y_0' + \dots + py_0^{(n-1)} + \\ &+ a_1(p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y_0' + \dots + py_0^{(n-2)} + \dots + a_{n-2}(p^2y_0 + py_0') + \\ &+ a_{n-1}py_0 \equiv \bar{F}(p) + M(p), \qquad (**) \end{aligned}$$

donde $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ son los valores de la función $y$ y de sus derivadas para $t = 0$. En el caso más simple, en que $y_0 = y_0' = \dots\ y_0^{(n-1)} = 0$ resulta $M(p) \equiv 0$. La solución correspondiente a estas condiciones iniciales se llama *normal*. De $(**)$ se deduce que $\bar{y} = \dfrac{\bar{F}(p)+M(p)}{L_n(p)}$. En muchos casos, para buscar $y$ se puede emplear el método de descomposición en fracciones simples (véase la pág. 145) y las fórmulas (2)-(9) de la tabla de la pág. 529; como estas fórmulas contienen $p$ en el numerador, se descomponen ordinariamente las fracciones con el denominador $pL_n(p)$ y el resultado se multiplica por $p$. En el caso más simple, en que todas las raíces $p_k$ del denominador $L_n(p)$ son distintas y el numerador es un polinomio $P_m(p)$ de grado no mayor que $n$, resulta la ***fórmula de descomposición de Heaviside:***

$$\frac{P_m(p)}{L_n(p)} \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{P_m(0)}{L_n(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{P_m(p)}{pL_n'(p)} \right|_{p=p_k}^{e^{p_k t}}.$$

Si $\dfrac{\bar{F}(p)}{L_n(p)}$ no es una función racional, entonces se descompone en fracciones simples $\dfrac{1}{pL_k(p)}$ y se emplean las fórmulas

$$\frac{\bar{F}(p)}{p-a} \stackrel{\cdot}{\leftarrow} e^{at}\int_0^t F(x)\,e^{-ax}\,dx$$

ó

$$\frac{\bar{F}(p)}{(p-a)^m} \stackrel{\cdot}{\leftarrow} \frac{e^{at}}{(m-1)!}\int_0^t F(x)\,e^{-ax}(t-x)^{m-1}\,dx.$$

Si la ecuación $L_n(p) = 0$ tiene raíces complejas, la aplicación de las últimas fórmulas en los cálculos intermedios puede arrojar valores complejos, sin embargo el resultado final siemnre se puede expresar en forma real.

*Ejemplos:* 1) Hallar la solución normal de la ecuación

$$y''' - y'' - y' + y = t.$$

$$L(p) = (p+1)(p-1)^2, \quad M(p) = 0, \quad \bar{F}(p) = \frac{1}{p};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{p(p+1)(p-1)^2} = \frac{p}{p^2(p+1)(p-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{4}\,\frac{p}{p+1} - \frac{5}{4}\,\frac{p}{p-1} + \frac{1}{2}\,\frac{p}{(p-1)^2}\,.$$

De aquí según las fórmulas (1), (2) y (9) de la pág. 529:

$$y = t + 1 + \frac{1}{4}e^{-t}\left(\frac{1}{2}t - \frac{5}{4}\right)e^t.$$

2) Hallar la solución general de la ecuación $y'' + m^2 y = a$ sen $mt$; $L(p) = p^2 + m^2$;

$$\bar{F}(p) = \frac{amp}{m^2+p^2}, \quad M(p) = p^2 y_0 + p y_0';$$

$$\bar{y} = \frac{amp}{(p^2+m^2)^2} + \frac{p^2 y_0 + p y_0'}{p^2+m^2}\,.$$

Para aplicar las fórmulas de la tabla de la pág. 529 transformemos e primer sumando a la forma $A\,\frac{p(p^2-m^2)}{(p^2+m^2)^2} + B\,\frac{pm}{p^2+m^2}$. Una vez hallados $A$ y $B$ por el método de los coeficientes indeterminados, obtendremos según las fórmulas (3), (4), (8) de la pág. 529:

$$y = \left(y_0 - \frac{a}{2m}t\right)\cos mt + \frac{a + 2my_0'}{2m^2}\,\text{sen}\,mt.$$

3) Hallar la ley del movimiento de un punto material de masa $m$ que actúa bajo la acción de un impulso instantáneo $A$, aplicado en el momento $t = 0$. La coordenada inicial es $x_0 = 0$, la velocidad inicial es $x_0' = 0$.

La ecuación del movimiento es: $m\,\frac{d^2x}{dt^2} = A\,\delta(t)$. La ecuación auxiliar es

$$mp^2\bar{x} = Ap. \text{ De aquí que } \bar{x} = \frac{A}{mp}, \text{ o sea, } x = \frac{At}{m}.$$

*Sistemas de ecuaciones lineales de coeficientes constantes.* Sustituyendo cada ecuación del sistema por su ecuación auxiliar correspondiente, del modo indicado anteriormente para una ecuación, se resuelve el *sistema algebraico* obtenido de ecuaciones lineales con respecto a las imágenes de las funciones incógnitas. Suponemos que el determinante del sistema es distinto de 0*. Para pasar de las imágenes a las funciones-objetos,

* El caso de la anulación del determinante se presenta muy rara vez y exige un estudio complementario.

*Tabla de las imágenes de las funciones según Carson-Heaviside*

| $\varphi(t)\quad (t > 0)$* | $f(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}\varphi(t)\,dt$ |
|---|---|
| 1. $\dfrac{t^n}{\Gamma(n+1)}$ | $\dfrac{1}{p^n}$ |
| 2. $e^{-at}$ | $\dfrac{p}{p+a}$ |
| 3. sen $kt$ | $\dfrac{pk}{p^2+k^2}$ |
| 4. cos $kt$ | $\dfrac{p^2}{p^2+k^2}$ |
| 5. $e^{-at}$ sen $kt$ | $\dfrac{pk}{(p+a)^2+k^2}$ |
| 6. $e^{-at}\cos kt$ | $\dfrac{p(p+a)}{(p+a)^2+k^2}$ |
| 7. $t$ sen $kt$ | $\dfrac{2kp^2}{(p^2+k^2)^2}$ |
| 8. $t\cos kt$ | $\dfrac{p(p^2-k^2)}{(p^2+k^2)^2}$ |
| 9. $e^{-at}\dfrac{t^n}{n!}$ | $\dfrac{p}{(p+a)^{n+1}}$ |
| 10. $-\dfrac{(2t)^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi t}}$ | $\dfrac{\sqrt{p}}{p^n}$ ($n$ — entero, $> 0$) |
| 11. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$ | $\sqrt{p}\,e^{-a\sqrt{p}}\quad (a > 0)$ |
| 12. $\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$ | $pe^{-a\sqrt{p}}$ |
| 13. $1-\Phi\left(\dfrac{a}{\sqrt{2t}}\right)\ (a > 0)$** | $e^{-a\sqrt{p}}$ |
| 14. $J_0(t)$*** | $\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ |
| 15. $I_0(t)$*** | $\dfrac{p}{\sqrt{p^2-1}}$ |
| 16. $\displaystyle\int_t^\infty \dfrac{e^{-x}}{x}\,dx.$ | $\ln(1+p)$ |

* Para $t < 0$ siempre es $\varphi(t) = 0$.
** Véase en la pág. 648 la definición de $\Phi(x)$.
*** Véanse en las págs. 532-533 las funciones de Bessel $J(x)$ e $I(x)$.

se emplea ordinariamente el método de descomposición en fracciones simples, así como se mostró en el caso de una ecuación.

*Ejemplo:* $(5D+4)\ y_1-(2D+1)\ y_2 = e^{-x}$; $(D+8)\ y_1-3y_2 = 5e^{-x}$. Para $x = 0, y_1 = y_{10}, y_2 = y_{20}$. Las ecuaciones auxiliares son:

$$(5p+4)\,\bar{y}_1-(2p+1)\,\bar{y}_2 = \frac{p}{p+1}+5py_{10}-2py_{20};$$

$$(p+80)\,\bar{y}_1-3\bar{y}_2 = \frac{5p}{p+1}+py_{10}\,.$$

Resolviéndolas con respecto a $\bar{y}_1$ e $\bar{y}_2$, obtenemos después de la descomposición en fracciones simples

$$\bar{y}_1 = \frac{2p}{p+1}+(3y_{10}-y_{20}-3)\,\frac{p}{p+2}+(-2y_{10}+y_{20}+1)\,\frac{p}{p-1};$$

$$\bar{y}_2 = \frac{3p}{p+1}+(6y_{10}-2y_{20}-6)\,\frac{p}{p+2}+(-6y_{10}+3y_{20}+3)\,\frac{p}{p-1},$$

de donde

$$y_1 = 2e^{-x}+(3y_{10}-y_{20}-3)\,e^{-2x}+(1-2y_{10}+y_{20})\,e^{x},$$

$$y_2 = 3e^{-x}+(6y_{10}-2y_{20}-6)\,e^{-2x}+(3-6y_{10}+3y_{20})\,e^{x}.$$

La aplicación de los métodos operacionales a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, véase en la pág. 563.

## 7. *Ecuaciones lineales de segundo orden*

MÉTODOS GENERALES. La *ecuación* es: $y''+p(x)\,y'+q(x)\,y = F(x)$. La solución general de la ecuación homogénea $[F(x) = 0]$ es:

$$y = C_1y_1+C_2y_2\,,$$

donde $y_1$ e $y_2$ son dos de sus soluciones particulares linealmente independientes (véase la pág. 516). Si se conoce una solución particular $y_1$, la segunda puede determinarse por la fórmula

$$y_2 = Ay_1\int\frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx, \quad \text{donde } A \text{ es arbitrario,} \qquad (*)$$

lo cual es un corolario de la fórmula de Liouville (véase la pág. 517). En este caso, la solución particular de la ecuación no homogénea puede hallarse según la fórmula

$$y = \frac{1}{A}\int_{x_0}^{x} F(\xi)\,e^{\int p(\xi)\,d\xi}\,[y_2(x)\,y_1(\xi)-y_1(x)\,y_2(\xi)]\,d\xi,$$

donde $y_1$ e $y_2$ son las soluciones particulares, anteriormente indicadas, de la ecuación homogénea con el mismo primer miembro.

Para hallar la solución particular de la ecuación no homogénea puede aplicarse también el método de variación de las constantes arbitrarias (véase la pág. 517).

Si en la ecuación $s(x)\, y''+p(x)\, y'+q(x)\, y=F(x)$ las funciones $s(x)$, $p(x)$, $q(x)$ y $F(x)$ son polinomios, o se desarrollan en series convergentes de potencias de $x-x_0$ en una región, y $s(x_0)\neq 0$, las soluciones de esta ecuación también son desarrollables en series de potencias de $x-x_0$ que convergen en esta misma región. Estas soluciones pueden hallarse por el método de los coeficientes indeterminados, o sea, la solución buscada en forma de serie $y = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+ \ldots$ se pone en la ecuación dada; identificando los coeficientes de potencias iguales de $x-x_0$, se obtienen las ecuaciones para la determinación de $a_0, a_1, a_2, \ldots$.

*Ejemplo:* $y''+xy = 0$. Poniendo $y = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+ \ldots$, $y' = a_1+2a_2x+3a_3x^2+ \ldots$, $y'' = 2a_2+6a_3x+ \ldots$, obtenemos: $2a_2 = 0$, $6a_3+a_0 = 0, \ldots, n(n-1)\, a_n+a_{n-3} = 0, \ldots$

Resolviendo estas ecuaciones, resulta: $a_2 = 0$, $a_3 = -\frac{a_0}{2\cdot 3}$, $a_4 = -\frac{a_1}{3\cdot 4}$, $a_5 = 0, \ldots$, de donde

$$y = a_0\left(1-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}- \ldots\right)+a_1\left(x-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}- \ldots\right).$$

La *ecuación* $x^2y''+xp(x)\, y'+q(x)\, y = 0$. Si las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son desarrollables en series convergentes de potencias de $x$, entonces por el método de los coeficientes indeterminados se pueden hallar las soluciones de la forma:

$$y = x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+ \ldots).$$

Los valores del exponente $r$ se hallan de la *ecuación determinante*

$$r(r-1)+p(0)\, r+q(0) = 0.$$

Si las raíces de esta ecuación son distintas y su diferencia no es un número entero, tendremos dos soluciones independientes de la ecuación considerada. En caso contrario, el método de los coeficientes indeterminados arroja una sola solución.

La fórmula (∗) dada en la pág. 530, puede emplearse para encontrar directamente la segunda solución o para determinar la forma en que puede encontrarse esta solución por el método de los coeficientes indeterminados.

*Ejemplo:* Para la ecuación de Bessel (véase más adelante), siendo $n$ entero, por el método de los coeficientes indeterminados puede obtenerse sólo una solución de la forma $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{n+2k}$ $(a_0 \neq 0)$, la cual coincide con $J_n(x)$ salvo un factor constante. Como aquí $e^{-\int p\,dx} = \frac{1}{x}$, la segunda solución según la fórmula ($*$) será:

$$y_2 = Ay_1 \int \frac{dx}{x \cdot x^{2n} (\Sigma a_k x^{2k})^2} = Ay_1 \int \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}}{x^{2n+1}}\, dx =$$

$$= By_1 \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^{2k}.$$

La obtención sucesiva de los coeficientes $c_k$ y $d_k$ mediante $a_k$ es difícil; pero la última expresión puede emplearse para buscar la solución por el método de los coeficientes indeterminados (es evidente que tal forma tiene el desarrollo en serie de la función $Y_n(x)$, véase más adelante).

ECUACIÓN DE BESSEL es: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$. La ecuación determinante es $r(r-1) + r - n^2 \equiv r^2 - n^2 = 0$, de donde $r = \pm n$. Poniendo $y = x^n(a_0 + a_1 x + \ldots)$ en la ecuación e igualando a cero el coeficiente de $x^{n+k}$, tenemos: $k(2n+k)\; a_k + a_{k-2} = 0$; para $k = 1$, resulta $(2n+1)\, a_1 = 0$. Asignando a $k$ los valores 2, 3, ...; obtenemos: $a_{2m+1} = 0\,(m = 1, 2, \ldots)$; $a_2 = -\frac{a_0}{2(2n+2)}$; $a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)}, \ldots$; $a_0$ es arbitrario.

*Ecuaciones de Bessel.* La serie obtenida con $a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$* determina la función *de Bessel* (o función *cilíndrica)* de $n$-esimo orden y de primera expecie

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left(1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n+2)(2n+4)} - \ldots\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k!\, \Gamma(n+k+1)}.$$

Las gráficas de las funciones $J_0$ y $J_1$ están representadas en la fig. 357.

La solución general de la ecuación de Bessel para $n$ no entero tiene la forma: $y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$, donde $J_{-n}(x)$ se determina por la serie que se obtiene de la anteriormente expuesta para $J_n(x)$, al reemplazar $n$ por $-n$. Para $n$ entero $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. En este caso, en la solución general, $J_{-n}(x)$ debe reemplazarse por la función de Bessel de

* Véase en la pág. 185 la función Γ.

segunda especie $Y_n(x)$ *(función de Weber)* definida por la igualdad

$$Y_n(x) = \lim_{m \to n} \frac{J_m(x) \cos m\pi - J_{-m}(x)}{\text{sen } m\pi}*.$$

Las gráficas de las funciones $Y_0$ e $Y_1$ están representadas en la fig. 358.

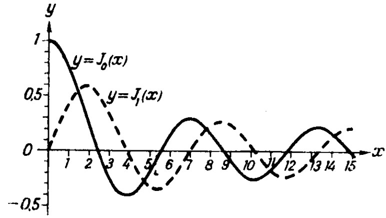



Fig. 357

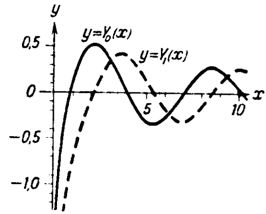



Fig. 358

En algunas aplicaciones aparecen funciones de Bessel de argumento puramente imaginario: en este caso, se consideran ordinariamente los productos $i^{-n}J_n(ix)$ que se representan por $I_n(x)$:

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!\,\Gamma(n+3)} + \dots .$$

Estas funciones son soluciones de la ecuacion diferencial $x^2y''+ + xy' - (x^2+n^2)\,y = 0$.

Como segunda solucion de esta ecuación se toma ordinariamente la *función de Mac-Donald:*

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{\text{sen } n\pi}.$$

Esta expresión tiende a un límite determinado, cuando $n$ tiende a un número entero.

Las gráficas de las funciones $I_0$ e $I_1$ están representadas en la fig. 359 y las de las funciones $K_0$ y $K_1$ en la fig. 360. Véanse en las págs. 82-83 las tablas de las funciones

$$J_0(x), \quad J_1(x), \quad Y_0(x), \quad Y_1(x), \quad I_0(x), \quad I_1(x), \quad K_0(x) \quad \text{y} \quad K_1(x).$$

---

* A veces, esta función se representa por $N_n(x)$ (suele llamarse también función de Neumann). *(Nota de la Edit.)*

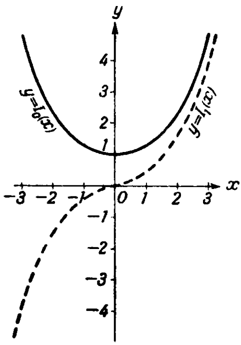



Fig. 359

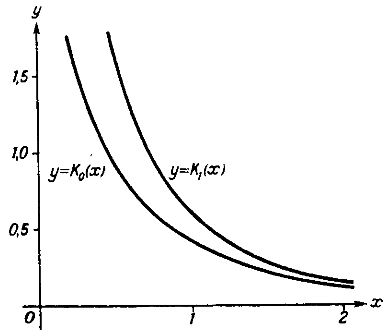



Fig. 360

*Fórmulas fundamentales para las funciones de Bessel:*

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x); \qquad \frac{dJ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} J_n(x)+J_{n-1}(x);$$

[estas mismas fórmulas son válidas también para las funciones $Y_n(x)$];

$$I_{n-1}(x)-I_{n+1}(x) = \frac{2nI_n(x)}{x}; \qquad \frac{dI_n(x)}{dx} = I_{n-1}(x)-\frac{n}{x} I_n(x);$$

$$K_{n+1}(x)-K_{n-1}(x) = \frac{2nK_n(x)}{x}; \qquad \frac{dK_n(x)}{dx} = -K_{n-1}(x)-\frac{n}{x} K_n(x).$$

Para $n$ entero es:

$$J_{2n}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x \operatorname{sen}\varphi)\cos 2n\varphi\, d\varphi;$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x \operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}(2n+1)\varphi\, d\varphi$$

ó en forma compleja

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi\, d\varphi.$$

$J_{n+1/2}(x)$ se expresan mediante funciones elementales; en particular,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen} x; \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.$$

Las expresiones para $J_{n+1/2}(x)$, para cualquier $n$ entero pueden obtenerse por una aplicación sucesiva de las fórmulas recurrentes expuestas anteriormente.

Para valores grandes de $x$ son válidas las siguientes fórmulas asintóticas:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$I_n(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\operatorname{sen}\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right)\right];$$

$$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

donde $O\left(\frac{1}{x}\right)$ representa un infinitésimo del mismo orden que $\frac{1}{x}$ (véase la pág. 327).

El estudio ulterior de las funciones de Bessel, véanse en G. N. Watson, Bessel functions, Cambridge Univ. Press, 1922.

**La ecuación de Legendre** $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$. Para $n$ entero, los *polinomios de Legendre (funciones esféricas)*:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}$$

son soluciones de esta ecuación.

Las gráficas de $P_n(x)$ desde $n = 1$ hasta $n = 7$, véase en la fig. 361. Las tablas de estas funciones véase en la pag. 84.

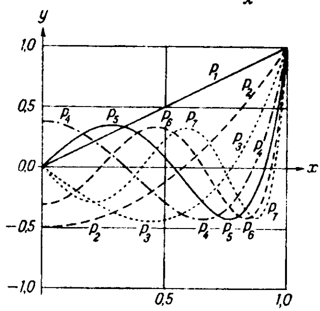


Fig. 361

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

*Propiedades fundamentales de los polinomios de Legendre:*

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x \pm \cos\varphi\sqrt{x^2-1})^n\, d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{(x \pm \cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{n+1}}$$

(el signo en ambas fórmulas es arbitrario):

$$(n+1)\, P_{n+1}(x) = (2n+1)\, xP_n(x) - nP_{n-1}(x);$$

$$(x^2-1)\frac{dP_n(x)}{dx} = n[xP_n(x) - P_{n-1}(x)];$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n, \qquad \int_{-1}^{+1} [P_m(x)]^2\, dx = \frac{1}{2m+1}.$$

Los polinomios de Legendre pueden obtenerse desarrollando en serie de potencias de $z$ la función:

$$(1-2xz+z^2)^{-1/2} = P_0(x) + P_1(x)\, z + P_2(x)\, z^2 + \ldots + (|z| < 1).$$

LA ECUACIÓN HIPERGEOMÉTRICA

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

donde $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son parámetros, abarca un gran número de casos particulares importantes. Por ejemplo, para $\alpha = n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$ y $x = \frac{1-z}{2}$, se transforma en la ecuación de Legendre.

Si $\gamma$ es distindo de cero o de un número entero negativo, entonces la *serie hipergeométrica*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1\cdot 2\ldots(n+1)\cdot\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}x^{n+1} + \ldots, \qquad (1)$$

es una solución particular de la ecuación hipergeométrica la cual es absolutamente convergente para $|x| < 1$*. Si $2-\gamma$ es distinto de cero y distinto de un número negativo entero, entonces

$$y = x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$$

es una solución particular de la ecuación hipergeométrica.

---

* La convergencia de la serie hipergeométrica (1) en $x = 1$ y $x = -1$ depende del número $\delta = \gamma - \alpha - \beta$. Para $x = 1$, la serie (1) es absolutamente convergente si $\delta > 0$ y es divergente si $\delta \leqslant 0$. Para $x = -1$ la serie (1) es absolutamente convergente si $\delta > 0$, es condicionalmente convergente si $-1 < \delta \leqslant 0$ y es divergente si $\delta \leqslant -1$.

En algunos casos, la serie hipergeométrica se reduce a funciones elementales simples; por ejemplo,

$$F(1, \beta, \beta, x) = F(\alpha, 1, \alpha, x) = \frac{1}{1-x},$$

$$F(-n, \beta, \beta, -x) = (1+x)^n, \quad F(1, 1, 2, -x) = \frac{\ln(1+x)}{x},$$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) = \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}.$$

## *8. Problemas de contorno*

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. En muchos casos, especialmente en relación con la resolución de las ecuaciones de la física-matemática (véase la pág. 549), a diferencia de los problemas anteriormente estudiados con condiciones iniciales, se suelen resolver los llamados *problemas de contorno* (o *de frontera)*, en los cuales la solución pedida de la ecuación diferencial debe verificar ciertas condiciones en los extremos de un intervalo dado de variación de la variable independiente. Aquí nos limitaremos al estudio del problema de contorno más importante que sigue.

Hay que hallar la solución $y(x)$ de la *ecuación autoconjugada*

$$[py']' - qy + \lambda\rho y = f, \tag{$*$}$$

que satisface a las condiciones homogéneas

$$A_0 y(a) + B_0 y'(a) = 0, \qquad A_1 y(b) + B_1 y'(b) = 0.$$

Se supone que las funciones $p(x), p'(x), q(x), \rho(x), f(x)$ son continuas en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$* y que $p(x) > p_0 > 0$, $\rho(x) > \rho_0 > 0$. Aquí $\lambda$ es una constante (el parámetro de la ecuación). Si $f = 0$, resulta el problema de contorno *homogéneo* que corresponde al *no homogéneo*.

La ecuación de segundo orden $Ay'' + By' + Cy + \lambda\, Ry = F$ puede reducirse a la forma ($*$), multiplicándola por $\frac{p}{A}$, donde $p = e^{\int \frac{B}{A} dx}$, si $A \neq 0$ en el intervalo considerado. En este caso $q = -\frac{pC}{A}$, $\rho = \frac{pR}{A}$.

El problema de la búsqueda de la solución que satisfaga a las condiciones no homogéneas $A_0 y(a) + B_0 y'(a) = C_0$, $A_1 y(b) + B_1 y'(b) = C_1$, se reduce al problema con condiciones homogéneas, pero con otro segundo miembro $f(x)$, haciendo la sustitución simple de la función

---

* A continuación se supone que el intervalo $(a, b)$ es finito. En el caso de un intervalo infinito, los resultados varían sustancialmente.

incógnita $y = z + u$, donde $u$ es una función dos veces continuamente diferenciable que satisface a unas condiciones de contorno no homogéneas y $z$ es una nueva función incógnita que, evidentemente, satisface a las condiciones de contorno homogéneas correspondientes.

Problema de Sturm-Liouville. Para un valor fijo del parámetro $\lambda$, se verifica lo siguiente: o el problema no homogéneo admite solución para cualquier $f(x)$ y, entonces, esta solución es única y el problema homogéneo correspondiente sólo admite la solución trivial (idénticamente igual a cero), o el problema homogéneo correspondiente admite soluciones no triviales (distintas de cero) y, entonces, el problema no homogéneo no admite solución para segundos miembros cualesquiera y, en el caso de existencia de solución, ésta no se determina unívocamente. Aquellos valores del parámetro $\lambda$, para los cuales se cumple el segundo caso (el problema homogéneo tiene solución no trivial), se llaman *valores propios* del problema del contorno dado, y las soluciones no triviales correspondientes se llaman *funciones propias* que corresponden al valor propio dado. El problema de buscar los valores propios y las funciones propias de la ecuación ($*$) lleva el nombre de *problema de Sturm-Liouville.*

Propiedades fundamentales de las funciones propias y de los valores propios.

1. Los valores propios del problema de contorno forman una sucesión de números reales

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$$

que tiende al infinito. La función propia correspondiente al valor propio $\lambda_n$, tiene exactamente $n$ ceros en el intervalo $a < x < b$.

2. Si $y(x)$ y $z(x)$ son funciones propias que corresponden a un valor propio dado $\lambda$, entonces $y(x) = cz(x)$, donde $c$ es una constante.

3. Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son funciones propias que corresponden a **diferentes** valores propios $\lambda_1$ y $\lambda_2$, se tiene

$$\int_a^b y_1(x)\, y_2(x)\, \rho(x)\, dx = 0,$$

[propiedad de *ortogonalidad respecto del núcleo* $\rho(x)$].

4. Si en la ecuación ($*$) los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ se reemplazan por $\tilde{p}(x) \geqslant p(x)$ y $\tilde{q}(x) \geqslant q(x)$, los valores propios no disminuyen, es decir, $\tilde{\lambda}_n \geqslant \lambda_n$, donde $\tilde{\lambda}_n$ y $\lambda_n$ son los valores propios n-ésimos de la ecuación nueva e inicial, respectivamente. Si se sustituye el coeficiente $\rho(x)$ por $\tilde{\rho}(x) \geqslant \rho(x)$, los valores propios no aumentan, es decir, $\tilde{\lambda}_n \leqslant \lambda_n$. En este caso, el valor n-ésimo propio depende continuamente de los coeficientes de la ecuación, es decir, a variaciones suficientemente pequeñas de los

coeficientes corresponden variaciones arbitrariamente pequeñas del $n$-ésimo valor propio.

5. Al disminuir el intervalo $[a, b]$, los valores propios no decrecen.

DESARROLLO EN SERIE DE FUNCIONES PROPIAS. Para cada $\lambda_n$ elegiremos una función propia $\varphi_n(x)$ tal que $\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 \rho(x)\, dx = 1$ (tal función propia se llama *normalizada)*.

A cada función $g(x)$, definida en el intervalo $[a, b]$, se le puede hacer corresponder su "*serie de Fourier*" con respecto a las funciones propias del problema de contorno dado

$$g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \quad c_n = \int_a^b g(x)\,\varphi_n(x)\,\rho(x)\,dx,$$

siempre que las integrales escritas tengan sentido.

Si la función $g(x)$ admite derivada continua y satisface a las condiciones de contorno del problema considerado, entonces la serie de Fourier de la función $g(x)$ con respecto a las funciones propias del problema de contorno converge hacia $g(x)$ absoluta y uniformemente *(teorema del desarrollo)*.

Véanse en las págs. 554-559 ejemplos de funciones propias y de desarrollos con respecto a ellas.

Siempre se verifica la *igualdad de Parseval*

$$\int_a^b [g(x)]^2 \rho(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2,$$

si la integral del primer miembro tiene sentido. En este caso, la serie de Fourier de la función $g(x)$ con respecto a las funciones propias del problema de contorno converge en media hacia $g(x)$, es decir,

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b \left[ g(x) - \sum_{n=0}^{N} c_n\varphi_n(x) \right]^2 \rho(x)\, dx = 0.$$

CASOS ESPECIALES. Al aplicar el método de Fourier para la resolución de los problemas de la física matemática, frecuentemente surgen problemas de contorno del tipo anteriormente considerado, pero con la diferencia de que en los extremos del intervalo $[a, b]$ pueden haber singularidades de la ecuación diferencial, por ejemplo, se anula la función $p(x)$. En tales puntos singulares se imponen algunas restricciones al comportamiento de la solución, como, por ejemplo, que la solución sea continua, finita o infinita de orden no superior a uno dado. Estas condiciones desempeñan el papel de condición de contorno homogénea (véase la pág. 552, ejemplo 2). Además, en algunos problemas de contorno se suelen considerar condiciones de contorno homogéneas, que relacionan los valores de la función y su derivada en diversos extremos del intervalo. Las más importantes de ellas son las condiciones

$$y(a) = y(b), \quad p(a)\,y'(a) = p(b)\,y'(b),$$

que, en el caso $p(a) = p(b)$, se pueden considerar como condiciones de periodicidad. Para el problema de contorno con tales condiciones subsiste todo lo expuesto anteriormente, a excepcion de la propiedad 2 (véase la pág. 538).

## B. ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

### 9. *Ecuaciones de primer orden*

ECUACIONES LINEALES. Se llama ecuación *lineal* de primer orden en derivadas parciales a la ecuación

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = Y, \tag{1}$$

donde $z$ es una función incógnita de las variables independientes $x_1, \dots, x_n$ y $X_1, \dots, X_n$, $Y$ son unas funciones dadas de $x_1, \dots, x_n$. Si en (1) las funciones $X_1, \dots, X_n$, $Y$ también dependen de $z$, la ecuación se llama *casi-lineal*. Si $Y \equiv 0$:

$$X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \tag{1a}$$

la ecuación se llama *homogénea*.

El problema de la integración de una ecuación lineal homogénea es equivalente al problema de la integración del *sistema característico*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots \frac{dx_n}{X_n}\text{*}. \tag{2}$$

Resulta que toda integral primera del sistema (2) es una solución de la ecuación lineal homogénea (1a) y, recíprocamente, toda solución de la ecuación (1a) es una integral primera del sistema (2) (véase la pág. 515).

---

* Al resolver un sistema de este tipo se puede tomar por variable independiente cualquiera de las $x_k$, para la cual $X_k \neq 0$ $\left(\text{el sistema toma la forma } \frac{dx_j}{dx_k} = \frac{X_j}{X_k},\ j = 1, \dots, n\right)$ Sin embargo, es más cómodo, conservando la simetría, introducir una nueva variable independiente, el parámetro $t$, haciendo $\frac{dx_j}{X_j} = dt$ ó $\frac{dx_j}{dt} = X_j$.

En este caso, si n – 1 de integrales primeras

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

son independientes (véase la pág. 516), entonces

$$z = \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}),$$

donde $\Phi$ es una función arbitraria de $(n-1)$ argumentos, es la solución general de la ecuación lineal homogénea (1a).

La solución $z$ de la ecuación lineal no homogénea y de la ecuación casi-lineal (1) se busca en forma implícita $V(x_1, \ldots, x_n, z) = C$. Resulta que, en este caso, la función $V$ es una solución de la ecuación lineal homogénea con $n+1$ variables independientes

$$X_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + Y \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

cuyo sistema característico es

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dz}{Y}, \tag{2'}$$

llamado *sistema característico de la ecuación inicial* (1).

*Representación geométrica.* En el caso de una ecuación con dos variables independientes $x_1 = x$ y $x_2 = y$

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z), \tag{$1_1$}$$

la solución $z = f(x, y)$ se representa por una superficie en el espacio $xyz$, llamada ***superficie integral de esta ecuación***. La ecuación ($1_1$) muestra que en cada punto de la superflcie integral $z = f(x, y)$ el vector normal $\left\{\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1\right\}$ es ortogonal al vector dado en este punto $\{P, Q, R\}$. El sistema (2′) toma en este caso la forma

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}, \tag{$2_1$}$$

de donde se deduce (véase la pág. 614) que las curvas integrales de este sistema, llamadas *características*, son tangentes a los vectores $\{P, Q, R\}$. Por esto, la característica que tiene un punto común con la superficie integral $z = f(x, y)$ pertenece totalmente a esta superficie. Por cada punto del espacio pasa una curva integral del sistema característico (bajo la condición de que se cumpla el teorema de la pág. 513) y las superficies integrales están formadas por características.

PROBLEMA DE CAUCHY. Sean dadas $n$ funciones de $(n-1)$ variables independientes $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \ldots, \\ x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}). \end{array}\right\} \quad (*)$$

Se llama *problema de Cauchy* para la ecuacion (1) al problema de la búsqueda de una solución

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

tal que al hacer la sustitución ($*$) se rêduce a una función dada $\psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})$;

$$\varphi[x_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \quad x_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}), \ldots, x_n(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1})] = \\ = \psi(t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}).$$

En el caso de dos variables independientes, este problema se reduce a buscar la superficie integral que pase por una curva dada. Si la curva tiene tangente que gira continuamente y en ningún punto es tangente a la característica, entonces en un entorno de esta curva el problema de Cauchy siempre admite solución y ésta es única. La superficie integral se forma por el conjunto de todas las características que cortan a la curva dada.

*Ejemplos:* 1) $(mz-ny)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(nx-lz)\dfrac{\partial z}{\partial y} = ly-mx$ ($l$, $m$, $n$ son constantes). Las ecuaciónes de las características son: $\dfrac{dx}{mz-ny} = \dfrac{dy}{nx-lz} = \dfrac{dz}{ly-mx}$. Las integrales de este sistema son: $lx+ +my+nz = C_1$, $x^2+y^2+z^2 = C_2$. Las características son circunferencias con los centros situados en la recta que pasa por el origen de coordenadas y cuyos cosenos directores son proporcionales a $l$, $m$, $n$. Las superficies integrales son superficies de revolución que tienen esta recta por eje de revolución.

2) Hallar la superficie integral de la ecuación $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$ que pasa por la curva $x=0$, $z=\varphi(y)$. Las ecuaciones de las características son: $\dfrac{dx}{1} = \dfrac{dy}{1} = \dfrac{dz}{z}$. Las características que pasan por el punto $(x_0, y_0, z_0)$ son: $y = x-x_0+y_0$, $z = z_0e^{x-x_0}$. Haciendo $x_0 = 0$, $z_0 = \varphi(y_0)$, obtenemos $y = x+y_0$, $z = e^x\,\varphi(y_0)$, que es la expresión paramétrica de la superficie integral pedida. Eliminando $y_0$, resulta $z = e^x\varphi(y-x)$.

ECUACIONES NO LINEALES. La forma general de las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden es:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1} \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{3}$$

La solución de la ecuación (3)

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n),$$

que depende de los $n$ parámetros $a_1, \ldots, a_n$ y para la cual el jacobiano (véase la pág. 338) $\frac{\partial(\varphi'_{x_1}, \ldots, \varphi'_{x_n})}{\partial(a_1, \ldots, a_n)}$ es distinto de cero para los valores considerados $x_1, \ldots, x_n, z$ se llama *integral completa* de la ecuación (3).

La integración de la ecuación (3) se reduce a la integración del *sistema característico* de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1P_1 + \ldots + p_nP_n} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1Z} = \ldots = \frac{-dp_n}{X_n + p_nZ}, \tag{4}$$

donde

$$Z = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad X_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad P_i = \frac{\partial F}{\partial p_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Las soluciones del sistema característico (4) que verifican la condición complementaria $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = 0$ se llaman *planos característicos.*

Sistemas canónicos. Frecuentemente es más cómodo considerar una ecuación que no contenga explícitamente la función incógnita $z$. El paso a tal ecuación se obtiene mediante la introducción de una variable independiente complementaria $x_{n+1} = z$ y una función incógnita $V(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, de modo que mediante la ecuación $V(x_1, \ldots, x_n, z) = C$ se determine $z$ como función implícita de $x_1, \ldots, x_n$. En este caso, en lugar de $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ en (3) pondremos $\frac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si, además, se resuelve la ecuación diferencial en la derivada parcial de la función $V$ con respecto a cualquier variable independiente, la que designaremos por $x$, y se cambia la numeración de las variables independientes restantes respectivamente, la ecuación (3) toma la forma:

$$\left.\begin{aligned} p + H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n) = 0, \\ p = \frac{\partial V}{\partial x}, \ p_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

El sistema de ecuaciones diferenciales características se convierte en el siguiente:

$$\frac{dx_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

y

$$\frac{dV}{dx} = p_1\frac{\partial H}{\partial p_1} + \ldots + p_n\frac{\partial H}{\partial p_n} - H, \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) forman ellas mismas un sistema determinado de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias. Un sistema tal, que corresponde a cualquier función $H(x_1, \ldots, x_n, x, p_1, \ldots, p_n)$ de $2n+1$ variables, se llama *sistema canónico* de ecuaciones diferenciales. Muchos problemas de la mecánica y física teórica se reducen a sistemas de este tipo. El conocimiento de la integral completa

$$V = \varphi(x_1, \ldots, x_n, x, a_1, \ldots, a_n) + a$$

de la ecuación (3′) da la posibilidad de hallar la solución general del sistema canónico (5), puesto que las ecuaciones $\frac{\partial\varphi}{\partial a_i} = b_i$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = p$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con $2n$ parámetros arbitrarios $a_i$ y $b_i$ determinan una solución $2n$-paramétrica del sistema canónico (5).

Ecuación de Clairaut. El problema de la búsqueda de la integral completa resulta particularmente sencillo cuando la ecuación tiene la forma

$$z = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \text{ (ecuación de Clairaut).}$$

La integral completa de esta ecuación es.

$$z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son parámetros arbitrarios.

*Ejemplo:* Problema de dos cuerpos. El movimiento de dos puntos materiales que se atraen según la ley de Newton se efectúa constantemente en un plano. Por esto, eligiendo la posición de uno de los puntos como origen de coordenadas, se pueden escribir las ecuaciones del movimiento en la forma siguiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial y}; \qquad V = \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Introduciendo la *función de Hamilton*

$$H = \frac{1}{2}(p^2+q^2) - \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

este sistema se convierte en el sistema de ecuaciones diferenciales canónicas:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad (*)$$

para

$$x, y, p = \frac{dx}{dt}, \quad q = \frac{dy}{dt}.$$

La ecuación en derivadas parciales correspondiente es:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{k^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Pasando a coordenadas polares $\rho$, $\varphi$, se observa fácilmente que esta ecuación posee la integral completa:

$$z = -at - b\varphi + c - \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{2a + \frac{2k^2}{r} - \frac{b^2}{r^2}}\, dr,$$

dependiente de los parámetros $a$, $b$, $c$. Por esto, de las ecuaciones $\frac{\partial z}{\partial a} = -t_0$, $\frac{\partial z}{\partial b} = -\varphi_0$ obtenemos la solución general del sistema ($*$).

CASO DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $p_1 = p$, $p_2 = q$). En este caso, la franja característica se puede interpretar geométricamente como una curva, en cada uno de cuyos puntos $(x, y, z)$ está dado un plano $p(\varepsilon - x) + q(\eta - y) = \zeta - z$ tangente a la curva. La búsqueda de la superficie integral de la ecuación

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

que pasa por la curva dada (problema de Cauchy) se reduce a hacer pasar por los puntos de la curva inicial aquellas franjas características cuyo plano correspondiente es tangente a esta curva. Los valores $p$ y $q$ en los puntos de la curva inicial se determinan en este caso de las relaciones $F(x, y, z, p, q) = 0$ y $p\,dx + q\,dy = dz$, las cuales, en el caso de una ecuación no lineal, tienen en general varias soluciones. Por esto, al plantear el problema de Cauchy para la obtención de una solución determinada, se debe separar a lo largo de la curva inicial un par de funciones continuas $p$, $q$ que verifiquen las dos relaciones indicadas.

*Ejemplo:* Para la ecuación $pq = 1$ y la curva inicial $y = x^3$, $z = 2x^2$ se puede hacer a lo largo de la curva $p = x$, $q = \frac{1}{x}$. El sistema característico tiene la forma $\frac{dx}{dt} = q$, $\frac{dy}{dt} = p$, $\frac{dz}{dt} = 2pq$, $\frac{dp}{dt} = 0$, $\frac{dq}{dt} = 0$. La franja característica con las condiciones iniciales $x_0$, $y_0$, $z_0$, $p_0$, $q_0$ para $t = 0$ es: $x = x_0 + q_0 t$, $y = y_0 + p_0 t$, $z = 2p_0 q_0 t + z_0$, $p = p_0$, $q = q_0$. En el caso $p_0 = x_0$, $q_0 = \frac{1}{x_0}$ la curva perteneciente a la franja característica que pasa por el punto $(x_0, y_0, z_0)$ de la curva inicial es:

$$x = x_0 + \frac{t}{x_0}, \quad y = x_0^3 + t x_0, \quad z = 2t + 2x_0^2.$$

Eliminando los parámetros $x_0$, $t$ obtenemos $z^2 = 4xy$. Si, a lo largo de la curva inicial, se atribuyen a $p$ y $q$ otros valores admisibles, por ejemplo, $p = 3x$, $q = \frac{1}{3x}$, resulta otra solución.

La superficie que envuelve la familia de superficies integrales de un parámetro también es una superficie integral. Teniendo en cuenta esto, se puede resolver el problema de Cauchy mediante la integral completa, separando una familia monoparamétrica de soluciones que sean tangentes en los puntos de la curva inicial a los planos dados y hallando la envolvente de esta familia.

*Ejemplo:* Supongamos que para la ecuación $z-px-qy+pq = 0$ (ecuación de Clairaut) se pide encontrar la superficie integral que pasa por la curva $y = x$, $z = x^2$. La ecuación considerada tiene la integral completa $z = ax+by-ab$. Como a lo largo de la curva inicial se debe hacer $p = q = x$, la condición $a = b$ separa la familia monoparamétrica necesaria. Hallando la envolvente, obtenemos $z = \frac{1}{4}(x+y)^2$.

ECUACIONES EN DIFERENCIALES TOTALES. Una ecuación en diferenciales totales tiene la forma

$$dz = f_1\,dx_1+f_2\,dx_2+\ \ldots\ +f_n\,dx_n, \tag{7}$$

donde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son unas funciones dadas de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. La ecuación (7) se llama *completamente integrable*, si existe una relación única entre $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, que contenga una constante arbitraria, cuya consecuencia sea la ecuación (7). En este caso, existe una solución única $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ de la ecuación (7) que toma un valor dado $z^0$ para los valores iniciales $x_1^0, \ldots, x_n^0$ de las variables independientes. Para $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, y esto significa que por cada punto del espacio pasa una y sólo una superficie integral. La ecuación (7) es completamente integrable si, y sólo si, se cumplen idénticamente con respecto a todas las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$ las siguientes $\frac{n(n-1)}{2}$ relaciones:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+f_k\frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}+f_i\frac{\partial f_k}{\partial z} \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Si la ecuación (7) viene dada en forma simétrica $f_1\,dx_1+\ \ldots\ +f_n\,dx_n = 0$, entonces las condiciones de integrabilidad completa son las identidades

$$f_i\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}-\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)+f_j\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}-\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)+f_k\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = 0$$

para todas las combinaciones de los subíndices $i, j, k$.

En el caso de integrabilidad completa, la búsqueda de la solución de la ecuación (7) se reduce a la integración de una ecuación ordinaria con $(n-1)$ parámetros*.

---

* Detalladamente, véase en E. Goursat: Cours d'analyse mathématique, Vol. II. 7ª ed. 1949. Gouthier-Villars, Paris.

## *10. Funciones lineales de segundo orden*

LA FORMA GENERAL de una ecuación lineal de segundo orden, en el caso de las dos variables independientes $x$, $y$, y una función incógnita $u$, es:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=f, \tag{1}$$

donde los coeficientes $A$, $B$, $C$, $a$, $b$, $c$, y el término independiente $f$, son unas funciones dadas de $x$ e $y$.

CLASIFICACIÓN. El carácter de las soluciones de esta ecuación se determina en muchos casos por el signo del *discriminante* $\delta = AC-B^2$. La ecuación (1) se llama de *tipo hiperbólico* en una región, si en ella $\delta<0$; se dice que es de *tipo parabólico*, si en la región considerada $\delta=0$, y que es de *tipo elíptico*, si en la región considerada $\delta>0$. Si $\delta$ cambia de signo en la región considerada, la ecuación (1) se llama de *tipo mixto*. El signo del discriminante $\delta$ se conserva invariable para cualquier transformación de las variables independientes (la introducción de un nuevo sistema de coordenadas en el plano $Oxy$). Por esto, el tipo de ecuación es invariante con respecto a la elección de las variables independientes.

Se llaman *características* de la ecuación (1) a las curvas integrales de la ecuación diferencial

$$A\,dy^2-2B\,dx\,dy+C\,dx^2=0 \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{B\pm\sqrt{-\delta}}{A}.$$

La ecuación de tipo hiperbólico tiene dos familias de características reales, la de tipo parabólico tiene una familia de características reales, la de tipo elíptico no tiene características reales. La ecuación que se obtiene de (1) al introducir en esta última nuevas variables independientes tiene las mismas características que la ecuación (1). Si la familia de las características coincide con una de las familias de las líneas de coordenadas, entonces en la ecuación (1) falta el término que contiene la segunda derivada de la función incógnita con respecto a la variable independiente correspondiente. En el caso parabólico falta además el término que contiene la derivada mixta.

FORMA CANÓNICA. Introduciendo nuevas variables independientes $\xi=\varphi(x, y)$, $\eta=\psi(x, y)$, la ecuación (1) puede reducirse a una de las tres *formas canónicas:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\ldots=0 \quad (\delta<0,\ \text{tipo hiperbólico}), \tag{a}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\ldots=0 \quad (\delta=0,\ \text{tipo parabólico}), \tag{b}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\ldots=0 \quad (\delta>0,\ \text{tipo elíptico}), \tag{c}$$

donde los puntos representan los términos que no contienen derivadas parciales de segundo orden de la función incógnita.

Si en el caso hiperbólico se eligen por familias de líneas de coordenadas del nuevo sistema de coordenadas las dos familias de características, es decir, se hace $\xi_1 = \varphi(x, y)$, $\eta_1 = \psi(x, y)$, donde $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$ son las ecuaciones de las familias de características, la ecuación (1) toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \, \partial \eta_1} + \ldots = 0.$$

Esta también se llama forma canónica de la ecuación de tipo hiperbólico. De ella, mediante la sustitución $\xi = \xi_1 + \eta_1$, $\eta = \xi_1 - \eta_1$ se puede pasar a la forma canónica (a). Para reducir una ecuación de tipo parabólico a la forma canónica (b), es suficiente elegir por familia $\xi = \text{const}$ (la única familia de características) que hay en este caso, tomando por $\eta$ cualquier función de $x$, $y$ que sea independiente de $\xi$. Si los coeficientes $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ son funciones analíticas (véase la pág. 581) la ecuación de las características determina, en el caso elíptico, dos familias de curvas complejas conjugadas $\varphi(x, y) = \text{const}$, $\psi(x, y) = \text{const}$. Haciendo $\xi = \varphi + \psi$, $\eta = i(\varphi - \psi)$, la ecuación se reduce a la forma canónica (c).

Todo lo expuesto anteriormente con respecto a la clasificación y a la reducción a la forma canónica es aplicable a las ecuaciones del tipo más general:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

EL NÚMERO DE VARIABLES INDEPENDIENTES ES MAYOR QUE DOS. Una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales de segundo orden con un número de variables independientes mayor que dos, tiene la forma:

$$\sum_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + \ldots = 0, \tag{2}$$

donde $a_{ik}$ son unas funciones dadas de las variables independientes y los puntos representan los términos que no contienen derivadas de segundo orden de la función incógnita.

En general, la ecuación (2) no se puede reducir mediante transformaciones de las variables independientes a formas normales simples. Sin embargo, para ésta también se puede hacer una clasificación semejante a la anterior que tiene gran importancia.

ECUACIONES DE COEFICIENTES CONSTANTES. Si los coeficientes $a_{ik}$ de la ecuación (2) son constantes, ésta se puede reducir, mediante una sustitución lineal homogénea de las variables independientes, a la forma normal siguiente:

$$\sum_i x_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \ldots = 0, \qquad (2')$$

donde todos los coeficientes $x_i$ son iguales a $\pm 1$ ó a 0.

Si todos los coeficientes $x_i$ son distintos de cero y tienen un mismo signo, la ecuación se llama *elíptica*. Si todos los coeficientes $x_i$ son distintos de cero y el signo de uno de ellos es distinto del signo de los restantes, la ecuación se llama *hiperbólica**. Si uno de los coeficientes $x_i$ es igual a cero y los restantes son distintos de cero y tienen signos iguales, la ecuación se llama *parabólica*.

Si en la ecuación lineal no sólo son constantes los coeficientes de las derivadas superiores de la función incógnita, sino también los coeficientes de las derivadas primeras, entonces, reemplazando en la ecuación la función incógnita, se pueden eliminar los términos con las derivadas primeras con respecto a aquellas variables para las cuales $x_i \neq 0$. Para esto es suficiente hacer $u = ve^{-\frac{1}{2}\sum \frac{b_k}{x_k} x_k}$ donde $b_k$ es el coeficiente de $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ en (2′) y la sumación se extiende a todos los $x_k \neq 0$. Por lo tanto, todas las ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes se reducen en el caso elíptico al tipo $\Delta v + kv = g$, y en el caso hiperbólico, al tipo $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v + kv = g$, donde $\Delta$ es operador de Laplace:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}.$$

**Planteamiento de problemas.** El estudio de diferentes fenómenos físicos en medios continuos (mecánicos, eléctricos, caloríficos, etc.) da lugar a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, las cuales se llaman por esta razón *ecuaciones de la física matemática*. Resulta que las ecuaciones más importantes y que más frecuentemente aparecen, son lineales de segundo orden. Para la resolución de un problema físico que se reduce a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, se exige ordinariamente la búsqueda de una solución de la ecuación diferencial que verifique algunas *condiciones* complementarias, llamadas *condiciones de contorno* (o *de frontera*) y *condiciones iniciales*. El conjunto de estas condiciones tiene que determinar unívocamente la solución de la ecuación. Además, y esto no es menos importante, la solución debe ser estable con respecto a alteraciones relativamente pequeñas de las condiciones iniciales y de contorno, es decir, para cambios suficiente-

* Si hay no menos de dos coeficientes de cada signo, la ecuación se llama *ultrahiperbólica*.

mente pequeños de las condiciones la variación de la solución tiene que ser arbitrariamente pequeña. En este caso se dice que el problema está planteado *correctamente*. Sólo cuando se cumple esta condición, puede considerarse que el problema matemático de la solución de la ecuación diferencial es aplicable para la descripción de los fenómenos reales. Resulta que para las ecuaciones de tipo hiperbólico, a las cuales, en particular, se reduce el estudio de las oscilaciones de los medios continuos, «el problema de Cauchy» es correcto, o sea, el problema en el cual en una «variedad» inicial (en una curva, en una superficie) se dan los valores de la función pedida y su derivada en una dirección no tangente (en particular, en dirección de la normal), mientras que para las ecuaciones de tipo elíptico, a las cuales se reduce el estudio de los procesos estacionarios y de equilibrio de los medios continuos, el correcto es "el problema de contorno o de frontera" [o sea, el problema en el cual se dan los valores de la función incógnita (o de su derivada normal) en la frontera de la región considerada de las variables independientes; además, si la región considerada no es acotada, entonces se impone comúnmente alguna condición al comportamiento de la función pedida "en el infinito", es decir, al comportamiento de la función para un crecimiento ilimitado de los argumentos].

CONDICIONES NO HOMOGÉNEAS Y ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS. La resolución de la ecuación lineal (homogénea o no homogénea) con condiciones iniciales o de contorno *no homogéneas* (véase la pág. 537) puede reducirse a la resolución de una ecuación que sólo difiere de la dada en el término independiente (de la función incógnita), pero con condiciones *homogéneas*. Para esto, es suficiente reemplazar la función pedida por la diferencia entre ella misma y una función arbitraria (dos veces continuamente diferenciable) que verifique a las condiciones dadas.

La solución de la ecuación lineal **no homogénea** con condiciones iniciales o de contorno no homogéneas, es la suma de la solución de esta misma ecuación con condiciones nulas y de la solución de la ecuación homogénea correspondiente con las condiciones dadas.

Finalmente, la resolución de la ecuación lineal no homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L[u] = g(x, t)^*$$

con las condiciones iniciales homogéneas $u\Big|_{t=0} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ se reduce de la siguiente manera a la resolución del problema de Cauchy

* Aquí $x$ es el símbolo de las $n$ variables del espacio $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $L[u]$ es una expresión diferencial lineal que puede contener la derivada $\partial u/\partial t$, pero que no contiene derivadas de orden superior con respecto a $t$.

para la ecuación homogénea correspondiente

$$u = \int_0^t \varphi(x, t; \tau)\, d\tau,$$

donde $\varphi(x, t; \tau)$ es la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - L[u] = 0$$

con las condiciones $u\Big|_{t=\tau} = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=\tau} = g(x, \tau)$.

Ecuaciones de uso más frecuente. 1) *Ecuación de la onda.* Es la ecuación de la propagación de las oscilaciones en un medio homogéneo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\, \Delta u = Q(x, t),$$

donde $Q(x, t)$ es el segundo miembro ($x$ es el símbolo de las variables del espacio $x_1, \ldots, x_n$), el cual es igual a cero si no hay fuerzas perturbadoras. Para la ecuación homogénea ($Q(x, t) = 0$) la solución que verifica a las condiciones iniciales $u\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x)$, viene dada por las fórmulas siguientes:

para $n = 3$

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{4\pi a^2}\left[\iint\limits_{S_{at}} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{t}\, d\sigma\right],$$

donde la integración se extiende a la esfera $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 + (\alpha_3 - x_3)^2 = a^2t^2$ *(fórmula de Kirchhoff)*;

para $n = 2$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a} = \frac{1}{2\pi a}\left[\iint\limits_{K_{at}} \frac{\psi(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1\, d\alpha_2}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{K_{at}} \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_2)\, d\alpha_1\, d\alpha_2}{\sqrt{a^2t^2 - (\alpha_1 - x_1)^2 - (\alpha_2 - x_2)^2}}\right],$$

donde la integración se extiende al círculo $(\alpha_1 - x_1)^2 + (\alpha_2 - x_2)^2 \leqslant a^2t^2$ *(fórmula de Poisson)*;

para $n = 1$

$$u(x_1, t) = \frac{\varphi(x_1 + at) + \varphi(x_1 - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x_1 - at}^{x_1 + at} \psi(\alpha)\, d\alpha,$$

*(fórmula de D'Alembert).*

Si la ecuación inicial es no homogénea, se debe agregar respectivamente a los segundos miembros de estas fórmulas:

para $n = 3$, el llamado *potencial de retardo*

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{r\leq at}\frac{Q\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t-\frac{r}{a}\right)}{r}\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3$$

donde $r = \sqrt{(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2+(\xi_3-x_3)^2}$;

para $n = 2$

$$\frac{1}{2\pi a}\iiint\limits_{K}\frac{Q(\xi_1, \xi_2, \tau)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}},$$

donde $K$ es la región del espacio $\xi_1$, $\xi_2$, $\tau$, definida por las desigualdades $0\leq\tau\leq t$, $(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2\leq a^2(t-\tau)^2$;

para $n = 1$

$$\frac{1}{2a}\iint\limits_{T} Q(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau,$$

donde $T$ es el triángulo $0\leq\tau\leq t$, $|\xi-x_1|\leq a\,|t-\tau|$.

De las fórmulas expuestas se deduce que $a$ es la velocidad de propagación de la perturbación.

2) *La ecuación de propagación del calor* en un medio homogéneo es:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\,\Delta u = Q(x, t)^*.$$

Aquí $Q(x, t)$, o sea, el segundo miembro es igual a cero si no hay manantiales y sumideros de calor. Ordinariamente para esta ecuación se plantea el siguiente *problema de Cauchy:* hallar para $t > 0$ una solución acotada, si $u\big|_{t=0} = f(x)$. La condición de acotación garantiza la unicidad de la solución. Para la ecuación homogénea se tiene:

$$u(x_1, \ldots, x_n, t) =$$

$$= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, e^{-\frac{(x_1-\alpha_1)^2+\ldots+(x_n-\alpha_n)^2}{4a^2t}}\times$$

$$\times\,d\alpha_1\ldots d\alpha_n.$$

* $\Delta$ es el operador de Laplace para $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (véase la pág. 549).

Si $Q(x, t) \neq 0$, al segundo miembro de esta ingualdad hay que agregar

$$\int_0^t \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{[2a\sqrt{\pi(t-\tau)}]^n} e^{-\frac{(x_1-\alpha_1)^2 + \ldots + (x_n-\alpha_n)^2}{4a^2 t}} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n \right] d\tau .$$

Resulta que el problema de la búsqueda de $u(x, t)$ para $t < 0$, si se han dado los valores $u(x, 0)$, no está planteado correctamente.

3) *Ecuación de la teoría del potencial*

$$\Delta u = -4\pi\rho^* ,$$

donde $\rho$ es una función dada del punto *(ecuación de Poisson)*. Si $\rho \equiv 0$, resulta la *ecuación de Laplace* $\Delta u = 0$ (véanse las págs. 630-631).

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN. *Separación de variables.* Para muchas ecuaciones diferenciales de la física matemática, mediante sustituciones especiales, se puede obtener, si no todo el conjunto de soluciones, por lo menos una familia de soluciones dependiente de parámetros arbitrarios. En las ecuaciones diferenciales lineales y, sobre todo, en las de segundo orden, se puede emplear frecuentemente la sustitución $u(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \ldots \varphi_n(x_n)$. Para la determinación de cada una de estas funciones $\varphi_k(x_k)$, suponiendo posible la separación de las variables después de la sustitución de tal producto en la ecuación inicial (véanse los ejemplos), se obtiene una ecuación diferencial lineal ordinaria. En este caso, para que la solución de la ecuación inicial verifique a las condiciones de contorno homogéneas pedidas, puede ser suficiente que algunas de las funciones $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$, $\ldots$, $\varphi_n(x_n)$ verifiquen a ciertas condiciones de contorno.

De las soluciones obtenidas mediante los procesos de sumación, diferenciación e integración pueden obtenerse nuevas soluciones. En este caso, los parámetros deben elegirse de tal modo que se cumplan las condiciones iniciales y de frontera restantes (véanse los ejemplos). Se debe tener presente que la solución obtenida por este procedimiento, en forma de una serie o de una integral impropia, sólo es "una solución formal" y, después de su obtención, es necesario comprobar si tiene sentido o no (es decir, si la serie es convergente o no lo es, etc.) y si satisface a la ecuación dada y a las condiciones de contorno o no (es decir, si es admisible o no derivarla término a término, pasar al límite al aproximarse a la frontera, etc.).

En todos los ejemplos siguientes, las series y las integrales impropias son convergentes si se imponen ciertas restricciones a las funciones que

---

* $\Delta$ es el operador de Laplace para $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (véase la pág. 549).

figuran en las condiciones iniciales (por ejemplo, que la derivada segunda en los ejemplos 1 y 2 sea continua).

*Ejemplos:* 1) Hallar la solución de la ecuación $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que satisface a las condiciones iniciales $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$ y a las condiciones de contorno $u\Big|_{x=0} = 0$, $u\Big|_{x=l} = 0$ *(vibración de una cuerda fija)*.

Busquemos una solución de la forma $u = X(x)\,T(t)$. Sustituyendo en la ecuación, obtenemos $\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}$ (las variables están separadas). Como el primer miembro no depende de $x$ y el segundo no depende de $t$, cada uno de ellos es una cantidad constante. Designándola por $-\lambda^2$*, obtendremos $X'' + \lambda^2 X = 0$, $T'' + a^2\lambda^2 T = 0$. Además, de las condiciones de contorno, se tiene que $X(0) = X(l) = 0$. De esta manera, resulta que $X(x)$ es una función propia del problema de contorno de Sturm-Liouville y que $\lambda^2$, es un valor propio de este problema (véase la pág. 538). De la ecuación para $X$ y de las condiciones de contorno, hallamos $X(x) = C \operatorname{sen} \lambda x$, siendo $\operatorname{sen} \lambda l = 0$, es decir, $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Integrando ahora la ecuación $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$, tendremos una solución particular de la ecuación inicial en la forma

$$u_n = \left(a_n \cos \frac{na\pi}{l} t + b_n \operatorname{sen} \frac{na\pi}{l} t\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{l} x.$$

Exigiendo que $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sea igual a $f(x)$ y que $\frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sea igual a $\varphi(x)$ para $t = 0$, y empleando las fórmulas de desarrollo en serie de Fourier según los senos, tendremos (véase la pág. 632):

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx, \quad b_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}\, dx.$$

2) El estudio de las *oscilaciones* longitudinales *de una varilla,* que tiene uno de sus extremos libre mientras que al otro se le ha aplicado en el momento inicial una fuerza constante $p$, se reduce a la ecuación diferencial, estudiada en el ejemplo 1,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

---

* De lo ulterior es evidente que para los valores positivos de esta constante no será posible verificar las condiciones de contorno.

con las condiciones iniciales $u\Big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$, pero con condiciones de contorno no homogéneas: $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$ (extremo libre), $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = kp$. Estas condiciones se pueden reemplazar por las homogéneas $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0\right)$ introduciendo en lugar de $u$ una nueva función incógnita $z = u - \frac{kpx^2}{2l}$; pero, entonces, la ecuación diferencial llega a ser no homogénea: $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{a^2 kp}{l}$. Su solución se busca en la forma $z = v + w$, donde $v$ verifica a la ecuación diferencial homogénea y a las condiciones iniciales y de contorno de $z$, es decir,

$$z\Big|_{t=0} = f(x) - \frac{kpx^2}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x),$$

mientras que $w$ verifica a la ecuación diferencial no homogénea y a las condiciones iniciales y de contorno nulas. Fácilmente se observa que $w = \frac{ka^2pt^2}{2l}$. Haciendo $v = X(x)\,T(t)$ y poniéndolo en la ecuación, obtendremos, como antes, $\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda^2$. Integrando la ecuación para $X$ con las condiciones de contorno $X'(0) = X'(l) = 0$, hallamos las funciones propias del problema dado $X_n = \cos\frac{n\pi x}{l}$ y los valores propios correspondientes $\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Operando luego como en el ejemplo anterior, obtendremos finalmente:

$$u = \frac{ka^2pt^2}{2l} + \frac{kpx^2}{2l} + a_0 + \frac{a\pi}{l} b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{an\pi t}{l} + \frac{b_n}{n}\,\mathrm{sen}\,\frac{an\pi t}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l},$$

donde $a_n$ y $b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ son los coeficientes de los desarrollos de las funciones $f(x) - \frac{kpx^2}{2}$ y $\frac{l}{a\pi}\varphi(x)$ en serie de Fourier según los cosenos en el intervalo $(0, l)$ (véase la pág. 632).

3) Problema de las *vibraciones de una membrana circular sujeta al borde*. La ecuación es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

o en coordenadas polares (véase la pág. 368),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

con las condiciones

$$u\Big|_{t=0} = f(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = F(r, \varphi), \quad u\Big|_{r=R} = 0.$$

Sea $u = U(r)\Phi(\varphi)T(t)$. Poniendo en la ecuación, obtendremos $\frac{U''}{U}+\frac{U'}{rU}+\frac{\Phi''}{r^2\Phi}=\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T}$. De aquí, igual que anteriormente, resulta: $T''+a^2\lambda^2 T=0$ y $\frac{r^2U''+rU'}{U}+\lambda^2r^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=\nu^2$ ó $\Phi''+\nu^2\Phi=0$.

De las condiciones $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$, $\Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$, hallamos

$$\Phi(\varphi)=a_n\cos n\varphi+b_n\operatorname{sen} n\varphi,\quad \nu^2=n^2\quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Para determinar $U$ y $\lambda$ se tiene $[rU']'-\frac{n^2}{r}U=-\lambda^2 rU$ con la condición $U(R)=0$. Agregando la condición natural de que $U(r)$ sea acotada para $r=0$ y haciendo la sustitución $\lambda r=z$, obtenemos:

$$z^2U''+zU'+(z^2-n^2)U=0,\quad \text{es decir,}\quad U(r)=J_n(z)=J_n\left(\mu\frac{r}{R}\right)$$

($J_n$ son las funciones de Bessel, véase la pág. 532), donde $\lambda=\frac{\mu}{R}$ y $J_n(\mu)=0$.

Sea $\mu_{nk}$ el $k$-ésimo cero positivo de la función $J_n(z)$. Las funciones $U_{nk}(r)=J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right)$ $(k=1,2,\ldots)$ forman un sistema completo de todas las funciones propias del problema autoconjugado de tipo Sturm-Liouville, ortogonales con respecto al núcleo $r$ (véase la pág. 538).

La solución del problema en cuestión se halla en forma de una serie doble:

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_{nk}\cos n\varphi+b_{nk}\operatorname{sen} n\varphi)\cos\frac{a\mu_{nk}t}{R}+\right.$$
$$\left.+(c_{nk}\cos n\varphi+d_{nk}\operatorname{sen} n\varphi)\operatorname{sen}\frac{a\mu_{nk}t}{R}\right]J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right).$$

De las condiciones iniciales para $t=0$, obtenemos:

$$f(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}\cos n\varphi+b_{nk}\operatorname{sen} n\varphi)J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right),$$

$$F(r,\varphi)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\mu_{nk}}{R}(c_{nk}\cos n\varphi+d_{nk}\operatorname{sen} n\varphi)J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right),$$

de donde

$$\begin{matrix}a_{nk}\\ b_{nk}\end{matrix}=\frac{2}{\pi R^2J_{n-1}^2(\mu_{nk})}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R f(r,\varphi)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \operatorname{sen} n\varphi\end{matrix}J_n\left(\mu_{nk}\frac{r}{R}\right)r\,dr;$$

para $n=0$, el número dos que figura en el numerador debe reemplazarse por 1. Las fórmulas que determinan los coeficientes $c_{nk}$ y $d_{nk}$ se obtienen de las fórmulas para $a_{nk}$ y $b_{nk}$ sustituyendo $f(r, \varphi)$ por $F(r, \varphi)$ y multiplicando por $\frac{R}{a\mu_{nk}}$.

4) *Problema de Dirichlet* (véase la pág. 631) para el rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ (fig. 362). Se pide hallar una función $u(x, y)$ que satisfaga a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ y a las condiciones

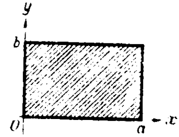


Fig. 362

$$u(0, y) = \varphi_1(y), u(a, y) = \varphi_2(y), \ u(x, 0) = \psi_1(x), \ u(x, b) = \psi_2(x).$$

Resolvemos primeramente el problema para el caso $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 0$. Poniendo en la ecuación $u = X(x)\,Y(y)$, obtenemos $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}\ (= -\lambda^2)$. Como $X(0) = X(a) = 0$, se tiene $X = C \operatorname{sen} \lambda x$, $\lambda = \frac{n\pi}{a}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Escribiendo la solución general de la ecuación $Y'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y = 0$ en la forma

$$Y = a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y,$$

obtenemos la solución particular de la ecuación $\Delta u = 0$, que verifica a la condición $u(0, y) = u(a, y) = 0$, en la forma

$$u_n = \left[a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right] \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x.$$

Haciendo ahora $u = \Sigma u_n$, de las condiciones para $y = 0$ e $y = b$, hallamos que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a}(b - y) + b_n \operatorname{sh} \frac{n\pi}{a} y\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x,$$

donde

$$a_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a \psi_1(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \cdot dx, \quad b_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a \psi_2(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \cdot dx.$$

Resolviendo análogamente el problema para el caso $\psi_1(x) = \psi_2(x) = 0$, obtenemos la solución del problema general, tomando la suma de las dos soluciones encontradas.

5) *Propagación del calor en una varilla homogénea* en la que uno de sus extremos tiende al infinito y en el otro se mantiene una temperatura constante. Se pide hallar una solución acotada de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} =$

$= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 \leq x < +\infty,\ t \geq 0)$ con las condiciones $u\big|_{t=0} = f(x)$, $u\big|_{x=0} = 0$ (se considera que la temperatura es constante en el extremo de la varilla e igual a cero). Poniendo en la ecuación $u = X(x)\,T(t)$, obtenemos $\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$ $(= -\lambda^2)$. De aquí $T(t) = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t}$. Como la solución tiene que ser acotada se deduce que $\lambda^2 \geq 0$. Como $X(0) = 0$, resulta $X(x) = C \operatorname{sen} \lambda x$. Por lo tanto, $u_\lambda = C_\lambda e^{-\lambda^2 a^2 t} \operatorname{sen} \lambda x$. Aquí $\lambda$ es un número real arbitrario, por lo cual se pueden considerar soluciones de la forma

$$u(x, t) = \int_0^\infty C(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t} \operatorname{sen} \lambda x\, d\lambda.$$

De la condición $u\big|_{t=0} = f(x)$, hallamos $f(x) = \int_0^\infty C(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x\, d\lambda$. La última igualdad se cumplirá si se hace $C(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \operatorname{sen} \lambda s\, ds$ (véase la pág. 632). Poniendo $C(\lambda)$ en $u(x, t)$, obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(s) \left( \int_0^\infty e^{-\lambda^2 a^2 t} \operatorname{sen} \lambda s \operatorname{sen} \lambda x\, d\lambda \right) ds$$

o reemplazando el producto de los senos por la semidiferencia de los cosenos (véase la pág. 212), y empleando la fórmula 5) de la pág. 466 tenemos:

$$u(x, t) = \int_0^\infty f(s) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left[ e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}} \right] ds.$$

Método de Riemann de resolución del problema de Cauchy para la ecuación de tipo hiperbólico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F.$$

Se halla "*la función de Riemann*" $v(x, y, \xi, \eta)$, ($\xi, \eta$ se consideran como parámetros) que satisface a la ecuación homogénea conjugada*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial (av)}{\partial x} - \frac{\partial (bv)}{\partial y} + cv = 0$$

* Se llama conjugada de la ecuación lineal $\sum\limits_{i,k} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, dx_k} + \sum\limits_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f$ a la ecuación

$$\sum_{i,k} \frac{\partial^2 (a_{ik} v)}{\partial x_i\, \partial x_k} - \sum_i \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} + cv = 0.$$

y a las condiciones

$$v(x, \eta; \xi, \eta) = e^{\int_{\xi}^{x} b(s, \eta)\, ds}, \quad v(\xi, y; \xi, \eta) = e^{\int_{\eta}^{y} a(\xi, s)\, ds}.$$

La función $u(\xi, \eta)$, que satisface a la ecuación inicial y que toma los valores asignados en la curva dada $\Gamma$ (fig. 363; la curva lisa $\Gamma$ no debe tener tangentes paralelas a los ejes de coordenadas, es decir, no debe tener tangentes comunes con las características) junto con su derivada en dirección de la normal a esta curva (véase la pág. 271), se halla según la fórmula:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(uv)_P + \frac{1}{2}(uv)_Q - \int_{QP} \left[buv + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]dx - \left[auv + \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]dy + \iint_{PMQ} Fv\, dx\, dy.$$

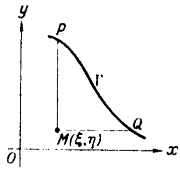


Fig. 363

La integral curvilínea en esta fórmula puede calcularse, puesto que por los valores de la función y de derivada (en una dirección no-tangente) en un arco de la curva se pueden encontrar los valores de ambas derivadas parciales. Frecuentemente, al plantear el problema de Cauchy, en lugar de la derivada en dirección de la normal, se dan los valores de una de las derivadas parciales de la función buscada en la curva. En este caso, es más cómodo emplear otro tipo de la fórmula de Riemann:

$$u(\xi, \eta) = (uv)_P - \int_{QP} \left(buv - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx - \left(auv + v\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \iint_{PMQ} Fv\, dx\, dy$$

(si en $\Gamma$ se han dado los valores de $\frac{\partial u}{\partial y}$).

*Ejemplo:* La ecuación de la transmisión de una corriente eléctrica por un cable *(ecuación de los telegrafistas)* tiene la forma

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} + cu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde $a > 0$, $b$, $c$ son constantes.

Haciendo la sustitución de la función incógnita $u = ze^{-(b/a)t}$, ésta se reduce a la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = m^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n^2 z \quad \left(m^2 = \frac{1}{a},\ n^2 = \frac{b^2 - ac}{a^2}\right)$$

y haciendo las sustituciones de las variables independientes $\xi = \frac{n}{m}(mt+x)$, $\eta = \frac{n}{m}(mt-x)$, se reduce a la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{z}{4} = 0.$$

La función de Riemann $v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)$ debe satisfacer esta ecuación y ser igual a la unidad cuando $\xi = \xi_0$ y $\eta = \eta_0$. Si se busca $v$ en la forma $v = f(w)$, donde $w = (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)$, resulta que $f(w)$ es una solución de la ecuación $w \frac{d^2 f}{dw^2} + \frac{df}{dw} - \frac{1}{4} f = 0$, con la condición inicial $f(0) = 1$. Haciendo la sustitución $\omega = \alpha^2$ esta ecuación se reduce a la ecuación de Bessel de orden cero $\frac{d^2 f}{d\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{df}{d\alpha} - f = 0$ (véase la pág. 532) y, por lo tanto, $v = I_0[\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}]$. Si se necesita hallar la solución de la ecuación inicial que satisface a las condiciones iniciales $z\big|_{t=0} = f(x)$, $\frac{\partial z}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x)$, entonces, poniendo en la fórmula de Riemann el valor encontrado $v$ y volviendo a las variables primitivas, obtenemos:

$$z(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-mt) + f(x+mt)] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{x-mt}^{x+mt}\left[g(s)\frac{I_0\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2-(s-x)^2}\right)}{m} - \right.$$

$$\left. - f(s)\frac{ntI_1\left(\frac{n}{m}\sqrt{m^2t^2-(s-x)^2}\right)}{\sqrt{m^2t^2-(s-x)^2}}\right] ds.$$

EL MÉTODO DE GREEN de resolución de los problemas de contorno para las ecuaciones de tipo elíptico es muy parecido al método de Riemann para la resolución de los problemas de Cauchy para las ecuaciones de tipo hiperbólico. Si se pide hallar una función $u(x, y)$ que satisfaga en una región dada a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

y que tome en la frontera de esta región unos valores asignados, entonces hallamos primero "*la función de Green*" $G(x, y; \xi, \eta)$, la cual satisface a las condiciones siguientes ($\xi$, $\eta$ se consideran como parámetros):

1) $G(x, y; \xi, \eta)$ satisface a la ecuación homogénea conjugada*

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}-\frac{\partial (aG)}{\partial x}-\frac{\partial (bG)}{\partial y}+cG=0$$

en todos los puntos, a excepción de $x=\xi$, $y=\eta$.

2) La función $G$ tiene la forma $U \ln \frac{1}{r}+V$, donde $U$ y $V$ son continuas en toda la región, junto con sus derivadas hasta el segundo orden inclusive; además $U$ toma el valor 1 en el punto $x=\xi$, $y=\eta$, y $r=$ $=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$.

3) En la frontera de la región considera $G(x, y; \xi, \eta)$ se anula.

La solución del problema de contorno mediante la función de Green se determina por la fórmula

$$u(\xi, \eta)=\frac{1}{2\pi}\int_S u(x, y)\frac{\partial}{\partial n}G(x, y; \xi, \eta)\,ds-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\iint_D f(x, y)\,G(x, y; \xi, \eta)\,dx\,dy,$$

donde $D$ es la región considerada, $S$ es su frontera, en la que, según la condición, la función $u$ está dada y $\frac{\partial}{\partial n}$ denota la derivada en la dirección de la normal interior a la frontera de la región.

La condición 3) depende del carácter del problema planteado. Así, por ejemplo, si en la frontera de la región no vienen dados los valores de la propia función pedida, sino los de su derivada en la dirección de la normal a la frontera, entonces en la condición 3) es necesario exigir que se anule en la frontera la expresión

$$\frac{\partial G}{\partial n}-(a\cos\alpha+b\cos\beta)\,G,$$

donde $\alpha$, $\beta$ son los ángulos que forma la normal interior a la frontera de la región con los ejes de coordenadas. En este caso, la solución se determina por la fórmula

$$u(\xi, \eta)=-\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{\partial u}{\partial n}G\,ds-\frac{1}{2\pi}\iint_D fG\,dx\,dy.$$

El método de Green también puede aplicarse a las ecuaciones lineales con tres variables independientes que tienen la forma

$$\Delta u+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+c\frac{\partial u}{\partial z}\,eu=f.$$

* Vease la nota de la pág. 558.

Para hallar aquella solucion de esta ecuación que toma unos valores asignados en la frontera de la región considerada, se construye igual que anteriormente la función de Green (con la única diferencia de que ésta depende ahora de tres parámetros, $\xi$, $\eta$, $\zeta$); la ecuación conjugada a la cual satisface la función de Green tiene la forma

$$\Delta G - \frac{\partial(aG)}{\partial x} - \frac{\partial(bG)}{\partial y} - \frac{\partial(cG)}{\partial z} + eG = 0,$$

y en la condición 2) se exige que $G$ tenga la forma $U\frac{1}{r} + V$, donde $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$. En este caso, la solución del problema viene dada por la fórmula

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S u\frac{\partial G}{\partial n}\,ds - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D fG\,dx\,dy\,dz.$$

Tanto en el método de Riemann como en el método de Green, se halla primero una solución especial de la ecuación diferencial mediante la cual se puede obtener después la solución para cualesquiera condiciones iniciales (o de contorno). La diferencia esencial entre la función de Green y la función de Riemann consiste en que mientras esta última sólo depende de la forma del primer miembro de la propia ecuación diferencial, la función de Green depende además de la región considerada. La búsqueda de la función de Green, incluso cuando se conoce su existencia, es prácticamente un problema extraordinariamente difícil, debido a lo cual el método de Green suele aplicarse con preferencia en las investigaciones teóricas.

*Ejemplos:* 1) Para la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, si la región considerada es un círculo, la función de Green del problema de Dirichlet puede construirse fácilmente.

Si el radio de la circunferencia es igual a $R$ y el punto $M_1$ es simétrico al punto $M(\xi, \eta)$ con respecto a la circunferencia, es decir, $M$ y $M_1$ están situados en un mismo radio y $OM \cdot OM_1 = R^2$, la función de Green se expresa por la fórmula

$$G(x, y; \xi, \eta) = \ln\frac{1}{r} + \ln\frac{\rho r_1}{R},$$

donde $r = MP$, $\rho = OM$ y $r_1 = M_1P$ (fig. 364).

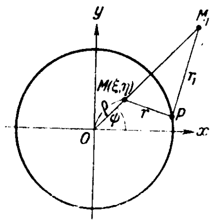


Fig. 364

La fórmula expuesta anteriormente para la solución del problema de Dirichlet, después de sustituir la derivada normal de la función de Green y de algunas transformaciones, conduce a la llamada *integral de Poisson:*

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho \cos(\psi-\varphi)} u(\varphi)\, d\varphi$$

(las notaciones son las mismas que anteriormente, $\xi = \rho \cos \psi$, $\eta = \rho \operatorname{sen} \psi$, $u(\varphi)$ es una función dada en la circunferencia, la cual determina los valores de frontera de la función pedida $u$).

2) Análogamente se construye la función de Green para el problema de Dirichlet de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en el espacio, si la región considerada es una esfera de radio $R$. En este caso la función de Green tiene la forma

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} - \frac{R}{r_1 \rho},$$

donde $\rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ es la distancia del punto $(\xi, \eta, \zeta)$ al centro de la esfera, $r$ es la distancia del punto $(x, y, z)$ al punto $(\xi, \eta, \zeta)$, $r_1$ es la distancia del punto $(x, y, z)$ al punto $\left(\frac{R\xi}{\rho}, \frac{R\eta}{\rho}, \frac{R\zeta}{\rho}\right)$ que es simétrico al punto $(\xi, \eta, \zeta)$. La integral de Poisson toma en este caso la forma (con las mismas notaciones)

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{R^2-\rho^2}{Rr^3} u\, ds.$$

MÉTODO OPERACIONAL. Del mismo modo que para las ecuaciones diferenciales ordinarias para la resolución de las ecuaciones en derivadas parciales, puede aplicarse con éxito el método operacional, basado en el paso de la función pedida a su imagen (véase la pág. 525). En este caso, la función incógnita se considera como función de una de las variables independientes, las demás variables se consideran parámetros. Por lo tanto, para la imagen de la función incógnita resulta una ecuación diferencial *(ecuación auxiliar)*, que contiene una variable independiente menos que la ecuación inicial. En particular, si la ecuación inicial contenía dos variables independientes, para la imagen de la función pedida resulta una ecuación diferencial ordinaria. Si de la ecuación obtenida se puede hallar la imagen de la función incógnita, entonces la propia función se halla o por una tabla de imágenes o por la fórmula de inversión.

*Ejemplos:* 1) Consideremos la propagación del calor en un cuerpo sólido, acotado por un lado ($x > 0$), si la temperatura en la frontera ($x = 0$) varía según la ley $u = k \cos \omega t$ para $t > 0$ y la temperatura inicial del cuerpo es igual a cero.

El problema se reduce a la resolución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{en la región} \quad x > 0, \quad t > 0,$$

con las condiciones $u\Big|_{t=0,\ x>0} = 0$, $u\Big|_{x=0,\ t>0} = k\cos\omega t$. La ecuación auxiliar tiene la forma

$$a^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - p\bar{u} = 0, \quad x > 0$$

con la condición $\bar{u} = \frac{kp^2}{p^2+\omega^2}$ para $x = 0$. La solución de la ecuación auxiliar que está acotada para $x \to \infty$, es:

$$\bar{u} = \frac{kp^2}{p^2+\omega^2} e^{-\frac{x}{a}\sqrt{p}}.$$

Aplicando la fórmula (12) de la pág. 529 y el teorema de Borel (véase la pág. 525) para el paso de la imagen a la función, obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \cos\omega\tau \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau.$$

2) Una varilla de longitud $l$ se encuentra en estado de reposo y su extremo $x = 0$ está fijo. En el instante $t = 0$ al extremo libre de la varilla se le aplica una fuerza $S$ (por unidad de área).

El problema del estudio de las vibraciones de esta varilla se reduce a la resolución de la ecuación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

en la región $0 < x < l$, $t > 0$, con las condiciones iniciales

$$u\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

para $0 < x < l$, y las condiciones de contorno

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \frac{S}{E}$$

($E$ es el módulo de Young). La ecuación auxiliar tiene la forma

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{p^2}{a^2}\bar{u} = 0$$

con las condiciones $\bar{u}\Big|_{x=0} = 0$, $\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=l} = \frac{S}{E}$.

La solución es $\bar{u} = \frac{Sa}{Ep} \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{a}}{\operatorname{ch} \frac{pl}{a}}$.

Descomponiendo la imagen $\bar{u}$ en fracciones simples o mediante las fórmulas de inversión, de aquí se puede obtener:

$$u(x, t) = \frac{Sx}{E} - \frac{8Sl}{\pi^2 E} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

MÉTODOS DE APROXIMACIÓN. Al resolver problemas concretos relacionados con la integración de ecuaciones en derivadas parciales, se aplican ampliamente diferentes métodos de aproximación, tanto analíticos, que permiten obtener una expresión analítica aproximada para la función pedida, como numéricos, mediante los cuales pueden obtenerse directamente los valores aproximados de la función pedida para algunos valores determinados de los argumentos.

Los métodos numéricos están basados en la sustitución de las derivadas por las razones de los incrementos finitos, después de lo cual la ecuación diferencial se sustituye por un sistema de ecuaciones algebraicas en el caso de que la ecuación inicial sea lineal el sistema resulta lineal. Está muy difundido también el método *de los modelos*, el cual se basa en el hecho de que una misma ecuación diferencial describe distintos fenómenos físicos. Para la resolución de la ecuación dada se construye un modelo, en el cual transcurre uno de los procesos descritos por la ecuación considerada y los valores de la función pedida se obtienen directamente haciendo mediciones en el modelo. Ordinariamente el modelo contiene elementos que pueden variar entre unos límites determinados y por esto resulta posible resolver en el modelo problemas para toda una clase de ecuaciones diferenciales.

QUINTA PARTE

# CAPÍTULOS COMPLEMENTARIOS DEL ANÁLISIS

## I. LOS NUMEROS COMPLEJOS Y LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

### *1. Conceptos fundamentales*

LA UNIDAD IMAGINARIA. La unidad imaginaria $i$* se define formalmente como el número que elevado al cuadrado da «$-1$». La introducción de la unidad imaginaria lleva a la generalización del concepto de número, a los *números complejos*, que desempeñan un papel muy importante en el álgebra y en el análisis, y admiten interpretaciones concretas en algunos problemas de la geometría y física.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS. La forma general del número complejo es $a = \alpha+\beta i$; asignando a $\alpha$ y $\beta$ todos los valores reales posibles, se obtienen todos los números complejos posibles $a$. El número $\alpha$ se llama *parte real* del número complejo $a$; $\beta_i$ es su *parte imaginaria*; $\beta$ es el coeficiente de la parte imaginaria. Las notaciones son:

$$\alpha = \mathrm{R}(a), \quad \beta = \mathrm{I}(a)^{**}.$$

Si $\beta = 0$, se tiene $a = \alpha$ (los números reales son un caso particular de los números complejos); si $\alpha = 0$, se tiene $a = \beta i$ (números "*imaginarios puros*").

---

* $i$ proviene del francés imaginaire (imaginario). En la electrotécnica, en lugar de $i$ se implea la letra $j$ (para no confundirla con la letra $i$ que designa la intensidad).

** R proviene del francés réel, I de imaginaire.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA. Así como los números reales pueden representarse por puntos del eje numérico, los números complejos pueden representarse por puntos del plano: el número $a = \alpha+\beta i$ se representa por un punto de abscisa $\alpha$ y ordenada $\beta$ (fig. 365). Los números reales se representan por puntos del eje de abscisas *(eje real)*; los imaginarios puros, por puntos del eje de ordenadas *(eje imaginario)*. Como cada punto del plano se determina completamente por el radio vector de este punto (véase la pág. 597), a cada número complejo le corresponde un vector determinado, situado en el plano y que va del polo al punto que corresponde al número complejo (fig. 366). De esta manera, los números complejos pueden representarse tanto por puntos como por vectores.

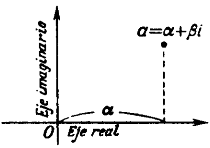


Fig. 365

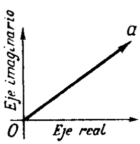


Fig. 366

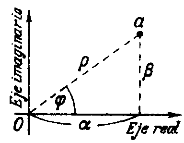


Fig. 367

IGUALDAD DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. Por definición, dos números complejos se consideran *iguales*, si son iguales sus partes reales y los coeficientes de sus partes imaginarias. Geométricamente, dos números complejos son iguales, si son iguales los vectores que los representan. En caso contrario, los números no son iguales; para los números complejos no existen los conceptos de "mayor" y "menor".

FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UN NÚMERO COMPLEJO. La expresión de un número complejo $a = \alpha+\beta i$ se llama *forma algebraica;* si en lugar de las coordenadas cartesianas del punto que representa al número complejo, se introducen sus coordenadas polares (pág. 228), resulta la *forma trigonométrica* del número complejo (fig. 367):

$$a = \rho(\cos\varphi + i(\operatorname{sen}\varphi);$$

$\rho$ es la longitud del radio vector del punto correspondiente y se llama *módulo* o *valor absoluto* del número complejo (se representa por $|a|$), el ángulo $\varphi$ (en radianes) es el *argumento* del número complejo (se representa por arg $a$):

$$\rho = |a|, \quad \varphi = \arg a.$$

La relación entre $\rho$, $\varphi$ y $\alpha$, $\beta$ es la misma que entre las coordenadas cartesianas y polares de un punto (véase la pág. 230):

$$\alpha = \rho \cos \varphi, \qquad \beta = \rho \operatorname{sen} \varphi;$$

$$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{\beta}{\alpha};$$

además, $0 \leqslant \rho < \infty$, y $\varphi$ puede tomar cualquier valor: $-\infty < \varphi < +\infty$; para un número complejo determinado, el argumento $\varphi$ admite un conjunto infinito de valores, que se diferencian entre sí en $2k\pi$ ($k$ es entero). El valor principal del argumento está contenido en el intervalo $-\pi < \varphi \leqslant +\pi$. El módulo del *cero* $(0+0i)$ es igual a cero; el argumento del 0 es indeterminado.

FORMA EXPONENCIAL. Frecuentemente se emplea la siguiente forma de anotación de un número complejo $a$ de módulo $\rho$ y argumento $\varphi$:

$$a = \rho e^{\varphi i} \quad \textit{(forma exponencial)}^*.$$

Por ejemplo, el número $1+\sqrt{3}i$ puede escribirse así:

forma algebraica $1+\sqrt{3}i =$

forma trigonométrica $= 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right) =$

forma exponencial $= 2e^{\frac{\pi}{3} i}$,

y también, sin limitarse al valor principal del argumento:

$$1+\sqrt{3}i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)+i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right] = 2e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i}.$$

NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS. Dos números complejos se llaman *conjugados entre sí* (se representan por $a$ y $\bar{a}$) si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias sólo se diferencian en el signo: $\mathrm{R}(\bar{a}) = \mathrm{R}(a)$, $\mathrm{I}(\bar{a}) = -\mathrm{I}(a)$. En la interpretación geométrica, los puntos que representan los números conjugados son simétricos con respecto al eje real. Los módulos de los números conjugados son iguales, los argumentos se diferencian en el signo

$$a = \alpha+\beta i = \rho(\cos\varphi+i \operatorname{sen}\varphi) = \rho e^{\varphi i},$$

$$\bar{a} = \alpha-\beta i = \rho(\cos\varphi-i \operatorname{sen}\varphi) = \rho e^{-\varphi i}.$$

* Sobre esto véase más detalladamente a continuación en las págs. 573-574.

## 2. *Operaciones algebraicas*

La suma y la diferencia de dos o varios números complejos se define por la fórmula

$$(\alpha_1+\beta_1 i)+(\alpha_2+\beta_2 i)-(\alpha_3+\beta_3 i)+\ \ldots\ =(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\ \ldots)+$$
$$+(\beta_1+\beta_2-\beta_3+\ \ldots)\, i.$$

En la interpretación geométrica, para obtener el vector que representa la suma o la diferencia de dos o varios números se deben sumar o restar los vectores que representan estos números según las reglas de las operaciones con los vectores (pág. 597) (fig. 368).

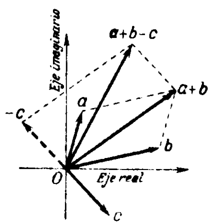


Fig. 368

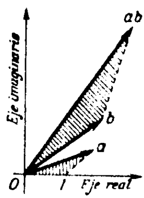


Fig. 369

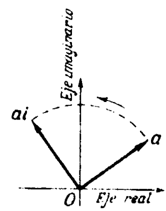


Fig. 370

La multiplicación de dos números complejos se define por la fórmula

$$(\alpha_1+\beta_1 i)\cdot(\alpha_2+\beta_2 i)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)\, i.$$

Si los números vienen dados en forma trigonométrica, entonces

$$[\rho_1(\cos\varphi_1+i\ \text{sen}\ \varphi_1)][\rho_2(\cos\varphi_2+i\ \text{sen}\ \varphi_2)=$$
$$=\rho_1\rho_2\cos[(\varphi_1+\varphi_2)+i\ \text{sen}\ (\varphi_1+\varphi_2)],$$

es decir, el módulo de producto es igual al producto de los módulos, el argumento del producto es igual a la suma de los argumentos de los factores. Geométricamente el vector que representa el producto de $a$ por $b$ se obtiene haciendo girar al vector $a$ un ángulo igual al arg $b$, en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, y alargándolo después $|b|$ veces. El producto $ab$ también se puede obtener construyendo un triángulo semejante (fig. 369). En particular, al multiplicar un número $a$ por $i$, el vector que representa al número $a$ gira un ángulo $\pi/2$ sin alterar su longitud (fig. 370).

el módulo se eleva a la $n$-ésima potencia y el argumento se multiplica por $n$. La fórmula de Moivre es aplicable para cualquier valor de $n$: entero, fraccionario, positivo, negativo; para $n$ fraccionario, es necesario tener en cuenta que el resultado es multiforme (véase más adelante).

En particular, tenemos: $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ y, después, $i^{4n+k} = i^k$.

**La extracción de la raíz** $n$**-ésima**, como la operación inversa de la elevación a potencia, se efectúa por la fórmula de Moivre para exponente fraccionario: si $a = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$, entonces

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right).$$

La suma, resta, multiplicación, división y la elevación a potencia entera son operaciones uniformes; la extracción de la raíz $n$-ésima da siempre $n$ valores distintos.

Asignando a arg $a$ los valores $\varphi$, $\varphi+2\pi$, $\varphi+4\pi$, $\dots$, $\varphi+2(n-1)\pi$, resultan valores de arg $\sqrt[n]{a}$ que se diferencian uno de otro en $\frac{2\pi}{n}$; para valores posteriores de $k$, éstos vuelven a repetirse. Geométricamente, los puntos que representan a $\sqrt[n]{a}$, son los vértices de un polígono regular de $n$ lados con el centro en el polo (en la fig. 371 están representados los seis valores de $\sqrt[6]{a}$).

**Funciones algebraicas de variable compleja.** Si $z$ es una variable compleja (que toma cualquier valor complejo $z = x+yi$), el resultado de realizar con $z$ (y, posiblemente, con algunas constantes) algunas operaciones algebraicas determinadas, es una función algebraica de esta variable $w = f(z)$*. Tales son, por ejemplo, las funciones

$$w = az+b, \quad w = \frac{1}{z},$$

$$w = z^2, \quad w = \frac{z+i}{z-i}, \quad w = \sqrt{z^2-a^2}.$$

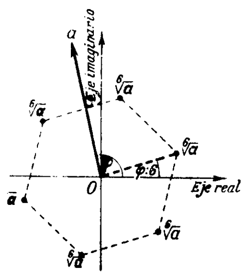



Fig. 371

* En un sentido más general una función algebraica $w$ puede definirse en forma implícita por la ecuación

$$a_1 z^{m_1} w^{n_1} + a_2 z^{m_2} w^{n_2} + \dots + a_k z^{m_k} w^{n_k} = 0,$$

que no siempre puede ser resuelta explícitamente (en radicales) en $w$.

## *3. Funciones trascendentes elementales*

SERIES DE TÉRMINOS COMPLEJOS. Una sucesión infinita de números complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ tiene límite $z \left(z = \lim_{n \to \infty} z_n\right)$, si desde un cierto $n$ en adelante es: $|z - z_n| < \varepsilon$ (un número positivo arbitrariamente pequeño), es decir, si desde un cierto $n$ en adelante, todos los puntos que representan a los números $z_n, z_{n+1}, \ldots$, estarán contenidos en un círculo de radio $\varepsilon$ con centro en $z$.

*Ejemplo*: $\lim_{n \to \infty} \{\sqrt[n]{a}\} = 1$ para cualquier $a$ (aquí se entiende por $\{\sqrt[n]{a}\}$ el valor de la raíz que tiene el argumento menor, véase la fig. 372.)

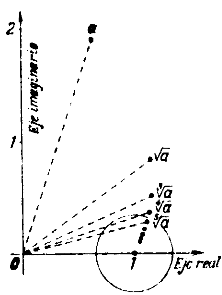



Fig. 372

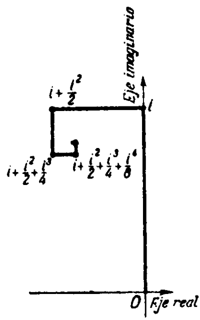



Fig. 373

*Una serie infinita* de términos complejos

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

converge al número $s$ (la suma de la serie), si $s = \lim_{n \to \infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. En caso de convergencia de la serie, el extremo de la poligonal que une los puntos que representan los números $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, se aproxima indefinidamente al punto $s$.

*Ejemplos:*

1) $i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + \frac{i^4}{4} + \ldots$

2) $i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2^2} + \ldots$ (fig. 373).

LA DIVISIÓN de dos números complejos se define como la operación inversa de la multiplicación. En forma algebraica es:

$$\frac{\alpha_1+\beta_1 i}{\alpha_2+\beta_2 i}=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\,i.$$

En forma trigonométrica es:

$$[\rho_1(\cos\varphi_1+i\ \text{sen}\ \varphi_1)]:[\rho_2(\cos\varphi_2+i\ \text{sen}\ \varphi_2)]=$$
$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\ \text{sen}\ (\varphi_1-\varphi_2)],$$

es decir, el módulo del cociente es igual al cociente de los módulos del dividendo y del divisor, el argumento del cociente es igual a la diferencia de sus argumentos.

Geométricamente, el vector que representa el cociente $\frac{a}{b}$, se obtiene haciendo girar al vector que representa al número $a$ el ángulo arg $b$ en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, contrayéndolo después $|b|$ veces.

La división por cero es imposible.

REGLA GENERAL PARA LAS CUATRO OPERACIONES ARITMÉTICAS. Formalmente, los cálculos con los números complejos $\alpha+\beta_i$ se efectúan del mismo modo que con los binomios ordinarios, pero haciendo $i^2=-1$. Al dividir un número complejo por otro "se destruyen los números imaginarios en el denominador" (similarmente a como se destruye la irracionalidad en el denominador, véase la pág. 148), es decir, se multiplica el numerador y el denominador por un número conjugado al denominador, empleando la igualdad $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=$ $=\alpha^2+\beta^2$ (este último es un número real).

EJEMPLO de transformación:

$$\frac{(3-4i)(-1+5i)^2}{1+3i}+\frac{10+7i}{5i}=$$
$$=\frac{(3-4i)(1-10i-25)}{1+3i}+\frac{(10+7i)\,i}{5i\cdot i}=$$
$$=\frac{-2(3-4i)(12+5i)}{1+3i}+\frac{7-10i}{5}=$$
$$=\frac{-2(56-33i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}+\frac{7-10i}{5}=$$
$$=\frac{-2(-43-201i)}{10}+\frac{7-10i}{5}=$$
$$=\frac{1}{5}(50+191i)=10+38{,}2i.$$

LA ELEVACIÓN de un número complejo a la $n$-ésima **potencia** se efectúa según la *fórmula de Moivre:*

$$[\rho(\cos\varphi+i\ \text{sen}\ \varphi)]^n=\rho^n(\cos n\varphi+i\ \text{sen}\ n\varphi);$$

La serie es *absolutamente* convergente, si converge la serie de sus módulos

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ \ldots,$$

y es condicionalmente convergente, si la serie de los módulos es divergente*. En el ejemplo 1), la serie es condicionalmente convergente y en el ejemplo 2) lo es absolutamente.

La serie de términos variables

$$f_1(z)+f_2(z)+\ \ldots\ +f_n(z)+\ \ldots$$

determina una función de $z$ para aquellos valores de $z$, para los cuales ella es convergente.

*La serie de potencias*

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ \ldots$$

($a_i$ son constantes complejas) es absolutamente convergente para todos los valores de $z$ (en todo el plano), o para los valores que están situados en el interior de un cierto *círculo de convergencia* con centro en el origen de coordenadas; en el exterior de este círculo la serie es divergente; el radio de este círculo se llama *radio de convergencia* de la serie**. Por ejemplo, para la serie $1+z+z^2+\ \ldots$ el radio de convergencia $R=1$.

FUNCIÓN EXPONENCIAL SIMPLE. Por definición,

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ \ldots$$

Esta serie es convergente en todo el plano. Para un exponente imaginario puro $yi$, se tiene: $e^{yi}=\cos y+i\operatorname{sen} y$ (*fórmula de Euler*); por ejemplo: $e^{\pi i}=-1$.

En el caso general,

$$e^z=e^{x+yi}=e^xe^{yi}=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y),$$

es decir,

$$\mathrm{R}(e^z)=e^x\cos y,\quad \mathrm{I}(e^z)=e^x\operatorname{sen} y,\quad |e^z|=e^x,\quad \arg e^z=y.$$

De aquí se deduce la *forma exponencial* del número complejo: $a+bi=\rho e^{\varphi i}$. La función $e^z$ es **periódica**, de período $2\pi i$: $e^z=e^{z+2k\pi i}$; por ejemplo, $e^0=e^{2k\pi i}=1$, $e^{(2k+1)\pi i}=-1$.

*Las fórmulas de Euler* para los números complejos son:

$$e^{zi}=\cos z+i\operatorname{sen} z,$$
$$e^{-zi}=\cos z-i\operatorname{sen} z$$

---

* Siendo convergente la serie considerada. (*Nota de la Edit.*)

** La investigación de la convergencia de la serie en los puntos que están situados en la circunferencia misma del círculo de convergencia necesita un estudio complementario en cada caso.

(sobre las funciones trigonométricas de argumento complejo, véase más adelante).

EL LOGARITMO NATURAL. Por definición

$$w = \mathrm{Ln}\, z, \quad \text{si} \quad z = e^w.$$

Si $z = \rho e^{\varphi i}$, entonces $\mathrm{Ln}\, z = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi)$, es decir, $\mathrm{R}(\mathrm{Ln}\, z) = \ln \rho$, $\mathrm{I}(\mathrm{Ln}\, z) = \varphi + 2k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Ln $z$ es una función *multiforme*. Limitándose al valor principal $\varphi$ (pág. 568), resulta el *valor principal del logaritmo* (se representa por ln $z$):

$$\ln z = \ln \rho + \varphi i \ (-\pi < \varphi \leqslant +\pi).$$

El Ln $z$ existe para todos los números complejos $z$, a excepción del cero.

FUNCIÓN EXPONENCIAL GENERAL. Por definición, $a^z = e^{z \,\mathrm{Ln}\, a} (a \neq 0)$, $a^z$ es una función *multiforme*. Su valor principal es: $e^{z \ln a}$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS. Por definición,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}, \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \\ \operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \\ \operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \end{aligned}\right\} \text{Las series son convergentes en todo el plano.}$$

Las funciones sen $z$ y cos $z$ son periódicas, de período $2\pi$, las funciones sh $z$ y ch $z$ son periódicas, de período $2\pi i$.

Expresiones de las funciones de argumento imaginario puro:

$$\operatorname{sen} yi = i \operatorname{sh} y, \quad \cos yi = \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{sh} yi = i \operatorname{sen} y, \quad \operatorname{ch} yi = \cos y.$$

Las fórmulas que son válidas para las funciones trigonométricas e hiperbólicas de argumento real (págs. 210-212 y 225) subsisten también para las funciones de argumento complejo. En particular, el cálculo de sen $z$, cos $z$, sh $z$, ch $z$ para $z = x + yi$ se efectúa por las fórmulas sen $(a+b)$, cos $(a+b)$, sh $(a+b)$, ch $(a+b)$. Por ejemplo:

$$\cos(x+yi) = \cos x \cos yi - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} yi = \cos x \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$$

y, por lo tanto,

$$\mathrm{R}(\cos z) = \cos \mathrm{R}(z) \operatorname{ch} \mathrm{I}(z),$$
$$\mathrm{I}(\cos z) = -\operatorname{sen} \mathrm{R}(z) \operatorname{sh} \mathrm{I}(z).$$

Las funciones tg $z$, ctg $z$, th $z$, cth $z$ se definen por las fórmulas

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS INVERSAS Arcsen $z$, Arccos $z$, Arctg $z$, Arcctg $z$, Arsh $z$, Arch $z$, Arth $z$, Arcth $z$, se definen del mismo modo que para la variable real*. Por ejemplo: $w =$ $=$ Arcsen $z$, si $z = \operatorname{sen} w$.

Estas funciones tienen un conjunto infinito de valores y se expresan por logaritmos mediante las fórmulas:

$$\operatorname{Arcsen} z = -i \operatorname{Ln}\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right), \qquad \operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), \qquad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, \qquad \operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z},$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz+1}{iz-1}; \qquad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1}.$$

Los valores principales de las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas, se expresan por estas mismas fórmulas mediante la función ln (el valor principal del logaritmo):

$$\operatorname{arcsen} z = -i \ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right), \qquad \operatorname{arsh} z = \ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right),$$

$$\operatorname{arccos} z = -i \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), \qquad \operatorname{arch} z = \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, \qquad \operatorname{arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z},$$

$$\operatorname{arcctg} z = -\frac{1}{2i} \ln \frac{iz+1}{iz-1}, \qquad \operatorname{arcth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}.$$

En la tabla siguiente se exponen las expresiones de las partes real e imaginaria, módulo y argumento de las funciones trigonométricas e hiperbólicas de la variable compleja $z = x \pm iy$.

---

* Págs. 216 y 226.

### Expresiones de R($w$) e I($w$)

| Función $w = f(x \pm iy)$ | Parte real R($w$) | Parte imaginaria I($w$) |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen}(x \pm iy)$ | $\operatorname{sen} x \operatorname{ch} y$ | $\pm \cos x \operatorname{sh} y$ |
| $\cos(x \pm iy)$ | $\cos x \operatorname{ch} y$ | $\mp \operatorname{sen} x \operatorname{sh} y$ |
| $\operatorname{tg}(x \pm iy)$ | $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$ | $\pm \dfrac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$ |
| $\operatorname{sh}(x \pm iy)$ | $\operatorname{sh} x \cos y$ | $\pm \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y$ |
| $\operatorname{ch}(x \pm iy)$ | $\operatorname{ch} x \cos y$ | $\pm \operatorname{sh} x \operatorname{sen} y$ |
| $\operatorname{th}(x \pm iy)$ | $\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$ | $\pm \dfrac{\operatorname{sen} 2y}{\operatorname{ch} 2x + \cos 2y}$ |

### Expresiones de $|w|$ y arg $w$

| Función $w = f(x \pm iy)$ | Módulo: $\lvert w \rvert$ | Argumento: arg $w$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen}(x \pm iy)$ | $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$ | $\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x \operatorname{th} y)$ |
| $\cos(x \pm iy)$ | $\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$ | $\mp \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x \operatorname{th} y)$ |
| $\operatorname{sh}(x \pm iy)$ | $\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}$ | $\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{cth} x \operatorname{tg} y)$ |
| $\operatorname{ch}(x \pm iy)$ | $\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \cos^2 y}$ | $\pm \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x \operatorname{tg} y)$ |

## 4. *Ecuaciones de las curvas en forma compleja*

Función compleja de variable real. La función $z = f(t)$, en la que $z = x + yi$, mientras que $t$ es una variable real, se representa por puntos $z$ que, al variar $t$, forman una cierta curva. Las ecuaciones paramétricas de esta curva son: $x = x(t)$, $y = y(t)$; la *ecuación en forma compleja* es: $z = f(t)$.

En las págs. 578-579 se exponen ejemplos de algunas curvas, expresadas en forma compleja y representadas en la fig. 374.

## 5. *Funciones de variable compleja*

**Transformación del plano.** Una función $w = f(z)$, donde $z = x + yi$ y $w = u + vi$, está determinada si se conocen dos funciones de dos variables reales:

$$u = u(x, y), \qquad v = (x, y).$$

La función de variable compleja realiza una transformación del plano $z$ en el plano $w$*, transformándose cada punto $z_1$ en punto correspondiente $w_1$; las figuras geométricas (curvas, regiones) del plano $z$ se convierten en el plano $w$ en otras. La curva $x = x(t)$, $y = y(t)$ se transforma en la curva $u = u[x(t), y(t)]$, $v = v[x(t), y(t),]$ ($t$ es un parámetro).

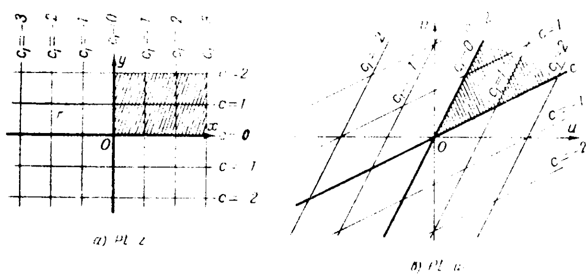



Fig. 375

Las líneas de coordenadas $y = c$ se transforman en las líneas $u = u(x, c)$, $v = v(x, c)$, donde $x$ es un parámetro; las líneas de coordenadas $x = c_1$ se transforman en las líneas $u = u(c_1, y)$, $v = v(c_1, y)$, donde $y$ es un parámetro.

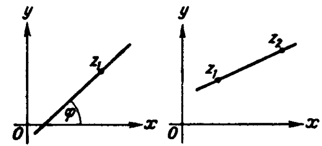
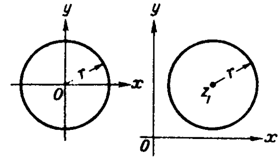
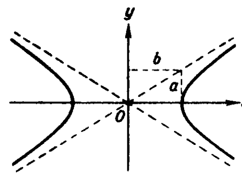
*Ejemplo* de transformación: $u = 2x + y$, $v = x + 2y$ (fig. 375). Las líneas $y = c$ se transforman en $u = 2x + c$, $v = x + 2c$, es decir, en las rectas $v = \frac{u}{2} + \frac{3}{2} c$. Análogamente, las líneas $x = c_1$ se transforman en las rectas $v = 2u - 3c_1$; la región rayada se transforma en la región rayada.

**Límite, continuidad, derivada.** Los conceptos de límite, continuidad y derivada de una función de variable compleja $w = f(z)$ se definen

---

* Si la función $w = f(z)$ es multiforme (por ejemplo, $\sqrt[n]{z}$, Ln $z$, Arcsen $z$, Arth $z$, etc.), el campo de valores $w$ es el conjunto de varios planos, colocados uno sobre otro; cada valor de la función se representa por un punto situado en uno de los planos. Estos planos están unidos entre sí a lo largo de ciertas líneas y forman la llamada *superficie de Riemann* o *de varias hojas*.

## EJEMPLOS DE ALGUNAS CURVAS EN FORMA COMPLEJA

| Curva | Ecuación | Figura |
|---|---|---|
| 1. *Línea recta:* | | <br><br>a) b) |
| a) que pasa por el punto $z_1$ y forma con el eje $Ox$ el ángulo $\varphi$ | $z = z_1 + te^{\varphi}$ | |
| b; que pasa por dos puntos $z_1$ y $z_2$ • | $z = z_1 + t(z_2 - z_1)$ | |
| 2. *Circunferencia:* | | <br><br>c) d) |
| c) de radio $r$ con centro en el origen de coordenadas | $= re^{it}$ | |
| d) de radio $r$ con centro en el punto $z_1$ | $z = z_1 + re^{it}$ | |
| 3. *Hipérbola:* | | |
| e) en forma canónica $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ | $z = a \operatorname{ch} t + ib \operatorname{sh} t$<br>ó<br>$z = ce^{t} + \bar{c}e^{-t}$,<br>donde $c$ y $\bar{c}$ son números complejos conjugados<br>$c = \dfrac{a+bi}{2}$, $\bar{c} = \dfrac{a-bi}{2}$ | <br><br>e) |

37*

**4.** ***Elipse:***

f) en forma canónica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$z = a\cos t + ib \operatorname{sen} t$$

ó

$$z = ce^{it}+de^{-it},$$

donde $c=\dfrac{a+b}{2}$, $\quad d=\dfrac{a-b}{2}$,

es decir, son números reales arbitrarios

g) en forma general (el centro en el punto $z_1$, los ejes están inclinados en un cierto ángulo)

$$z = z_1+ce^{it}+de^{-it},$$

donde $c$ y $d$ son números complejos arbitrarios que determinan la longitud y la rotación de los ejes

**5.** ***Espiral logarítmica:***

$$z = ae^{bt},$$

donde $a$ y $b$ son números complejos arbitrarios

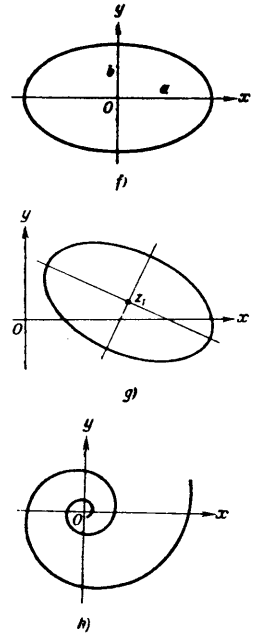



Fig. 374

formalmente igual que para una función de variable real (véanse las págs. 320, 327 y 353).

El número complejo $A$ se llama *límite* de la función $f(z)$ cuando $z$ tiende a $a$:

$$A = \lim_{z \to a} f(z), \qquad (*)$$

si para un número real positivo $\varepsilon$, arbitrariamente pequeño, se puede señalar un número real positivo $\eta$ tal que para cualquier número complejo $z$ (a excepción, posiblemente del propio número $a$) que cumpla la condición $|a-z| < \eta$, se verifica la desigualdad $|A-f(z)| < \varepsilon$. La interpretación geométrica (fig. 376) es la siguiente: a cualquier punto $z$ (a excepción, posiblemente, del punto $a$) situado en el interior del círculo de radio $\eta$ con centro en $a$, le corresponde en la transformación definida por la función $w = f(z)$, un punto $w$ situado en el interior del círculo de radio $\varepsilon$ con el centro en $A$.

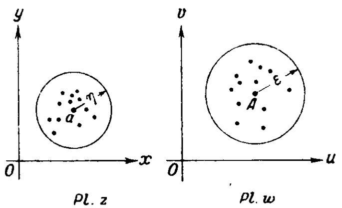


Fig. 376

Si $w = f(z)$ tiene límite para $z \to a$, y

$$\lim_{z \to a} f(z) = f(a) \qquad (**)$$

(es decir, el límite de la función es igual al valor de la función en el límite de la variable independiente), la función $w$ se llama *continua* en el punto $a$. Definición equivalente de continuidad: la función $w = f(z)$ es continua en el punto $z$, si de la condición $|\Delta z| \to 0$, se deduce la condición

$$|\Delta w| = |f(z+\Delta z)-f(z)| \to 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$$

(a un incremento infinitésimo del argumento le corresponde un incremento infinitésimo de la función).

Se llama *derivada* $w' = f'(z)$ de la función dada $w = f(z)$, a la función definida para el valor dado $z$ por la igualdad

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \qquad (***)$$

Una función para la cual existe el límite $(***)$ en un punto dado se llama *derivable*, también *monógena* o *halomorfa* en este punto. El significado geométrico del módulo y del argumento de la derivada de una función de variable compleja se verá más adelante (pág. 584).

FUNCIONES ANALÍTICAS. Si una función $w = f(z)$ derivable en todos los puntos de un círculo con el centro en $z_0$ (aunque sea de un radio arbitrariamente pequeño), se dice que es *analítica en el punto* $z_0$; la función se llama *analítica en una región conexa* (véase la pág. 334), si es analítica en todos los puntos de esta región. Las condiciones necesarias y suficientes* para que una función $u+vi = f(x+yi)$ sea analítica, son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \textit{(condiciones de Cauchy-Riemann).}$$

Por ejemplo, la función $w = z^2 (u = x^2 - y^2,\ v = 2xy)$ es analítica en todas partes; la función $w = u+vi$ definida por las igualdades $u = 2x+ +y$, $v = x+2y$ no es analítica en ninguna parte. En el caso de una función analítica $w = u+vi$, las funciones $u$ y $v$ son *funciones armónicas* de las variables reales $x$ e $y$, es decir, satisfacen a la ecuación de Laplace (véase la pág. 630). Conociendo la función armónica $u$, se puede determinar, salvo un sumando constante, la función armónica $v$ *conjugada* a ella; para esto no hay más que emplear las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$v = \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dy + \varphi(x), \quad \text{en que} \quad \frac{d\varphi}{dx} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\right).$$

Análogamente, conociendo $v$ se puede determinar $u$.

Los puntos en los cuales la función es analítica se llaman *regulares*. Si una función es analítica en una región, a excepción de algunos de sus puntos, entonces tales puntos se llaman *singulares*. Los ejemplos y la clasificación de los puntos singulares, véase en la pág. 582. Las funciones elementales (algebraicas y trascendentes, véase la pág. 316) son analíticas en todo el plano, a excepción de algunos puntos singulares aislados.

Las funciones analíticas tienen en todos los puntos regulares derivadas de cualquier orden. Las derivadas de las funciones elementales de variable compleja se calculan por las mismas reglas que las derivadas de las mismas funciones de variable real.

MÓDULO DE UNA FUNCIÓN ANALÍTICA. En diversos problemas de la teoría y aplicaciones de las funciones de variable compleja, tiene una importancia particular el valor absoluto (módulo) de la función

$$|w| = |f(z)| = \sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2} = \varphi(x, y).$$

La superficie $|w| = \varphi(x, y)$, donde $|w|$ es la cota levantada en el punto $z = x+yi$, se llama *relieve* de la función. Por ejemplo, para la función

* Para la condición suficiente, es necesario, además, que las derivadas parciales que figuran en las condiciones de Cauchy-Riemann sean continuas en la región considerada.

sen $z$ = sen $x$ ch $y+i$ cos $x$ sh $y$, se tiene:

$$|\text{sen } z| = \sqrt{\text{sen}^2 x+\text{sh}^2 y}.$$

En la fig. 377, *a* está representado el relieve de esta función, en la fig. 377, *b* se representa el relieve de la función

$$w = e^{1/z}*.$$

Como el módulo de una función es una magnitud no negativa, su relieve siempre está situado sobre el plano $z$, a excepción de los puntos para los cuales $|f(z)| = 0$ y, por lo tanto, $f(z) = 0$. Tales valores de $z$ (las raíces de la ecuación $f(z) = 0$) se llaman *ceros* de la función $f(z)$.

Una función se dice que es *acotada* en una región dada, si existe un número positivo constante $N$ tal que $|f(z)| < N$ para cualquier punto $z$ de esta región, y se dice que *no es acotada*, si no existe tal número $N$.

Teoremas fundamentales sobre el módulo de las funciones analíticas:

1. Si $w = f(z)$ es una función analítica en una región cerrada, su módulo alcanza el máximo en la frontera de esta región.

2. Si $w = f(z)$ es analítica en todo el plano y está acotada, entonces es constante: $f(z) =$ const (*teorema de Liouville*).

Puntos singulares. Si una función $w = f(z)$ es analítica en un entorno del punto $z=a$** y está acotada en este entorno, entonces pueden presentarse dos casos:

1) $f(a) = \lim\limits_{z\to a} f(z)$. En este caso, la función $f(z)$ es analítica también en el mismo punto $a$.

2) $f(a)$ tiene otro valor o la función no está definida en el punto $a$.

Tal punto $a$ es singular y se llama *punto singular evitable*, porque sustituyendo en el mismo el valor $f(a)$ por el número $\lim\limits_{z\to a} f(z)$, la función se hace analítica en el punto $a$***.

Si la función $w = f(z)$ es analítica en un entorno del punto $z = a$ y no es acotada en el mismo, el punto $a$ es singular; pueden presentarse ahora dos casos:

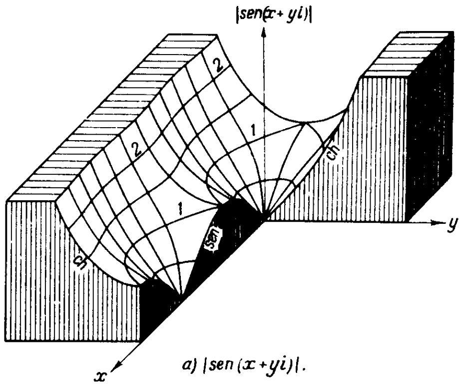
1) $|f(z)| \to \infty$, cuando $z$ se aproxima al punto $a$ por cualquier camino. Tal punto $a$ se llama *polo*. En este caso, se introduce la notación $f(a) = \infty$. Sobre el orden del polo, véase la pág. 593.

---

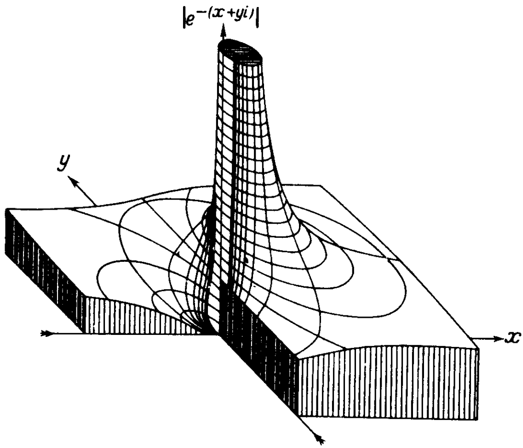
* Los relieves de muchas funciones importantes se muestran en el libro Yanke y Emde (pág. 675).

** Es decir en el interior de un círculo arbitrariamente pequeño con el centro en el punto $a$, a excepción, posiblemente, de este mismo punto.

*** Este caso es análogo al de la discontinuidad evitable de una función de variable real (véase la pág. 329.).




a) $|\operatorname{sen}(x+yi)|$.




б) $\left|\dfrac{1}{e^{x+yi}}\right|$

Fig. 377

2) $|f(z)|$ no tiende a ningún número cuando $z$ se aproxima al punto $a$; las sucesiones $f(z_1), f(z_2), \ldots, f(z_n), \ldots$ tienen diferentes límites según como se hayan elegido los puntos $z_n$ que se aproximan a $a$. Tal punto $a$ se llama *punto singular esencial**.

*Ejemplos*: Para la función $w = \frac{1}{z-a}$ el punto $a$ es un polo; para la función $w = e^{1/z}$ el punto 0 es singular esencial (véase la fig. 377, *b*).

TRANSFORMACIONES (O REPRESENTACIONES) CONFORMES. La transformación del plano realizada por una función analítica, posee la propiedad importante que sigue en un entorno del punto $z$, para el cual $w' \neq 0$.

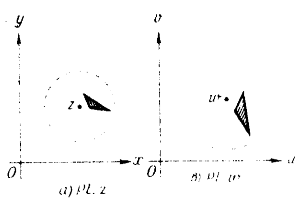



Fig. 378

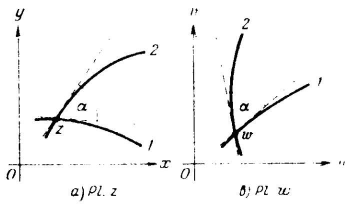



Fig. 379

Los vectores infinitésimos que parten de este punto en todas las direcciones: 1) se alargan (o se contraen) un mismo número de veces, igual a $|w'|$ (salvo infinitésimos de orden superior) y 2) giran un mismo ángulo, igual a arg $w'$. De este modo, las figuras en una región infinitésima se transforman en figuras semejantes, o sea, conservan su forma (fig. 378). Tal transformación se llama *conforme*. Las figuras de dimensiones finitas se deforman, pero los ángulos entre dos curvas se conservan (*conservación de los ángulos*, fig. 379). En particular, las líneas de coordenadas $x =$ const e $y =$ const se transforman en dos familias de curvas perpendiculares entre sí.

Por lo tanto, mediante las funciones analíticas se puede obtener un conjunto de sistemas rectangulares de coordenadas curvilíneas.

Recíprocamente, para cualquier transformación conforme existe una red ortogonal de curvas que se transforma en una red cartesiana rectangular. En el ejemplo $u = 2x+y$, $v = x+2y$ (pág. 579), no subsiste la ortogonalidad; en el ejemplo $w = z^2$ ésta se conserva; las líneas de coordenadas se transforman en dos familias de parábolas confocales

* En este caso se puede señalar un procedimiento de aproximación de $z$ al punto $a$ tal que $f(z)$ se aproxime a cualquier número complejo.

(fig. 380). En el punto $z = 0$ se tiene $w' = 0$; no subsiste la conformidad. El primer cuadrante coordenado se transforma en el semiplano superior.

Las transformaciones conformes se aplican en la electrotécnica, hidrodinámica, aerodinámica y otros problemas aplicados. A continuación se consideran las transformaciones conformes de mayor uso;

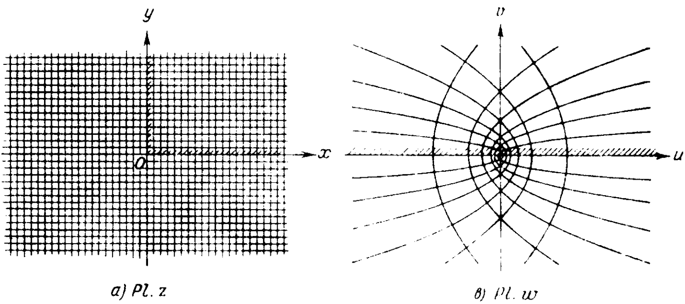



Fig. 380

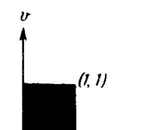



Fig. 381

también se presenta el dibujo de la red ortogonal de curvas (*red isotérmica*) que se transforma en la red cartesiana rectangular. El contorno de la región que se transforma en el semiplano superior está rayado. Con negro se señala la región que se transforma en el cuadrado con los vértices (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) (fig. 381).

## 6. *Transformaciones conformes elementales*

| Funciones y sus propiedades | Red ortogonal que se transforma en la red cartesiana rectangular |
|---|---|

a) *Función lineal:*

$$w = az+b\,(a = \rho e^{\varphi i}).$$

La transformación puede descomponerse en tres $t=e^{\varphi i}z$, rotación del plano en el ángulo $\varphi$; $s = \rho t$, dilatación homotética de razón $\rho$; $w = s+b$, traslación paralela en el vector $b$. Como resultado, las figuras del plano $z$ se transforman en figuras homotéticas a sí mismas, sometiéndose después a una rotación y a una traslación. Los puntos $z_1 = \dfrac{b}{1-a}$ y $z_2 = \infty$ se transforman en ellos mismos.

b) *Inversión:* $w = \dfrac{1}{z}$.

Al punto $z$ de radio vector $\rho$ y ángulo polar $\varphi$ le corresponde el punto de radio vector $\dfrac{1}{\rho}$ y ángulo $\varphi$. La transformación consta de una inversión respecto del círculo unidad* y de una reflexión respecto del eje $Ox$. Los círculos se transforman en círculos (considerando la recta como un caso particular de un círculo de radio $\infty$). Al punto $O$ le corresponde el punto $\infty$, los puntos $1$ y $-1$ no se mueven del sitio. Para $z = 0$, no subsiste la conformidad.

c) *Función lineal fraccionaria (función homográfica):*

$$w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

La transformación puede descomponerse en tres: $t = cz+d$ (función lineal), $s = \dfrac{1}{t}$ (inversión), $w = \dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c}s$ (función li-

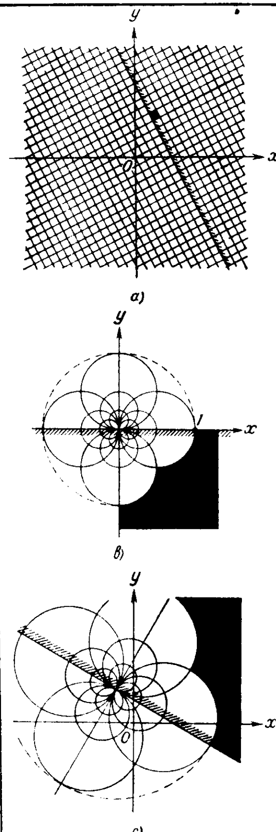



Fig. 382

* Se llama *inversión* con respecto de un círculo dado de radio $R$ a la transformación de puntos del plano, en la cual al punto $M_1$ situado a la distancia $d_1$ del centro del círculo le corresponde el punto $M_2$ que está

| Funciones y sus propiedades | Red ortogonal que se transforma en la red cartesiana rectangular |
|---|---|

neal). Como resultado, la función homográfica transforma los círculos en círculos (considerando la recta como un caso particular del círculo); los dos puntos que satisfacen a la ecuación $z = \dfrac{az+b}{cz+d}$ no se mueven del sitio.

d) *Función cuadrática:* $w = z^2$.

Todo el plano $z$ se transforma en el plano doble $w$. La red isotérmica del plano $z$ consta de dos familias de hipérbolas $u = x^2 - y^2$ y $v = 2xy$. Para $z = 0$ no subsiste la conformidad. Los puntos 0 y 1 no se mueven.

e) *Raíz cuadrada:* $w = \sqrt{z}$.

La función es biforme; todo el plano se transforma: 1) en el semiplano superior, 2) en el semiplano inferior. La red isotérmica del plano $z$ está formada por dos familias de parábolas confocales con foco en el origen de coordenadas y con los ejes dirigidos en la dirección positiva y en la negativa del eje $Ox$. Para $z = 0$ no subsiste la conformidad. Los puntos 0 y $+1$ no se mueven.

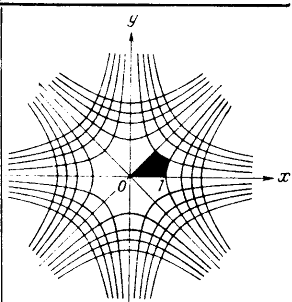
f) *Logaritmo:* $w = \operatorname{Ln} z$.

$$u = \ln \rho, \quad v = \varphi + 2k\pi;$$

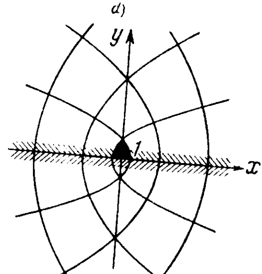
la red isotérmica está formada por las circunferencias $\ln \rho = \text{const}$ y por los rayos $\varphi = \text{const}$, es decir, es la red polar. La función toma un conjunto infinito de valores; para el valor principal del logaritmo, todo el plano se transforma en la franja limitada por las rectas $v = -\pi$ y $v = +\pi$ (incluyendo esta última).

---

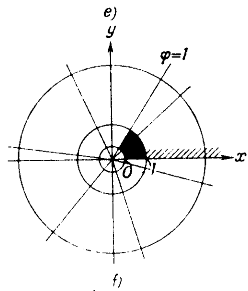
situado en el mismo radio $OM_1$ (o en su prolongación), pero a la distancia $OM_2 = d_2 = \dfrac{R^2}{d_1}$; en este caso $M_2$ es el punto homólogo a $M_1$. A los puntos situados fuera del círculo les corresponden puntos situados en el interior, y viceversa.



d)



e)



f)

Fig. 382

## 7. *Integrales en el campo complejo*

DEFINICIÓN. Se llama integral de una función de variable compleja $w = f(z)$ sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$ de una curva del plano $z$ ("camino de integración") al número complejo obtenido de la manera siguiente (fig. 383);

1) se divide el arco $\overset{\frown}{AB}$ en $n$ segmentos mediante puntos intermedios arbitrarios:

$$M_1(z_1),\ M_2(z_2),\ \ldots,\ M_{n-1}(z_{n-1})^*$$

[hacemos $A \equiv M_0(z_0)$, $B \equiv M_n(z_n)$];

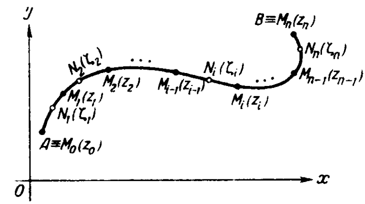



Fig. 383

2) en el interior (o en la frontera) de cada segmento $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ se elije un punto arbitrario $N_i(\zeta_i)$;

3) se calculan los valores de la función $f(z)$ en los puntos $\zeta_i$ y se multiplican por las diferencias correspondientes $z_i - z_{i-1}$ (incrementos del argumento);

4) se suman los $n$ productos obtenidos $f(\zeta_i)\cdot(z_i - z_{i-1})$;

5) se halla el límite de la suma $\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\cdot(z_i - z_{i-1})$, cuando tiende a cero cada incremento del argumento. Si existe este límite y no depende de la elección de los puntos $M_i$, ni tampoco de la elección de los puntos $N_i$, entonces se llama *integral* de la función $f(z)$ *sobre el arco* $\overset{\frown}{AB}$ y se representa por

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz. \qquad (*)$$

* El número complejo que figura entre paréntesis después de la notación del punto, es igual al valor de la variable compleja representada por este punto.

PROPIEDADES. La integral (✳) posee las mismas propiedades que la integral curvilínea de segundo tipo (véase la pág. 475) a saber, al cambiar la dirección del camino de integración la integral cambia de signo; si se divide el camino de integración en varias partes, el valor de la integral será igual a la suma de las integrales sobre cada una de sus partes separadas.

*Acotación de la integral.* Si la longitud del camino $\overset{\frown}{AB}$ es igual a $s$, y para $z$ el valor absoluto de $f(z)$ no es superior en este camino al número positivo $M$ [$|f(z)| \leqslant M$], entonces

$$\left| \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz \right| \leqslant Ms.$$

CÁLCULO DE LA INTEGRAL. Si la función integrando $f(z)$ tiene la forma $u(x, y)+iv(x, y)$, el camino de integración $AB$ está definido por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ y los valores de $t$ en el punto inicial $A$ y en el final $B$ del camino de integración son iguales a $t_A$ y $t_B$, respectivamente; entonces la integral (✳) se expresa mediante integrales curvilíneas de funciones de variables reales del modo siguiente:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} = u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy + i \int_{\overset{\frown}{AB}} v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy,$$

las cuales se calculan según las reglas indicadas en las págs. 473-476.

INDEPENDENCIA DE LA INTEGRAL DEL CAMINO DE INTEGRACIÓN. La condición necesaria y suficiente para que la integral (✳) de una función de variable compleja, definida en una región simplemente conexa*, no dependa del camino que una dos puntos fijos $A(z_A)$ y $B(z_B)$, es que la función sea analítica en esta región, es decir, que se verifiquen las condiciones de Cauchy-Riemann (véase la pág. 581). Si, cumpliéndose estas condiciones, se fija el punto inicial $A_0(z_0)$ y se hace variable el punto final $M(z)$ del camino de integración, entonces

$$\int_{\overset{\frown}{A_0M}} f(z)\, dz = F(z),$$

siendo $F'(z) = f(z)$; la función $F(z)$ se llama *primitiva* de la función analítica $f(z)$. La función primitiva depende de la elección del punto inicial $A_0$; la forma general de todas las funciones primitivas posibles de $f(z)$, es:

$$F(z)+C = \int f(z)\, dz \qquad (\textit{integral indefinida}).$$

---

* Sobre las regiones simplemente conexas, véase la pág. 334. En el caso de las regiones múltiplemente conexas la condición puede no cumplirse.

Las integrales indefinidas de las funciones elementales de variable compleja se calculan por las mismas fórmulas que las integrales de las mismas funciones de variable real.

Fórmula fundamental del cálculo integral. La integral (*) de una función analítica $f(z)$ es igual al incremento de la función primitiva al pasar del punto inicial del camino de integración al final:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz = F(z_B) - F(z_A).$$

La integral a lo largo de un camino cerrado $C$, de una función $f(z)$ que es analítica en toda la región simplemente conexa limitada por este camino, es igual a cero (teorema de Cauchy); si esta región contiene

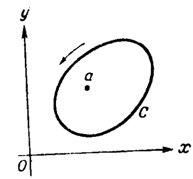



Fig. 384

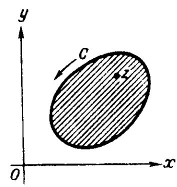



Fig. 385

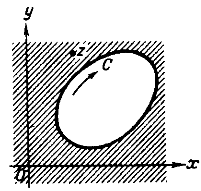



Fig. 386

puntos singulares, la integral se calcula por el teorema de los residuos (véase la pág. 593). En particular, para la función $f(z) = \frac{1}{z-a}$, que tiene el único punto singular $z = a$, la integral sobre un camino cerrado que encierra este punto y recorrido en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj (fig. 384), es igual a

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i.$$

Fórmulas de Cauchy. Si la función $f(z)$ es analítica en una región simplemente conexa, su valor en cualquier punto $z$ de esta región, así como los valores de sus derivadas de cualquier orden, se expresan mediante los valores de esta función en un circuito cerrado $C$ que encierre este punto (fig. 385), por las siguientes *fórmulas de Cauchy*:

$$\left.\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta, \\ f''(z) &= \frac{2}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\,d\zeta, \ \ldots, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

donde $\zeta$ es la variable de integración; las integrales se toman sobre el circuito $C$ en dirección **contraria** a la del movimiento de las agujas del reloj.

Si la función $f(z)$ es analítica en toda la parte del plano que está situado en el **exterior** del circuito $C$, entonces el valor de $f(z)$ y los de sus derivadas en cualquier punto $z$ de esta región (fig. 386) se expresa por las mismas fórmulas ($*$), pero las integrales sobre $\overset{\curvearrowright}{C}$ se toman en la dirección del movimiento de las agujas del reloj.

Las fórmulas de Cauchy permiten hallar los valores de algunas integrales definidas.

*Ejemplo:* Haciendo $f(z) = e^z$ (función analítica en todo el plano) y tomando por circuito $C$ una circunferencia de centro $z$ y radio $r$ (su ecuación es $\zeta = z + re^{i\varphi}$, véase la pág. 578), obtenemos según la última de las fórmulas ($*$):

$$e^z = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\overset{\curvearrowleft}{C}} \frac{e^{\zeta}}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{e^{z+re^{i\varphi}}}{r^{n+1}e^{i\varphi(n+1)}}\,ire^{i\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{n!}{2\pi r^n}\int\limits_0^{2\pi} e^z + r\cos\varphi + ir \operatorname{sen}\varphi - in\varphi\,d\varphi,$$

de donde

$$\frac{2\pi r^n}{n!} = \int\limits_0^{2\pi} e^r \cos\varphi + i(r \operatorname{sen}\varphi - n\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} e^r \cos\varphi\,[\cos(r \operatorname{sen}\varphi - n\varphi)]\,d\varphi +$$

$$+ i\int\limits_0^{2\pi} e^r \cos\varphi\,[\operatorname{sen}(r \operatorname{sen}\varphi - n\varphi)]\,d\varphi.$$

Como la parte imaginaria es igual a cero, resulta el valor de la integral:

$$\int_0^{2\pi} e^r \cos\varphi \cos(r \operatorname{sen}\varphi - n\varphi)\, d\varphi = \frac{2\pi r^n}{n!}.$$

## 8. *Desarrollo de las funciones analíticas en series de potencias*

Serie de Taylor. Toda función analítica $f(z)$ en el interior de un círculo con el centro en $a$, se puede expresar unívocamente, en todos los puntos del interior de este círculo, en forma de una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

donde los coeficientes del desarrollo $c_n$ son números complejos, definidos por la fórmula:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Por lo tanto,

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \dots \quad (\textit{serie de Taylor}).$$

Véase en las págs. 573-574 los desarrollos de las funciones $e^z$, sen $z$, cos $z$, sh $z$, ch $z$ en series de potencias.

Serie de Laurent. Toda función analítica $f(z)$ en el interior de un anillo formado por dos círculos concéntricos con centro $a$*, puede expresarse unívocamente en forma de una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots \\ \dots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_{-2}(z-a)^{-2} + \dots \\ \dots + c_{-n}(z-a)^{n} + \dots \end{array} \right. \qquad (*)$$

* El radio del círculo interior puede ser igual a cero y entonces el anillo se convierte en un círculo, del cual se ha eliminado un punto, su centro.

(*serie de Laurent*), donde los coeficientes del desarrollo $c_n$ son números complejos, definidos por las fórmulas

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (\zeta - a)^{-n-1} f(\zeta)\, d\zeta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

($C$ es un circuito cerrado tomado en el interior del anillo, que encierra el punto $a$ y recorrido en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj).

Puntos singulares. Si la función $f(z)$ es analítica en un entorno del punto $a$*, el carácter del punto $a$ se determina según el tipo del desarrollo de la función en serie de Laurent ($*$) en el entorno de este punto, de la siguiente manera:

1) Si la serie ($*$) no contiene términos con potencias negativas de $z-a$ ($c_n = 0$, si $n < 0$), la serie de Laurent se convierte en la serie de Taylor**; la función $f(z)$ es analítica en el propio punto, si $f(a) = c_0$ o si $a$ es un punto singular evitable.

2) Si la serie ($*$) contiene un número finito de términos con potencias negativas de $z-a$ ($c_m \neq 0$ y todos los $c_n = 0$, para $n < m < 0$), el punto $a$ es un polo (véase la pág. 582) de la función $f(z)$ (*polo de m-ésimo orden*).

3) Si la serie ($*$) contiene infinitos términos con potencias negativas de $z-a$, el punto $a$ es un *punto singular esencial* (véase la pág. 584).

En los casos 2) y 3) el coeficiente $c_{-1}$ de $(z-a)^{-1}$ en la serie de Laurent, se llama *residuo* de la función $f(z)$ en el punto $z = a$:

$$\operatorname*{Res.}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)\, d\zeta. \qquad (**)$$

Teorema de los residuos. De la definición ($**$) se deduce el siguiente teorema que permite calcular la integral sobre un circuito cerrado que encierra puntos singulares (pág. 590): la integral

$$\oint_C f(z)\, dz,$$

* Véase la llamada ** de la pág. 582.

** En este caso, según las fórmulas de Cauchy (pág. 591), sus coeficientes son iguales a

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (\zeta - a)^{-n-1} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

tomada sobre un circuito cerrado en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj, de una función $f(z)$ que es analítica en toda la región simplemente conexa encerrada por el circuito, a excepción de un número finito de puntos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (fig. 387), es igual al producto de $2\pi i$ por la suma de los residuos en todos estos puntos singulares:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,[\operatorname*{Res.}_{z=a_1} f(z) + \operatorname*{Res.}_{z=a_2} f(z) + \ldots + \operatorname*{Res.}_{z=a_k} f(z)]\,.$$

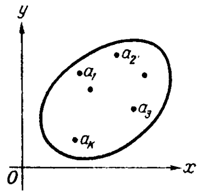


Fig. 387

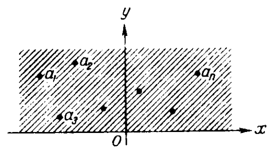


Fig. 388

El residuo en un polo de $m$-ésimo orden puede calcularse por la fórmula.

$$\operatorname*{Res.}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\,[f(z)\cdot(z-a)^m]\Big|_{z=a}\,. \qquad (1)$$

Si $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, donde $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ son funciones analíticas en el punto $z = a$, y $a$ es una raíz simple (véase la pág. 158) de la ecuación $\psi(z) = 0$ [es decir, $\psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$], el punto $z = a$ es un polo (de primer orden) de la función $f(z)$ y la fórmula (1) da

$$\operatorname*{Res.}_{z=a} \left[\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right] = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}\,. \qquad (2)$$

Si $a$ es una raíz múltiple, de orden $m$, de la ecuación $\psi(z) = 0$ [es decir, $\psi(a) = \psi'(a) = \ldots = \psi^{(m-1)}(a) = 0, \psi^{(m)}(a) \neq 0$], el punto $z = a$ es un polo de $m$-ésimo orden de la función $f(z)$.

Aplicación al cálculo de integrales definidas. El teorema de los residuos permite hallar algunas integrales definidas de las funciones de variable real. Si $f(z)$ es una función analítica en todo el semiplano superior, incluyendo también el eje real, a excepción de un número finito de puntos singulares $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, situados por encima del eje real (fig. 388), y el número "cero" es una raíz múltiple de la ecuación $f\left(\frac{1}{z}\right) =$

$= 0$, de orden $m \geqslant 2$*, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{Res.}_{z=a_i} f(z). \qquad (*)$$

*Ejemplo*: Calcular la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.

La ecuación $f\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^3} = \dfrac{x^6}{(x^2+1)^3} = 0$ tiene la raíz múltiple de sexto orden $x = 0$. En el semiplano superior la función $w = \dfrac{1}{(1+z^2)^3}$ tiene un solo punto singular $z = i$, que es un polo de tercer orden**.

Según la fórmula (1)

$$\operatorname*{Res.}_{z=i} \frac{1}{(1+z^2)^3} = \frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(z-i)^3}{(1+z^2)^3}\right]_{z=i}.$$

Calculando $\dfrac{d^2}{dz^2}\left(\dfrac{z-i}{1+z^2}\right)^3 = \dfrac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-3} = 12(z+i)^{-5}$, obtenemos $\operatorname*{Res.}_{z=i} \dfrac{1}{(1+z^2)^3} = 6(z+i)^{-5}_{z=i} = \dfrac{6}{(2i)^5} = -\dfrac{3}{16}i$ y según la fórmula $(*)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(-\frac{3}{16}i\right) = \frac{3}{8}\pi.$$

---

* Véase la pág. 158.

** La ecuación $(1+z^2)^3 = 0$ tiene dos raíces triples: $i$ e $-i$.

# II. CÁLCULO VECTORIAL

## A. ALGEBRA VECTORIAL Y FUNCIÓN VECTOR DE UN ESCALAR

### *1. Conceptos fundamentales*

MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES. Las magnitudes cuyos valores pueden representarse por números positivos o negativos ("escalares") se llaman *escalares* (masa, temperatura, trabajo, etc.); las magnitudes cuyos valores se determinan tanto por sus dimensiones como por sus direcciones en el espacio, se llaman *vectoriales* (fuerza, velocidad, aceleración, intensidad de un campo eléctrico y de un magnético, etc.) y pueden representarse por vectores.

UN VECTOR es un segmento (fig. 389) que tiene una longitud y dirección determinada (se representa por $\overline{AB}$, **a**, **b**, **c**, ..., a veces $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ó $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$).

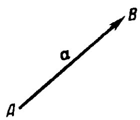


Fig. 389

*A* es el *origen* y *B*, el *extremo* del vector; la longitud del vector *a* (el **módulo** o valor absoluto) se representa por *a* o $|\mathbf{a}|$. El *vector nulo* (0) es el vector cuyo extremo y origen coinciden; su módulo es igual a cero y la dirección es indeterminada. Dos vectores **a** y **b** se consideran *iguales*, si son iguales sus módulos y coinciden sus direcciones (es decir, si los vectores son paralelos y están orientados hacia un mismo lado*).

Los vectores *colineales* son paralelos a una misma recta, los *coplanares* son paralelos a un mismo plano. Los *vectores opuestos* entre sí tienen igual longitud y llevan direcciones opuestas: $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{BA} = -\mathbf{a}$. Los *vectores unitarios* son aquellos cuyos módulos son iguales a 1; el vector unitario cuya dirección coincide con la del vector **a** se representa

---

* Según esta definición, un vector no varía si se le traslada paralelamente a sí mismo, de modo que su origen caiga en cualquier punto del espacio. Tales vectores forman un sistema de vectores *libres*. En algunos problemas de mecánica se consideran vectores cuyos orígenes están fijados en un punto determinado del espacio (sistema de vectores *fijos*), o que pueden ser trasladados sólo a los puntos situados en una recta a lo largo de la dirección del vector (sistema de vectores *axiales* o *deslizantes*).

por $\mathbf{a}^0$ y se llama *versor* de esta dirección. El vector $\mathbf{a}$ se puede representar en la forma: $\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0$, donde $a$ es el módulo del vector $\mathbf{a}$. Los versores que llevan la dirección de los ejes de coordenadas rectangulares $Ox$, $Oy$, $Oz$ (hacia el lado de crecimiento de la coordenada)*, se designan con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (fig. 390).

RADIO VECTOR DE UN PUNTO. El vector $\overline{OM}$ cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y cuyo extremo está situado en el punto $M$ (véase la fig. 390), determina completamente este punto y se llama *radio vector* del punto $M$ (se designa con $\mathbf{r}$). En este caso, el origen $O$ se llama *polo*.

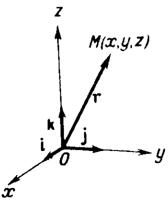



Fig. 390

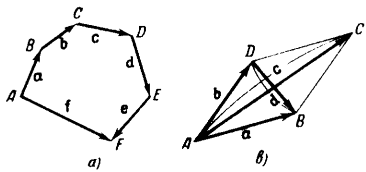



Fig. 391

COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES. La *suma* de varios vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots, \mathbf{e}$ es un vector $\mathbf{f} = \overline{AF}$, que cierra la poligonal $ABCDEF$ formada por los vectores sumandos (fig. 391, $a$); la suma de dos vectores $\overline{AB} = \mathbf{a}$ y $\overline{AD} = \mathbf{b}$ (fig. 391, $b$), el vector $\overline{AC} = \mathbf{c}$ que representa la diagonal del paralelogramo $ABCD$. Las propiedades fundamentales de suma son:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}, \quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \quad |\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|.$$

Se llama *diferencia* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ a la suma de los vectores $\mathbf{a}$ y $-\mathbf{b}$ (la diagonal $DB$ en la fig. 391, $b$); $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b}) = \mathbf{d}$; propiedades de la diferencia: $\mathbf{a}-\mathbf{a} = 0$ (el vector nulo) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a}|-|\mathbf{b}|$.

Se llama ***producto de un escalar por un vector*** ($\alpha\mathbf{a}$ ó $\mathbf{a}\alpha$) al vector que es colineal al vector $\mathbf{a}$, cuya longitud es igual a $|\alpha|\, a$ y cuya dirección coincide con la de $\mathbf{a}$, si $\alpha > 0$ y es opuesta, si $\alpha < 0$; las propiedades de este producto son:

$$\alpha\mathbf{a} = \mathbf{a}\alpha, \quad \alpha\beta\mathbf{a} = \beta\alpha\mathbf{a}, \quad (\alpha+\beta)\,\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}, \quad \alpha\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}.$$

* En este capítulo se admite un sistema de coordenadas dextrógiro o de mano derecha (véase la pág. 248).

*Combinación lineal* de los vectores **a**, **b**, ..., **d** con los coeficientes $\alpha, \beta, \ldots, \delta$ (escalares) es el vector

$$\mathbf{k} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+ \ldots +\delta\mathbf{d}. \qquad (*)$$

Cualquier vector **a** puede descomponerse unívocamente en una suma de tres vectores paralelos a tres vectores dados (no coplanares) **u**, **v**, **w** (fig. 392, *a*):

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+\gamma\mathbf{w}; \qquad (**)$$

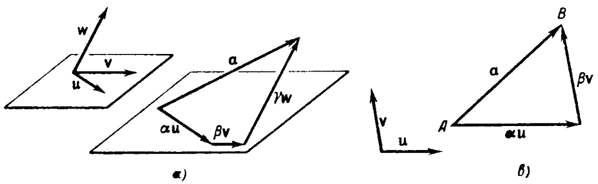



Fig. 392

los sumandos $\alpha\mathbf{u}$, $\beta\mathbf{v}$, $\gamma\mathbf{w}$ se llaman *componentes* y los factores escalares $\alpha, \beta, \gamma$, *coeficientes* de esta descomposición. Los vectores paralelos a un plano pueden expresarse en la forma $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}$, donde **u** y **v** son dos vectores no colineales dados (fig. 392, *b*).

COORDENADAS DE UN VECTOR. *Coordenadas cartesianas rectangulares.* Según la fórmula $(**)$, cada vector $\overline{AB} = \mathbf{a}$ en el espacio puede descomponerse unívocamente en una suma de vectores paralelos a los versores **i**, **j**, **k** (véase la pág. 597):

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}; \qquad (1)$$

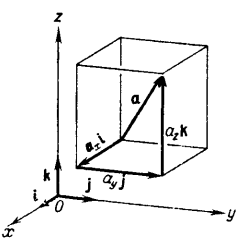



Fig. 393

los escalares $a_x, a_y, a_z$ se llaman *coordenadas cartesianas rectangulares* del vector **a** en el sistema **i**, **j**, **k**; la notación es:

$$\mathbf{a}\,\{a_x, a_y, a_z\}; \qquad (2)$$

La notación (2) es equivalente a la (1). Las coordenadas cartesianas rectangulares de un vector son las proyecciones de este vector sobre los ejes coordenados $Ox$, $Oy$, $Oz$, (fig. 393).

En una traslación paralela del vector, sus coordenadas no varían.

Las coordenadas de una combinación lineal de varios vectores son iguales a las mismas combinaciones lineales de estos vectores, o sea, de la igualdad vectorial (✳) se deducen las tres igualdades escalares:

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \alpha a_x+\beta b_x+ \dots +\delta d_x, \\ k_y &= \alpha a_y+\beta b_y+ \dots +\delta d_y, \\ k_z &= \alpha a_z+\beta b_z+ \dots +\delta d_z. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

En particular, para las coordenadas de la suma o de la diferencia de dos vectores se tiene: $\mathbf{c} = \mathbf{a}\pm\mathbf{b}$,

$$c_x = a_x\pm b_x, \quad c_y = a_y\pm b_y, \quad c_z = a_z\pm b_z. \tag{4}$$

Las coordenadas cartesianas rectangulares del radio vector $\mathbf{r}$ del punto $M(x, y, z)$ son iguales a las coordenadas correspondientes de este punto:

$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z; \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

*Coordenadas afines*. La generalización de las coordenadas cartesianas rectangulares de un vector son sus coordenadas afines en el sistema $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, es decir, los coeficientes $a^1$, $a^2$, $a^3$ de la descomposición del vector $\mathbf{a}$ en las direcciones de tres vectores no coplanares dados $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3 \tag{1'}$$

o empleando la notación equivalente

$$\mathbf{a}\{a^1, a^2, a^3\}^*. \tag{2'}$$

Las fórmulas (1′) y (2′) se transforman en (1) y (2) para $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Análogamente, para las coordenadas de la combinación lineal de vectores (✳) y para la suma o la diferencia de los vectores (4), se cumplen las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} k^1 &= \alpha a^1+\beta b^1+ \dots +\delta d^1, \\ k^2 &= \alpha a^2+\beta b^2+ \dots +\delta d^2, \\ k^3 &= \alpha a^3+\beta b^3+ \dots +\delta d^3, \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

$$c^1 = a^1\pm b^1, \quad c^2 = a^2\pm b^2, \quad c^3 = a^3\pm b^3. \tag{4'}$$

* Los índices superiores no se deben confundir con el exponente de una potencia Esta forma de escribir los coeficientes es conveniente, pues los escalares $a^1$, $a^2$, $a^3$ son las coordenadas contravariantes del vector $\mathbf{a}$ (véase la pág. 604).

## 2. *Multiplicación de vectores*

MULTIPLICACIÓN ESCALAR DE VECTORES. Se llama *producto escalar* de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (se representa por $\mathbf{ab}$) al escalar definido por la igualdad $\mathbf{ab} = ab\cos\varphi$, donde $\varphi$ es el ángulo formado por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ reducidos a un origen común (fig. 394).

MULTIPLICACIÓN VECTORIAL DE VECTORES. Se llama *producto vectorial* de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (se representa por $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ó $[\mathbf{ab}]$), al vector $\mathbf{c}$ cuya longitud es igual a $ab$ sen $\varphi$ (es decir, es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ como lados) y cuya dirección es perpendicular a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, formando los tres vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ una terna de mano derecha (es decir, que después de hacer coincidir los orígenes de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, la rotación más corta de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ sea contraria a la de las agujas del reloj para un observador que está situado en el extremo del vector $\mathbf{c}$ (véase la fig. 395).

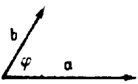


Fig. 394

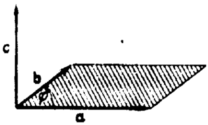


Fig. 395

PROPIEDADES DE LOS PRODUCTOS DE VECTORES.

$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (propiedad conmutativa, pero $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ (al permutar los factores, el producto vectorial cambia su dirección por la contraria);

$\alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}$ y $\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}$ (propiedad asociativa con respecto al factor escalar $\alpha$);

$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) \neq (\mathbf{ab})\mathbf{c}$ y $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (en estos casos no se cumple la propiedad asociativa);

$\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{ab}+\mathbf{ac}$ y $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ (propiedad distributiva);

$\mathbf{ab} = 0$, si $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (condición de perpendicularidad de los vectores;

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$, si $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ (condición de colinealidad de los vectores); $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2 = a^2$, pero $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0$.

Las combinaciones lineales de vectores se pueden multiplicar como polinomios escalares, pero con la diferencia de que, para la multiplicación vectorial, al permutar los factores (por ejemplo, al reducir términos semejantes), se debe cambiar el signo

*Ejemplos:* 1) $(3\mathbf{a}+5\mathbf{b}-2\mathbf{c})(\mathbf{a}-2\mathbf{b}-4\mathbf{c}) = 3\mathbf{a}^2+5\mathbf{ba}-2\mathbf{ca}-6\mathbf{ab}-10\mathbf{b}^2+4\mathbf{cb}-12\mathbf{ac}-20\mathbf{bc}+8\mathbf{c}^2 = 3\mathbf{a}^2-10\mathbf{b}^2+8\mathbf{c}^2-\mathbf{ab}-14\mathbf{ac}-16\mathbf{bc}$.

2) $(3\mathbf{a}+5\mathbf{b}-2\mathbf{c})\times(\mathbf{a}-2\mathbf{b}-4\mathbf{c}) = 3\mathbf{a}\times\mathbf{a}+5\mathbf{b}\times\mathbf{a}-2\mathbf{c}\times\mathbf{a}-6\mathbf{a}\times\mathbf{b}-10\mathbf{b}\times\mathbf{b}+4\mathbf{c}\times\mathbf{b}-12\mathbf{a}\times\mathbf{c}-20\mathbf{b}\times\mathbf{c}+8\mathbf{c}\times\mathbf{c} = 0-5\mathbf{a}\times\mathbf{b}+2\mathbf{a}\times\mathbf{c}-6\mathbf{a}\times\mathbf{b}+0-4\mathbf{b}\times\mathbf{c}-12\mathbf{a}\times\mathbf{c}-20\mathbf{b}\times\mathbf{c}+0 = -11\mathbf{a}\times\mathbf{b}-10\mathbf{a}\times\mathbf{c}-24\mathbf{b}\times\mathbf{c} = 11\mathbf{b}\times\mathbf{a}+10\mathbf{c}\times\mathbf{a}+24\mathbf{c}\times\mathbf{b}$.

MULTIPLICACIONES REITERADAS DE VECTORES. *El producto vectorial doble* $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ es un vector que es coplanar a **b** y **c** y puede calcularse por la fórmula

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac})-\mathbf{c}(\mathbf{ab}).$$

*El producto mixto* $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ es un número que es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los vectores **a**, **b**, **c** y que se toma con signo «+» si **a**, **b**, **c** forman una terna de mano derecha y con signo «−» si los mismos forman una terna de mano izquierda (véase más arriba). Generalmente, en el producto mixto se omiten los paréntesis y el signo: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{abc}$.

$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba}$ (la permutación de dos factores cambia el signo al producto mixto; la permutación cíclica de los tres factores, no lo cambia).

*Fórmulas para "productos complicados"*

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd})-(\mathbf{bc})(\mathbf{ad}) \quad \textit{(identidad de Lagrange)};$$

$$\mathbf{abc}\cdot\mathbf{efg} = \begin{vmatrix} \mathbf{ae} & \mathbf{af} & \mathbf{ag} \\ \mathbf{be} & \mathbf{bf} & \mathbf{bg} \\ \mathbf{ce} & \mathbf{cf} & \mathbf{cg} \end{vmatrix}.$$

EXPRESIÓN DE LOS PRODUCTOS EN COORDENADAS CARTESIANAS RECTANGULARES. Si los vectores **a**, **b**, **c** están dados en coordenadas *cartesianas* rectangulares

$$\mathbf{a}\{a_x,\ a_y,\ a_z\}, \quad \mathbf{b}\{b_x,\ b_y,\ b_z\}, \quad \mathbf{c}\{c_x,\ c_y,\ c_z\},$$

los productos de los vectores se calculan por las fórmulas siguientes:

*Producto escalar:* $\mathbf{ab} = a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$. (1)

*Producto vectorial:*

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_yb_z-a_zb_y)\,\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

*Producto mixto:* $$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

EXPRESIONES DE LOS PRODUCTOS EN COORDENADAS AFINES. *Coeficientes métricos y los vectores recíprocos.* Dadas las coordenadas afines de los vectores **a** y **b** en el sistema $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1+b^2\mathbf{e}_2+b^3\mathbf{e}_3,$$

para calcular el producto escalar,

$$\mathbf{ab} = a^1b^1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a^2b^2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + a^3b^3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 + (a^1b^2 + a^2b^1)\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \\ + (a^2b^3 + a^3b^2)\,\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + (a^3b^1 + a^1b^3)\,\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \qquad \text{(A)}$$

o el producto vectorial,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a^2b^3 - a^3b^2)\,\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 + (a^3b^1 - a^1b^3)\,\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 + (a^1b^2 - a^2b^1)\,\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 \qquad \text{(B)}$$

$$\text{(puesto que } \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3 = 0),$$

es necesario conocer los valores de los productos, dos a dos, de los vectores básicos, es decir, para el producto escalar hay que conocer seis números *(los coeficientes métricos)*:

$$g_{11} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1, \quad g_{22} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2, \quad g_{33} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3,$$
$$g_{12} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1, \quad g_{23} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2, \quad g_{31} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3,$$

y para el producto vectorial, tres vectores *(los vectores **recíprocos** a* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$):

$$\mathbf{e}^1 = \Omega(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{e}^2 = \Omega(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{e}^3 = \Omega(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2),$$

donde el coeficiente $\Omega$, que es igual al valor recíproco del producto mixto de los vectores básicos

$$\Omega = \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3},$$

se introduce para simplificar las fórmulas ulteriores.

*«Tablas de multiplicación» de los vectores básicos.*

Multiplicación escalar

| | $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{e}_1$ | $g_{11}$ | $g_{12}$ | $g_{13}$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $g_{21}$ | $g_{22}$ | $g_{23}$ |
| $\mathbf{e}_3$ | $g_{21}$ | $g_{32}$ | $g_{33}$ |

$(g_{ki} = g_{ik})$

Multiplicación vectorial:

Multiplicadores

| Multiplicandos | $\mathbf{e}_1$ | $\mathbf{e}_2$ | $\mathbf{e}_3$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{e}_1$ | 0 | $\mathbf{e}^3/\Omega$ | $-\mathbf{e}^2/\Omega$ |
| $\mathbf{e}_2$ | $-\mathbf{e}^3/\Omega$ | 0 | $\mathbf{e}^1/\Omega$ |
| $\mathbf{e}_3$ | $\mathbf{e}^2/\Omega$ | $-\mathbf{e}^1/\Omega$ | 0 |

En coordenadas cartesianas rectangulares ($\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$), los coeficientes métricos son:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1,$$
$$g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0,$$
$$\Omega = \frac{1}{\mathbf{ijk}} = 1;$$

los vectores recíprocos $\mathbf{e}^1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{e}^2 = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}^3 = \mathbf{k}$ coinciden con los básicos y las tablas de multiplicación tienen la forma:

Multiplicación escalar

| | **i** | **j** | **k** |
|---|---|---|---|
| **i** | 1 | 0 | 0 |
| **j** | 0 | 1 | 0 |
| **k** | 0 | 0 | 1 |

Multiplicación vectorial:

**Multiplicadores**

| **Multiplicandos** | **i** | **j** | **k** |
|---|---|---|---|
| **i** | 0 | **k** | −**j** |
| **j** | −**k** | 0 | **i** |
| **k** | **j** | −**i** | 0 |

*Producto escalar en coordenadas.* Según la fórmula (A)

$$\mathbf{ab} = \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} g_{mn} a^m a^n = g_{\alpha\beta} a^\alpha a^\beta *. \tag{1''}$$

Para las coordenadas cartesianas rectangulares, la fórmula (1″) se transforma en la (1) de la pág. 601.

*Producto vectorial en coordenadas.* Según la fórmula (B)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}^1 & \mathbf{e}^2 & \mathbf{e}^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3} [(a^2b^3 - a^3b^2)\,\mathbf{e}^1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\,\mathbf{e}^2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\,\mathbf{e}^3]. \tag{2''}$$

Para las coordenadas cartesianas rectangulares, la fórmula (2″) se transforma en la (2) de la pág. 601.

*Producto mixto en coordenadas:*

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \tag{3''}$$

---

* La última parte de la igualdad (1″) es la expresión abreviada de la suma, admitida en el análisis tensorial: en lugar de toda la suma se escribe sólo uno de sus términos típicos; además, se supone que el índice que se encuentra en este término dos veces (una vez arriba y otra vez abajo), y que se designa con una letra griega *("el índice de sumación")* recorre todos los valores desde 1 hasta 3.
Por lo tanto,

$$g_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta = g_{11}a^1b^1 + g_{12}a^1b^2 + g_{13}a^1b^3 + g_{21}a^2b^1 + g_{22}a^2b^2 + g_{23}a^2b^3 + g_{31}a^3b^1 + g_{32}a^3b^2 + g_{33}a^3b^3.$$

Para las coordenadas cartesianas rectangulares, la fórmula (3″) se transforma en la (3) de la pág. 601.

ECUACIONES VECTORIALES

**x** es el vector incógnito, **a**, **b**, **c**, **d** son vectores conocidos
$x$, $y$, $z$ son escalares incógnitos, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ son escalares conocidos.

| Ecuación | Solución |
|---|---|
| 1) $\mathbf{x}+\mathbf{a} = \mathbf{b}$ | $\mathbf{x} = \mathbf{b}-\mathbf{a}$ |
| 2) $\mathbf{x}\alpha = \mathbf{a}$ | $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{a}}{\alpha}$ |
| 3) $\mathbf{x}\mathbf{a} = \alpha$ | La ecuación es indeterminada; si a todos los vectores **x*** que verifican a esta ecuación se les trasladan sus orígenes a un punto, entonces sus extremos se encontrarán en un plano perpendicular al vector **a**. La ecuación 3) se llama *ecuación vectorial de* este *plano*. |
| 4) $\mathbf{x}\times\mathbf{a} = \mathbf{b}\ (\mathbf{b}\perp\mathbf{a}$ | La ecuación es indeterminada: si a los vectores **x** que verifican a esta ecuación se les trasladan sus orígenes a un punto, entonces sus extremos se encontrarán en una recta paralela al vector **a**. La ecuación 4) se llama *ecuación vectorial de* esta *recta*. |
| 5) $\begin{cases}\mathbf{x}\mathbf{a} = \alpha\\ \mathbf{x}\times\mathbf{a} = \mathbf{b}\ (\mathbf{b}\perp\mathbf{a})\end{cases}$ | $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{a}\alpha+\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{a^2}$ |
| 6) $\begin{cases}\mathbf{x}\mathbf{a} = \alpha\\ \mathbf{x}\mathbf{b} = \beta\\ \mathbf{x}\mathbf{c} = \gamma\end{cases}$ | $\mathbf{x} = \dfrac{\alpha(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\beta(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\gamma(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{abc}} =$ $= \alpha\tilde{\mathbf{a}}+\beta\tilde{\mathbf{b}}+\gamma\tilde{\mathbf{c}}$, donde $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}$ son los vectores recíprocos a **a**, **b**, **c** (véase la pág. 601). — |
| 7) $\mathbf{d} = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ | $x = \dfrac{\mathbf{dbc}}{\mathbf{abc}},\quad y = \dfrac{\mathbf{adc}}{\mathbf{abc}},\quad z = \dfrac{\mathbf{abd}}{\mathbf{abc}}$ |
| 8) $\mathbf{d} = x(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+$ $+y(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+z(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ | $x = \dfrac{\mathbf{da}}{\mathbf{abc}},\quad y = \dfrac{\mathbf{db}}{\mathbf{abc}},\quad z = \dfrac{\mathbf{dc}}{\mathbf{abc}}$ |

## 3. *Coordenadas covariantes y contravariantes de un vector*

**DEFINICIONES.** Las coordenadas afines $a^1$, $a^2$, $a^3$ de un vector **a** en el sistema $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, definidas por la fórmula:

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3 = a^\alpha\mathbf{e}_\alpha{}^*,$$

* Véase la llamada de la pág. 603.

se llaman también *coordenadas contravariantes* de este vector, a diferencia de sus *coordenadas covariantes* que son los coeficientes de la descomposición del vector según los tres vectores $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$, recíprocos a $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (véase la pág. 601). Las coordenadas covariantes del vector **a** se designan por $a_1$, $a_2$, $a_3$:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = a_\alpha \mathbf{e}^\alpha.$$

En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, las coordenadas covariantes del vector coinciden con las contravariantes.

EXPRESIONES DE LAS COORDENADAS MEDIANTE PRODUCTOS ESCALARES. La coordenada covariante del vector **a** es igual al producto escalar de este vector por el vector básico correspondiente:

$$a_1 = \mathbf{a}\mathbf{e}_1, \quad a_2 = \mathbf{a}\mathbf{e}_2, \quad a_3 = \mathbf{a}\mathbf{e}_3. \tag{a}$$

La coordenada contravariante del vector a es igual al producto escalar de este vector por el vector recíproco correspondiente:

$$a^1 = \mathbf{a}\mathbf{e}^1, \quad a^2 = \mathbf{a}\mathbf{e}^2, \quad a^3 = \mathbf{a}\mathbf{e}^3. \tag{b}$$

Para las coordenadas cartesianas rectangulares, las fórmulas (a) y (b coinciden:

$$a_x = \mathbf{a}\mathbf{i}, \quad a_y = \mathbf{a}\mathbf{j}, \quad a_z = \mathbf{a}\mathbf{k}.$$

EXPRESIÓN DEL PRODUCTO ESCALAR EN COORDENADAS. La fórmula (1″) de la pág. 603 daba la expresión del producto escalar de dos vectores mediante sus coorderadas contravariantes. En coordenadas covariantes le corresponde la fórmula

$$\mathbf{ab} = g^{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta,$$

donde $g^{mn} = \mathbf{e}^m\mathbf{e}^n$ son los coeficientes métricos en el sistema de vectores recíprocos; éstos están ligados con los coeficientes $g_{mn}$ mediante la relación

$$g^{mn} = \frac{(-1)^{m+n}A^{mn}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}},$$

donde $A^{mn}$ es el menor del determinante que figura en el denominador, y que resulta, al eliminar la fila y columna que contienen al elemento $g_{mn}$.

Si el vector **a** está dado en coordenadas contravariantes y **b**, en covariantes, su producto escalar es igual a

$$\mathbf{ab} = a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a^\alpha b_\alpha$$

y, análogamente,

$$\mathbf{ab} = a_\alpha b^\alpha.$$

## 4. *Aplicaciones geométricas del álgebra vectorial*

| Denominación | Fórmula vectorial | Fórmula en coordenadas (en coordenadas cartesianas rectangulares) |
|---|---|---|
| Longitud del vector **a** | $a = \sqrt{a^2}$ | $a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$ |
| Área del paralelogramo construido sobre **a** y **b** | $S = \lvert \mathbf{a}\times\mathbf{b} \rvert$ | $S = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$ |
| Volumen del paralelepípedo construido sobre **a**, **b**, **c** | $V = \lvert \mathbf{abc} \rvert$ | $V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$ |
| Ángulo entre **a** y **b** | $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{ab}}{\sqrt{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2}}$ | $\cos\varphi = \dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ \sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$ |

Véanse en las págs. 254-262 y también en la pág. 604 las aplicaciones a la geometría analítica (las ecuaciones vectoriales del plano y la recta).

## *5. Función vectorial de variable escalar*

DEFINICIÓN. Un vector variable $\mathbf{a}$ se llama *función vectorial (función vector)* de la variable escalar $t$, si a cada valor de $t$ le corresponde un valor determinado del vector $\mathbf{a}$.

LA NOTACIÓN ES:

$$\mathbf{a} = \mathbf{f}(t).$$

Expresar una función vectorial en coordenadas

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$$

equivale a dar tres funciones escalares de una variable independiente:

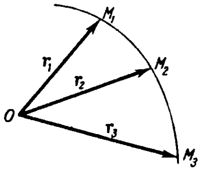


Fig. 396

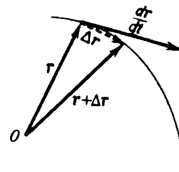


Fig. 397

$$a_x = f_x(t), \quad a_y = f_y(t), \quad a_z = f_z(t).$$

Si se representa al vector variable en forma de radio vector $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ del punto $M$, entonces, al variar $t$, el punto $M$ describe una curva en el espacio (fig. 396), la *hodógrafa* de la función vectorial; su expresión en coordenadas se realiza mediante tres igualdades:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL $\mathbf{a} = \mathbf{f}(t)$:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{f}(t+\Delta t)-\mathbf{f}(t)}{\Delta t},$$

representa una nueva función vectorial de $t$. Interpretación geométrica de la derivada del radio vector: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es el vector **tangente** a la hodógrafa en el punto correspondiente (fig. 397); la longitud de $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ depende de la elección del parámetro $t$. Si $t$ es el tiempo, la función $\mathbf{r}(t)$ determina el movimiento del punto $M$ en el espacio y $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ es, en valor absoluto y en dirección, la velocidad de este movimiento. Si $t$ es la longitud de arco de la hodógrafa (desde un punto del mismo hasta $M$), entonces $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = 1$.

REGLAS DE DERIVACIÓN DE LOS VECTORES:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ \ldots) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}+\frac{d\mathbf{b}}{dt}+\frac{d\mathbf{c}}{dt}+\ \ldots$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{a}+\varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (\varphi \text{ es una función escalar de } t).$$

$\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}$.

$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt}$ (los factores no se pueden permutar, véase la pág. 600)

$\frac{d}{dt}\mathbf{a}[\varphi(t)] = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$.

Si el vector $\mathbf{r}$ es **unitario,** entonces $\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ (la tangente es perpendicular al radio vector, la hodógrafa es una *curva esférica).*

SERIE DE TAYLOR PARA LAS FUNCIONES VECTORIALES:

$$\mathbf{a}(t+h) = \mathbf{a}(t) + h\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\frac{d^n\mathbf{a}}{dt^n} + \ldots$$

La convergencia de esta serie (y de cualquier serie de términos vectoriales) se determina del mismo modo que la convergencia de una serie de términos complejos (véase la pág. 572). Sobre el desarrollo de una función vectorial en serie de Taylor, sólo tiene sentido hablar cuando esta serie es convergente.

La diferencial de la función $\mathbf{a}(t)$ se define por la igualdad

$$d\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\Delta t.$$

## B. TEORÍA DE LOS CAMPOS

### 6. *Campo escalar*

FUNCIONES DEL PUNTO. Una magnitud escalar $U$ que toma valores determinados en cada punto $M$ del espacio, se llama *función* escalar *del punto* o *campo escalar* $U = U(M)$ (por ejemplo, campo de temperatura, potencial, densidad en un medio no homogéneo, etc.). Un campo puede definirse mediante una función escalar del argumento vectorial $\mathbf{r}$ (del radio vector del punto $M$ para un polo dado $O$ (véase la pág. 597):

$$U = U(\mathbf{r}). \tag{1}$$

Un campo definido sólo en los puntos de un plano, se llama campo *plano**.

---

* A veces se llama plano el campo definido en los puntos del espacio y que posee la propiedad de que en todos los puntos de una recta paralela a una dirección constante, la función $U$ tiene un mismo valor. Es más correcto decir que es un campo *plano-paralelo*; su estudio se reduce al estudio del campo en un plano perpendicular a esta dirección.

CAMPO CENTRAL Y CAMPO AXIAL. Si la función toma valores iguales en todos los puntos que se encuentran a igual distancia de un centro $C(\mathbf{r}_1)$ el campo se llama *central* o *esférico;* tal campo depende sólo de la distancia $CM = r$; por ejemplo: $U = r$ (distancia del punto al polo); $U = \frac{c}{r^2}$ (es el campo que representa en cada punto al luminosidad de una fuente central de luz); en general,

$$U = f(r). \tag{2}$$

Si la función toma valores iguales en todos los puntos que están situados a distancias iguales de una recta *(eje del campo)*, el campo se llama *axial* o *cilíndrico.*

EXPRESIÓN DEL CAMPO EN COORDENADAS. Determinando el punto $M$ por sus coordenadas (cartesianas $x$, $y$, $z$, cilíndricas $\rho$, $\varphi$, $z$ o esféricas $r$, $\theta$. $\varphi$*), obtenemos la expresión del campo escalar (1) mediante una función de tres variables:

$$U = \Phi(x, y, z), \quad U = \Psi(\rho, \varphi, z) \quad \text{ó} \quad U = X(r, \theta, \varphi), \tag{1a}$$

y para un campo plano, mediante una función de dos variables (en coordenadas cartesianas o polares):

$$U = \Phi(x, y) \quad \text{ó} \quad U = \Psi(\rho, \varphi) \tag{1b}$$

(las funciones $U$ en (1a) y (1b) se suponen uniformes y continuas en todas partes, a excepción de *puntos, líneas* y *superficies* aislados *de discontinuidad)*. La expresión de un campo central en coordenadas, es:

$$U = U\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = U\left(\sqrt{\rho^2+z^2}\right) = U(r), \tag{2a}$$

de un campo axial, es:

$$U = U\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = U(\rho) = U(r \operatorname{sen} \theta); \tag{3}$$

para el estudio de los campos centrales son más convenientes las coordenadas esféricas; para los axiales, las cilíndricas.

SUPERFICIES Y LÍNEAS DE NIVEL. Los puntos en los cuales la función (1) toma un mismo valor

$$U = \text{const}, \tag{4}$$

forman en el espacio una *superficie de nivel*, cuya ecuación en coordenadas es:

$$U = \Phi(x, y, z) = \text{const}, \quad U = \Psi(\rho, \varphi, z) = \text{const},$$
$$U = X(r, \theta, \varphi) = \text{const}. \tag{4a}$$

Para diferentes const $= U_0, U_1, U_2, \ldots$ se obtienen diferentes superficies; por cada punto pasa sólo una superficie de éstas (a excepción de los puntos en los cuales la función $U$ no está definida unívocamente).

* Véase la pág. 249.

*Ejemplos:* 1) Para el campo $U = \mathbf{cr} = c_x x + c_y y + c_z z$ las superficies de nivel son planos paralelos. 2) Para el campo $U = x^2 + 2y^2 + 4z^2$ las superficies de nivel son elipsoides semejantes y de situación homotética.

Las superficies de nivel de un campo central son esferas concéntricas; las superficies de nivel de un campo axial son cilindros con el eje común.

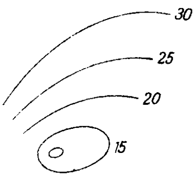



Fig. 398

Para un campo plano la ecuación $U =$ $=$ const representa las *líneas de nivel:*

$$U(x, y) = \text{const}, \quad U(\rho, \varphi) = \text{const} \qquad (4b)$$

En los dibujos, las líneas de nivel se trazan convencionalmente para valores de $U$ que se diferencian entre sí en una cantidad constante, y sobre cada una de ellas se escribe el valor numérico correspondiente de $U$ (fig. 398); por ejemplo: las isobaras en los mapas sinópticos, o las horizontales (líneas de igual altura) en los mapas topográficos. En algunos casos, las líneas de nivel pueden degenerar en puntos aislados y las superficies de nivel en puntos y líneas.

*Ejemplos:* (fig. 399) a) $U = xy$, b) $U = \frac{y}{x^2}$, c) $U = r^2$, d) $U = \frac{1}{r}$.

## 7. *Campo vectorial*

FUNCIÓN VECTORIAL DE UN PUNTO. Una magnitud vectorial $\mathbf{V}$ que toma un valor determinado en cada punto $M$ del espacio, se llama *función vectorial del punto* o *campo vectorial* $\mathbf{V} = \mathbf{V}(M)$ (por ejemplo, el campo de velocidades de las partículas de un líquido en movimiento, un campo de fuerzas, un campo de intensidad eléctrica o magnética, etc.). Un campo puede definirse mediante una función vectorial del argumento vectorial $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}). \qquad (1)$$

Se dice que un campo vectorial es *plano*, si todos los valores de $\mathbf{r}$, así como los de $\mathbf{V}$, están situados en un plano*.

### TIPOS DE CAMPOS VECTORIALES DE USO FRECUENTE

a) *Campo vectorial central* (fig. 400, *a*). Todos los vectores $\mathbf{V}$ están situados en rectas que pasan por un punto determinado *(centro)*. Colocando el polo en el centro, tal campo se determina por la fórmula $\mathbf{V} = f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}$; todos los vectores $\mathbf{V}$ llevan la dirección del radio vector $\mathbf{r}$.

---

* Vease la llamada de la pág. 608. Una situación análoga se tiene para el campo vectorial.

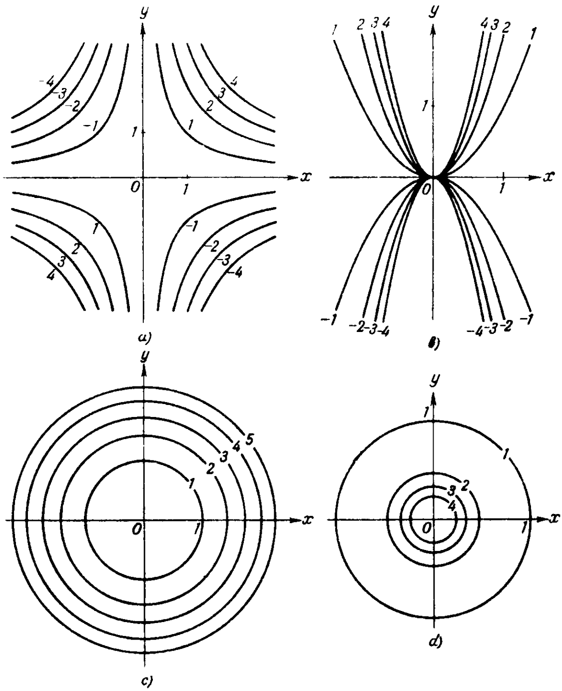



Fig. 399

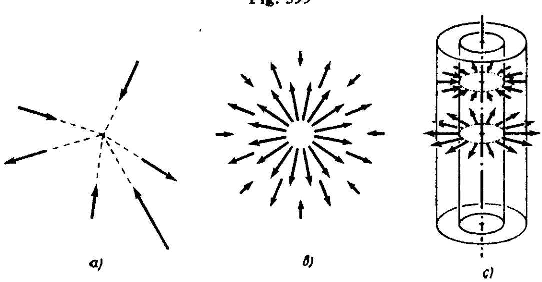



Fig. 400

Es conveniente expresar este campo por la fórmula

$$\mathbf{V} = \varphi(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r};$$

$\varphi(\mathbf{r})$ es la longitud del vector $\mathbf{V}$, $\frac{\mathbf{r}}{r}$ es su versor.

b) *Campo vectorial esférico* (fig. 400, *b*): $\mathbf{V} = \varphi(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$, es un caso particular importante del campo central, en el cual la longitud del vector $\mathbf{V}$ sólo depende de la distancia $|\mathbf{r}|$; por ejemplo, el campo de atracción de Newton (Coulomb) es:

$$\mathbf{V} = \frac{c}{r^3}\mathbf{r} = \frac{c}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

(para un campo plano, éste se llama *campo circular)*.

c) *Campo vectorial cilíndrico* (fig. 400, *c*). Todos los vectores de $\mathbf{V}$: 1) están situados en rectas que pasan por una recta determinada *(eje)* y son perpendiculares a ella, 2) para los puntos que se encuentran a igual distancia del eje, todos los vectores son iguales en valor absoluto y están todos dirigidos o desde el eje o hacia el eje. Poniendo el polo en el eje del campo, definido por el versor $\mathbf{c}$, tal campo se determina por la fórmula $\mathbf{V} = \varphi(\rho) \frac{\mathfrak{r}}{\rho}$, donde $\mathfrak{r}$ es el vector que es la proyección de $\mathbf{r}$ sobre un plano perpendicular al eje $\mathfrak{r} = \mathbf{c}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{c})$. En las intersecciones de este campo por planos perpendiculares al eje, resultan campos circulares iguales.

Expresión del campo en coordenadas. El campo vectorial (1) se puede determinar mediante tres campos escalares $V^1(\mathbf{r})$, $V^2(\mathbf{r})$ y $V^3(\mathbf{r})$, que son los coeficientes de la descomposición de $\mathbf{V}$ con respecto a tres vectores no coplanares cualesquiera $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{V} = V^1\mathbf{e}_1 + V^2\mathbf{e}_2 + V^3\mathbf{e}_3. \tag{2}$$

Si se toman como base los versores de coordenadas $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, y los coeficientes $V^1$, $V^2$, $V^3$ están expresados en coordenadas cartesianas $x$, $y$, $z$, tendremos que

$$\mathbf{V} = V_x(x, y, z)\,\mathbf{i} + V_y(x, y, z)\,\mathbf{j} + V_z(x, y, z)\,\mathbf{k}, \tag{2a}$$

es decir, el campo vectorial se determina por tres funciones escalares de tres variables (expressión del campo en *coordenadas cartesianas)*. En *coordenadas cilíndricas* y *esféricas* los versores, o sea, los vectores $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ $(=\mathbf{k})$ (fig. 401) y $\mathbf{e}_r \left(= \frac{\mathbf{r}}{r}\right)$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta$, (fig. 402) son tangentes a las líneas de coordenadas en cada punto y los coeficientes se expresan mediante las coordenadas correspondientes por las fórmulas:

$$\mathbf{V} = V_\rho(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_\rho + V_\varphi(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_\varphi + V_z(\rho, \varphi, z)\,\mathbf{e}_z, \tag{2b}$$

$$\mathbf{V} = V_r(r, \varphi, \theta)\,\mathbf{e}_r + V_\varphi(r, \varphi, \theta)\,\mathbf{e}_\varphi + V_\theta(r, \varphi, \theta)\,\mathbf{e}_\theta. \tag{2c}$$

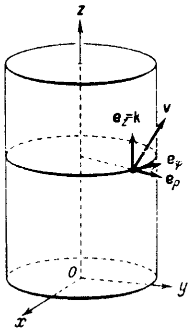



Fig. 401

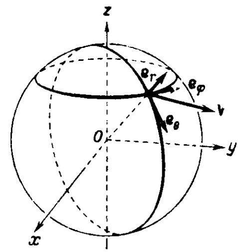



Fig. 402

En estos casos, los versores cambian de dirección al pasar de un punto a otro, manteniéndose perpendiculares entre sí.

### Fórmulas de paso de un sistema a otro

a) *Expresión de las coordenadas cartesianas mediante las cilíndricas:*

$$V_x = V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \operatorname{sen}\varphi, \quad V_y = V_\rho \operatorname{sen}\varphi + V_\varphi \cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

b) *Expresión de las coordenadas cilíndricas mediante las cartesianas:*

$$V_\rho = V_x \cos\varphi + V_y \operatorname{sen}\varphi, \quad V_\varphi = -V_x \operatorname{sen}\varphi + V_y \cos\varphi, \quad V_z = V_z.$$

c) *Expresión de las coordenadas cartesianas mediante las esféricas:*

$$V_x = V_r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi - V_\varphi \operatorname{sen}\varphi + V_\theta \cos\varphi \cos\theta,$$
$$V_y = V_r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + V_\varphi \cos\varphi + V_\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\theta,$$
$$V_z = V_r \cos\theta - V_\theta \operatorname{sen}\theta.$$

d) *Expresión de las coordenadas esféricas mediante las cartesianas*

$$V_r = V_x \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + V_y \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi + V_z \cos\theta,$$
$$V_\varphi = -V_x \operatorname{sen}\varphi + V_y \cos\varphi,$$
$$V_\theta = V_x \cos\theta \cos\varphi + V_y \cos\theta \operatorname{sen}\varphi - V_z \operatorname{sen}\theta.$$

La expresión de un campo vectorial esférico mediante las coordenadas cartesianas es:

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}):$$

la expresión de un campo cilíndrico mediante las coordenadas cartesianas es:

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}).$$

Las coordenadas más convenientes para el estudio de los campos esféricos son las esféricas [$\mathbf{V} = V(r)\,\mathbf{e}_r$], y para los cilíndricos, las cilíndricas [$\mathbf{V} = V(\rho)\,\mathbf{e}_\rho$]. En el caso de un campo plano:

$$\mathbf{V} = V_x(x, y)\,\mathbf{i}+V_y(x, y)\,\mathbf{j} = V_\rho(x, y)\,\mathbf{e}_\rho+V_\varphi(x, y)\,\mathbf{e}_\varphi \quad \text{(fig. 403)},$$

para un campo circular:

$$\mathbf{V} = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) = \psi(\rho)\,\mathbf{e}_\rho.$$

LÍNEAS DE CORRIENTE. Una curva $\Gamma$ tal que en cada uno de sus puntos $M(\mathbf{r})$ el vector $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ es tangente a $\Gamma$, se llama *línea de corriente* del campo

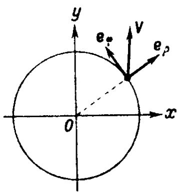


Fig. 403

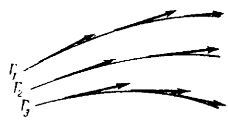


Fig. 404

vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ (fig. 404). Por cada punto del campo pasa una línea de corriente; las líneas de corriente no se cortan entre sí (a excepción de los puntos en los cuales la función $\mathbf{V}$ no está definida o $\mathbf{V} = 0$).

*Ejemplos:* Las líneas de corriente de un campo central son rectas que unen el centro con un punto del campo; las líneas de corriente del campo $\mathbf{V} = \mathbf{c}\times\mathbf{r}$ son circunferencias que están situadas en los planos perpendiculares al vector $\mathbf{c}$ y que tienen los centros en el eje paralelo a $\mathbf{c}$.

Las ecuaciones diferenciales de las líneas de corriente de un campo expresado en coordenadas cartesianas, son:

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}; \quad \text{para el campo plano} \quad \frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y}\,^*.$$

* Sobre la resolución de estas ecuaciones diferenciales, véanse las págs. 501 y 513.

## 8. *Gradiente*

Se llama derivada de un campo escalar $U = U(\mathbf{r})$ en un punto dado $\mathbf{r}$, con respecto al vector $\mathbf{c}$, al límite de la razón:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U(\mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{c}) - U(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad \text{(fig. 405).}$$

Se llama derivada del campo $U = U(\mathbf{r})$ en un punto dado $\mathbf{r}$, en la dirección del versor $\mathbf{c}^0$, a la derivada $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$. Las derivadas con respecto al vector $\mathbf{c}$ y a su versor $\mathbf{c}^0$, en un punto dado, están ligadas por la relación

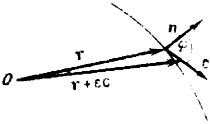


Fig. 405

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}} = |\mathbf{c}| \frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}.$$

$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$ indica la velocidad de crecimiento en cada punto de la función **U** en la dirección $\mathbf{c}^0$; entre todas las derivadas en un punto dado con respecto a los distintos versores, la mayor es la derivada $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$ en la dirección de la normal **n** (**n** es el versor de la normal) a la superficie de nivel en este punto (hacia el lado de crecimiento de la función **U**); la derivada con respecto a un versor en cualquier otra dirección se expresa por la fórmula

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \cos(\mathbf{c}^0, \mathbf{n}) = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} \cos\varphi.$$

Gradiente del campo $U(r)$ (se representa por **grad** $U$ ó $\nabla U$*) es un vector, definido en cada punto del campo, cuya dirección es la de la normal a la superficie de nivel (hacia el lado de crecimiento de $U$) y cuya longitud es igual a $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}$.

La derivada $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0}$ es igual a la proyección del grad $U$ sobre la dirección $\mathbf{c}^0$:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{c}^0} = \mathbf{c}^0 \operatorname{grad} U.$$

*Coordenadas del gradiente:*

en el sistema cartesiano:

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k},$$

---

* Sobre el símbolo $\nabla$ (nabla), véase la pág. 626.

en el sistema de coordenadas cilíndricas

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial \rho}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\,\mathbf{e}_z,$$

en el sistema de coordenadas esféricas

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\,\frac{\partial U}{\partial \varphi}\,\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta.$$

En aquellos puntos del campo, en los que las líneas de nivel se han trazado más a menudo, según las condiciones de la pág. 609, el valor absoluto del gradiente es mayor; en los puntos de máximo y mínimo del campo [en éstos las superficies (líneas) de nivel degeneran en un punto] $\operatorname{grad} U = 0$.

DIFERENCIAL DE UN CAMPO ESCALAR es la diferencial total de la función $U$ (véase la pág. 356):

$$dU = \operatorname{grad} U\, d\mathbf{r} = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz.$$

REGLAS DE CÁLCULO DEL GRADIENTE*:

$$\operatorname{grad} c = 0, \quad \operatorname{grad}(U_1+U_2) = \operatorname{grad} U_1 + \operatorname{grad} U_2,$$
$$\operatorname{grad}(cU) = c \operatorname{grad} U,$$
$$\operatorname{grad}(U_1U_2) = U_1 \operatorname{grad} U_2 + U_2 \operatorname{grad} U_1, \quad \operatorname{grad}\varphi(U) = \frac{d\varphi}{dU}\operatorname{grad} U,$$
$$\operatorname{grad}(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_1 \operatorname{grad})\,\mathbf{V}_2 + (\mathbf{V}_2 \operatorname{grad})\,\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_2 \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_1\text{**}.$$

En particular, $\operatorname{grad}(\mathbf{r}\mathbf{c}) = \mathbf{c}$.

*Gradiente de un campo central:* $\operatorname{grad} U(r) = U'(r)\,\frac{\mathbf{r}}{r}$ (es un campo esférico); en particular, $\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ (campo de vectores unitarios).

EL GRADIENTE COMO DERIVADA DE VOLUMEN. La derivada de volumen de un campo escalar (véase la pág. 623) es un vector que es gradiente de este campo; esta propiedad se puede admitir como definición de gradiente:

$$\operatorname{grad} U = \lim_{v \to 0} \frac{\oint_\Sigma U\, d\mathbf{S}}{v}.$$

* Aquí y en lo sucesivo $c$ y $\mathbf{c}$ son constantes.

** Sobre las expresiones ($\mathbf{V}$ grad) $\mathbf{W}$ y rot $\mathbf{V}$, véanse las págs. 627 y 624.

## *9. La integral curvilínea y el potencial en un campo vectorial**

DEFINICIÓN. Se llama *integral curvilínea (lineal)* de una función vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, tomada sobre el camino $\overset{\frown}{AB}$ $\left(\text{se representa por } \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}\right)$, al escalar $P$ obtenido de la manera siguiente:

1) La curva $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 406) se divide por puntos intermedios

$$A_1(\mathbf{r}_1),\ A_2(\mathbf{r}_2),\ \ldots,\ A_{n-1}(\mathbf{r}_{n-1})$$
$$(A \equiv A_0,\ \ B \equiv A_n)$$

en $n$ segmentos pequeños, representados aproximadamente por los vectores $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \Delta\mathbf{r}_{i-1}$.

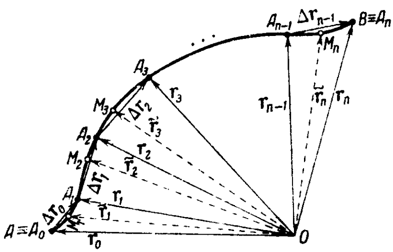



Fig. 406

2) En el interior (o en la frontera) de cada arco elemental $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ se toma un punto arbitrario $M_i$ de radio vector $\tilde{\mathbf{r}}_i$.

3) Los valores de la función $\mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)$ en estos puntos elegidos se multiplican escalarmente por $\Delta\mathbf{r}_{i-1}$.

4) Todos los $n$ productos obtenidos se suman.

5) Se calcula el límite de la suma obtenida $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\ \Delta_{i-1}$, cuando la longitud de cada vector elemental $\Delta\mathbf{r}_{i-1}$ tiende a cero (y, por lo tanto, $n \to \infty$).

Si este límite existe y no depende de la elección de los puntos $A_i$ y $M_i$, éste se llama integral curvilínea

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \lim_{\substack{\Delta\mathbf{r}\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(\tilde{\mathbf{r}}_i)\,\Delta\mathbf{r}_{i-1}.$$

* Este párrafo es la exposición vectorial de la teoría de la integral curvilínea de segundo tipo de la forma general (véase las págs. 473-474).

Si la función $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ es continua* y el arco $\overset{\frown}{AB}$ es continuo y posee tangente que gira continuamente, la integral curvilínea $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ existe.

INTERPRETACIÓN MECÁNICA DE LA INTEGRAL. Si $\mathbf{V}$ es un campo de fuerzas, entonces $P = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ es igual al *trabajo* que efectúa la fuerza $\mathbf{V}$ al desplazar un punto material por el camino $\overset{\frown}{AB}$.

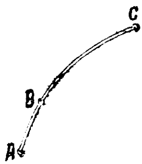


Fig. 407

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL CURVILÍNEA:

a) $$\int\limits_{\overset{\frown}{ABC}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} + \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r};$$

b) $$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \quad \text{(fig. 407)};$$

c) $$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} [\mathbf{V}(\mathbf{r}) + \mathbf{W}(\mathbf{r})]\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{W}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r};$$

d) $$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} c\mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = c \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}.$$

EL CÁLCULO DE UNA INTEGRAL CURVILÍNEA dada en coordenadas cartesianas se reduce al cálculo de una integral curvilínea de segundo tipo de forma general (véanse las págs. 474-475)

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (V_x\, dx + V_y\, dy + V_z\, dz).$$

Se llama CIRCULACIÓN de un campo vectorial a la integral curvilínea de este campo, tomada sobre un circuito cerrado $\left(\text{se representa por } \oint\limits_{C} \mathbf{V}\, d\mathbf{r}, \text{ donde } C \text{ es una curva cerrada}\right)$.

* Para la continuidad de una función vectorial $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ es necesaria la continuidad de las tres funciones escalares que son los coeficientes de la descomposición de $\mathbf{V}$ con respecto a los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Campo CONSERVATIVO (o *potencial)* es el campo vectorial en el cual la integral curvilínea $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}\, d\mathbf{r}$ no depende del camino que une $A$ y $B$ y sólo depende de la posición de los mismos puntos $A$ y $B$. La circulación en un campo conservativo siempre es igual a cero. Un campo conservativo siempre es *irrotacional:*

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = 0 \tag{1}$$

(véase la pág. 629); esta igualdad es la condición necesaria y suficiente para que el campo sea conservativo, supuesta la continuidad de las derivadas parciales de las coordenadas del campo. En coordenadas cartesianas es:

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_z}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial z}^{*} \tag{1a}$$

[para un campo plano sólo queda la primera igualdad (1a)].

POTENCIAL DE UN CAMPO CONSERVATIVO. Si en un campo conservativo se fija el punto inicial $A(\mathbf{r}_0)$ y se hace variar el final $B(\mathbf{r})$, la integral $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ $\left(\text{se representa por } \int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}\right)$ es una función escalar de $\mathbf{r}$: $\int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r})$, y el campo escalar $\varphi(\mathbf{r})$ se llama *función potencial* o *potencial* del campo $\mathbf{V}(\mathbf{r})$**. El potencial de un campo está determinado salvo una constante aditiva arbitraria que depende del límite inferior $\mathbf{r}_0$; la *diferencia de los potenciales* es:

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}.$$

RELACIÓN ENTRE EL GRADIENTE, LA INTEGRAL CURVILÍNEA Y EL POTENCIAL. Si $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} U(\mathbf{r})$, entonces $U(\mathbf{r})$ es el potencial del campo $\mathbf{V}(\mathbf{r})$***, y viceversa.

---

* Esta es la *condición de integrabilidad* (véase la pág. 477).

** Esta es la *función primitiva* (véase la pág. 477). En física, a veces se llama *potencial* de $\varphi(\mathbf{r})$ en el punto $\mathbf{r}$, a esta magnitud pero tomada con signo contrario: «$-\int\limits_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$».

*** O "menos el potencial del campo $\mathbf{V}(\mathbf{r})$" (véase la llamada anterior).

EL CÁLCULO DEL POTENCIAL $U$ de un campo conservativo $\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$, dado en coordenadas cartesianas, es equivalente al problema del cálculo de la función $U$ si es conocida su diferencial total: $dU = V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz$ [$V_x$, $V_y$, $V_z$ tienen que satisfacer a la condición (1a)]; $U$ se determina del sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = V_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = V_z.$$

Prácticamente el potencial se calcula integrando sobre una poligonal (fig. 408) formada por segmentos paralelos a los ejes de coordenadas (véase el cálculo de la función primitiva en la pág. 478):

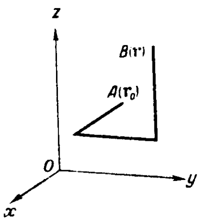


Fig. 408

$$U = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = U(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} V_x(x, y_0, z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} V_y(x, y, z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} V_z(x, y, z)\,dz.$$

## 10. Integrales de superficie*

Se llama VECTOR DE UNA SUPERFICIE PLANA $\Sigma$, limitada por un circuito $C$ a lo largo del cual se ha establecido la dirección positiva, al vector $\mathbf{S}$ (fig. 409, *a*), cuyo módulo es igual al valor $S$ del área de la superficie $\Sigma$, y la dirección es perpendicular a $\Sigma$, de modo que desde su extremo se observe el recorrido positivo de la superficie en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. De esta manera, la elección del

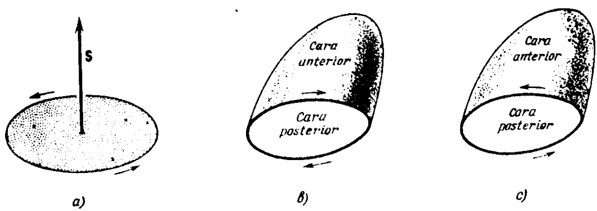


Fig. 409

* Este párrafo es la exposición vectorial de la teoría de la integral de superficie de segundo tipo de la forma general (véase la pág. 496).

sentido positivo en el contorno de la superficie está ligada con la elección de la *cara anterior* de la superficie (es decir, de la cara de la que parte el vector **S**); esta relación se extiende a cualquier superficie alabeada que esté limitada por un circuito (fig. 409 *b* y *c*).

TRES TIPOS DE INTEGRALES SOBRE UNA SUPERFICIE $\Sigma$ (cerrada o limitada por un circuito). Se llaman *integrales de superficie* en un campo escalar o vectorial a los valores formados de la siguiente manera: 1) la superficie $\Sigma$, en la cual se ha elegido la cara anterior (fig. 410), se divide arbitrariamente en $n$ superficies pequeñas ("elementales") $dS_i$, cada una de las cuales se considera aproximadamente plana y el vector correspondiente se designa con $d\mathbf{S}_i$ (en el caso de una superficie cerrada, el sentido positivo del recorrido de las superficies elementales se elige de tal modo que la cara anterior, desde la cual parte el vector $d\mathbf{S}_i$, sea exterior);

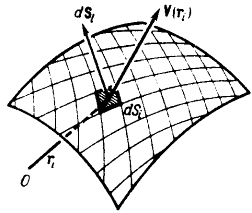


Fig. 410

2) en el interior (o en la frontera) de cada superficie elemental se elige un punto arbitrario $\mathbf{r}_i$; 3) se forma el producto: en el caso de un campo escalar, $U(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i$, y en el caso de un campo vectorial, $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i$ ó $\mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\times d\mathbf{S}_i$; 4) los productos formados para cada superficie elemental se suman; 5) se efectúa el paso al límite, cuando $n\to\infty$ y $dS\to 0$*:

A. *Flujo de un campo escalar*

$$\mathbf{P} = \lim_{dS_i\to 0} \Sigma U(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i = \int_{\Sigma} U(\mathbf{r})\,d\mathbf{S}.$$

B. *Flujo escalar de un campo vectorial*

$$Q = \lim_{dS_i\to 0} \Sigma \mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\,d\mathbf{S}_i = \int \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{S}.$$

C. *Flujo vectorial de un campo vectorial*

$$\mathbf{R} = \lim_{dS_i\to 0} \Sigma \mathbf{V}(\mathbf{r}_i)\times d\mathbf{S}_i = \int_{\Sigma} \mathbf{V}(\mathbf{r})\times d\mathbf{S}^{**}.$$

El cálculo de las integrales sobre una superficie en coordenadas cartesianas se reduce al cálculo de las integrales de superficie de segundo

* La superficie elemental tiende a cero en el sentido indicado en la llamada * de la pág. 480.

** Para cada una de estas integrales subsiste el teorema de existencia, que es análogo al expuesto en la pág. 495 (omitimos su formulación exacta).

tipo (véase la pág. 493) y se efectúa por las fórmulas siguientes:

A) $$\int\limits_{\Sigma} U\,d\mathbf{S} = \iint\limits_{\Sigma_{yz}} U\,dy\,dz\,\mathbf{i} + \iint\limits_{\Sigma_{zx}} U\,dz\,dx\,\mathbf{j} + \iint\limits_{\Sigma_{yz}} U\,dx\,dy\,\mathbf{k}.$$

B) $$\int\limits_{\Sigma} \mathbf{V}\,d\mathbf{S} = \iint\limits_{\Sigma_{yz}} V_x\,dy\,dz + \iint\limits_{\Sigma_{zx}} V_y\,dz\,dx + \iint\limits_{\Sigma_{xy}} V_z\,dx\,dy.$$

C) $$\int\limits_{\Sigma} \mathbf{V}\times d\mathbf{S} = \iint\limits_{\Sigma_{yz}} (V_z\mathbf{j} - V_y\mathbf{k})\,dy\,dz + \iint\limits_{\Sigma_{zx}} (V_x\mathbf{k} - V_z\mathbf{i})\,dz\,dx + \iint\limits_{\Sigma_{xy}} (V_y\mathbf{i} - V_x\mathbf{j})\,dx\,dy.$$

Cada integral doble se extiende a la superficie que es la proyección de $\Sigma$ sobre algún plano de coordenadas* (fig. 411); además, en las expresiones que figuran bajo el signo integral, se debe expresar una de las variables ($x$, $y$ ó $z$) mediante las otras dos de la ecuación de la superficie $\Sigma$.

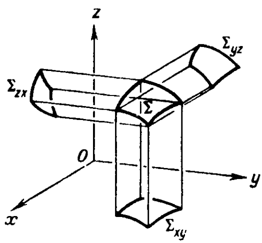


Fig. 411

*Ejemplos:* A) $\mathbf{P} = \int\limits_{\Sigma} xyz\,d\mathbf{S}$ sobre la parte del plano $x+y+z=1$ comprendida entre los tres planos de coordenadas (la cara superior es la anterior). Se tiene:

$$P = \iint\limits_{y\,z} (1-y-z)\,yz\,dy\,dz\mathbf{i} + \iint\limits_{z\,x} (1-x-z)\,xz\,dz\,dx\mathbf{j} + \iint\limits_{x\,y} (1-x-y)\,xy\,dx\,dy\mathbf{k};$$

$$\iint\limits_{y\,z} (1-y-z)\,yz\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} (1-y-z)\,yz\,dy\,dz = \frac{1}{120};$$

las dos integrales restantes se calculan análogamente; el resultado es:

$$\mathbf{P} = \frac{1}{120}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).$$

* La proyección se toma con signo «+» o «−» (véase la pág. 494).

B) $Q = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{r}\, d\mathbf{S} = \iint\limits_{y\,z} x\, dy\, dz + \iint\limits_{z\,x} y\, dz\, dx + \iint\limits_{x\,y} z\, dx\, dy$

sobre la misma superficie. $\iint\limits_{x\,y} z\, dx\, dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\, dx = \frac{1}{6}$;
las dos integrales restantes se calculan análogamente; $Q = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

C) $\mathbf{R} = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = \int\limits_{\Sigma} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times (dy\, dz\mathbf{i} + dz\, dx\, \mathbf{j} + dx\, dy\, \mathbf{k})$

sobre la misma superficie. Los cálculos análogos dan $\mathbf{R} = 0$.

LAS INTEGRALES SOBRE SUPERFICIES CERRADAS se representan por:

$$\oint\limits_{\Sigma} U\, d\mathbf{S}, \quad \oint\limits_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S}, \quad \oint\limits_{\Sigma} \mathbf{V} \times d\mathbf{S}.$$

## 11. Derivada de volumen

DEFINICIÓN. Se llaman *derivadas de volumen* (o *espaciales)* de un campo escalar o vectorial en el punto **r**, a los valores de los tres tipos que se obtienen de la siguiente manera: 1) se encierra al punto **r** del campo **U(r)** o **V(r)** dentro de una cápsula cerrada $\Sigma$; 2) se calcula la integral sobre la superficie $\Sigma$ $\left(\oint\limits_{\Sigma} U\, d\mathbf{S},\ \oint\limits_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S} \text{ ó } \oint\limits_{\Sigma} \mathbf{V} \times d\mathbf{S}\right)$;

3) se halla el límite de la razón de esta integral al volumen $v$ comprendido en el interior de esta superficie $\Sigma$, cuando este volumen $v$ tiende a cero (en el sentido indicado en la llamada* de la pág. 481).
La derivada de volumen de un campo escalar es su **gradiente** (véase la pág. 616) y las derivadas de volumen de un campo vectorial conducen a los conceptos de **divergencia** y **rotor**.

## 12. Divergencia de un campo vectorial

DEFINICIÓN. Se llama *divergencia* de un campo **V** (se representa por div **V** o $\nabla$ **V***) al escalar, definido en cada punto del campo, que es la

* Sobre el símbolo $\nabla$ (nabla) véase la pág. 626.

derivada de volumen de este campo

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \lim_{v \to 0} \frac{\int_{\Sigma} \mathbf{V}\, d\mathbf{S}}{v}.$$

FÓRMULAS PARA CALCULAR LA DIVERGENCIA:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{(en coordenadas cartesianas)};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad \text{(en coordenadas cilíndricas)};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 V_r)\right] + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen} \theta V_\theta)\right]$$

(en coordenadas esféricas).

REGLAS PARA EL CÁLCULO DE LA DIVERGENCIA:

$\operatorname{div} \mathbf{c} = 0$, $\operatorname{div} (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \operatorname{div} \mathbf{V}_1 + \operatorname{div} \mathbf{V}_2$, $\operatorname{div} (c\mathbf{V}) = c \operatorname{div} \mathbf{V}$,

$\operatorname{div} (U\mathbf{V}) = U \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \operatorname{grad} U$ $\left[\text{en particular, } \operatorname{div} r\mathbf{c} = \frac{\mathbf{rc}}{r}\right]$,

$\operatorname{div} (\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_2 \operatorname{rot} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1 \operatorname{rot} \mathbf{V}_2$.

*La divergencia de un campo central* es: $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$, $\operatorname{div} \varphi(r)\mathbf{r} = 3\varphi(r) + r\varphi'(r)$.

## *13. Rotor de un campo vectorial*

DEFINICIONES. Se llama *rotor* (o *rotación*) de un campo $\mathbf{V}$ (se representa por: $\operatorname{rot} \mathbf{V}$, $\operatorname{curl} \mathbf{V}$ ó $\nabla \times \mathbf{V}$ *) al vector, definido en cada punto del campo, que es la derivada de volumen de este campo, tomada con signo contrario

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = -\lim_{v \to 0} \left(\frac{1}{v} \int_{\Sigma} \mathbf{V} \times d\mathbf{S}\right)^{**}.$$

Otra definición: se llama *rotor* del campo $\mathbf{V}$ al vector formado de la manera siguiente: 1) por el punto dado $\mathbf{r}$ se traza una superficie plana pequeña $S$ (fig. 412); 2) se calcula la circulación $\oint_C \mathbf{V}\, d\mathbf{r}$ (véase la pág. 618) a lo largo del contorno de esta superficie; 3) se considera la razón de esta circulación al área $S$, cuando $S$ tiende a cero, contrayén-

* Sobre el símbolo $\nabla$ (nabla) véase la pág. 626.

** Se puede quitar el signo «menos» colocando los factores bajo el signo de integral en orden inverso: $\int d\mathbf{S} \times V$ (véase la pág. 600).

dose hacia el punto **r**; la posición del plano de la superficie permanece invariable; 4) cambiando la dirección de esta superficie, se averigua la dirección para la cual el límite obtenido alcanza el máximo; 5) se determina en el punto **r** el vector rot **r**, cuyo módulo es igual al máximo obtenido y cuya dirección coincide con la del vector de la superficie $S_{max}$:

$$|\text{rot } \mathbf{V}| = \lim_{s \to 0} \frac{\int_{(C_{max})} \mathbf{V}\, d\mathbf{r}}{S_{max}};$$

la proyección del rot **V** sobre la normal a la superficie $S$ $\Bigg\} = \lim_{s \to 0} \dfrac{\int_C \mathbf{V}\, d\mathbf{r}}{S}$.

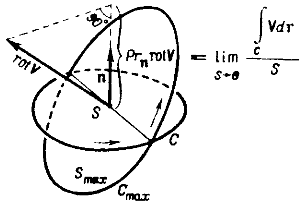



Fig. 412

El rotor de un campo potencial es igual a cero (se deduce del teorema de Stokes, pág. 628).

Coordenadas del rotor:

$$\text{rot } \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

(en coordenadas cartesianas),

$$\text{rot } \mathbf{V} = \left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi}\right)\mathbf{e}_z$$

(en coordenadas cilíndricas),

$$\text{rot } \mathbf{V} = \left[\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(\operatorname{sen} \theta V_\varphi) - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right)\right]\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_\varphi + \left[\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta}\,\frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r V_\varphi)\right)\right]\mathbf{e}_\theta$$

(en coordenadas esféricas).

Reglas para el cálculo del rotor:

$$\text{rot}(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \text{rot } \mathbf{V}_1 + \text{rot } \mathbf{V}_2, \quad \text{rot}(c\mathbf{V}) = c \text{ rot } \mathbf{V},$$

$$\text{rot}(U\mathbf{V}) = U \text{ rot } \mathbf{V} + \text{grad } U \times \mathbf{V},$$

$$\text{rot}(\mathbf{V}_1 \times \mathbf{V}_2) = (\mathbf{V}_2 \text{ grad})\mathbf{V}_1 - (\mathbf{V}_1 \text{ grad})\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_1 \text{ div } \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_2 \text{ div } \mathbf{V}_1{}^*.$$

Se llaman líneas de rotación del campo **V** a las líneas de corriente del campo rot **V** (pág. 614).

* Sobre la expresión **V** grad, véase la pág. 626.

## *14. Operadores* $\nabla$ *(de Hamilton)*, $(a\nabla)$ *y* $\Delta$ *(de Laplace)*

EL OPERADOR DE HAMILTON $\nabla$ (nabla) es un vector simbólico que sustituye a los símbolos del gradiente, divergencia y rotor:

$$\nabla U = \operatorname{grad} U, \quad \nabla \mathbf{V} = \operatorname{div} \mathbf{V}, \quad \nabla \times \mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{V};$$

la introducción de este símbolo simplifica los cálculos en el análisis vectorial. La expresión del operador de Hamilton en coordenadas cartesianas es:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Multiplicando formalmente este vector por el escalar $U$ o por el vector $\mathbf{V}$ (escalar o vectorialmente), expresados en coordenadas cartesianas, se obtienen las fórmulas para el gradiente (pág. 615), para la divergencia (pág. 623) y para el rotor (pág. 625), en coordenadas cartesianas.

REGLAS PARA EL CÁLCULO con el operador $\nabla$. a) Si $\nabla$ antecede a una combinación lineal $\Sigma a_i X_i$, donde $a_i$ son constantes y $X_i$ son funciones del punto (ya sean escalares o vectoriales), se tiene $\nabla(\Sigma a_i X_i) = \Sigma a_i \nabla X_i$.

b) Si $\nabla$ antecede a un producto de funciones del punto, $X$, $Y$, $Z$ (escalares o vectoriales), entonces éste se aplica sucesivamente a cada una de estas funciones (en este caso, se coloca sobre ella el signo $\downarrow$) y se suman los resultados

$$\nabla(XYZ) = \nabla(\overset{\downarrow}{X}YZ + \nabla(X\overset{\downarrow}{Y}Z) + \nabla(XY\overset{\downarrow}{Z});$$

después, los productos obtenidos se transforman según las reglas de álgebra vectorial, de tal modo que detrás del operador $\nabla$ sólo figure el factor que tiene el signo $\downarrow$; después de haber efectuado el cálculo, puede no escribirse este signo.

*Ejemplos:*

1) $$\operatorname{div}(U\mathbf{V}) = \nabla(U\mathbf{V}) = \nabla(\overset{\downarrow}{U}\mathbf{V}) + \nabla(U\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}) = \mathbf{V}\cdot\nabla U + U\cdot\nabla\mathbf{V} = \mathbf{V}\operatorname{grad} U + U\operatorname{div}\mathbf{V}.$$

2) $$\operatorname{div}(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2) = \nabla(\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1}\times\mathbf{V}_2) + \nabla(\mathbf{V}_1\times\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2}) =$$
$$= \nabla\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_1}\mathbf{V}_2 + \nabla\mathbf{V}_1\overset{\downarrow}{\mathbf{V}_2} = \mathbf{V}_2\nabla\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1\nabla\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2(\nabla\times\mathbf{V}_1) -$$
$$- \mathbf{V}_1(\nabla\times\mathbf{V}_2) = \mathbf{V}_2 \operatorname{rot}\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_1\operatorname{rot}\mathbf{V}_2.$$

OPERADOR $(\mathbf{a}\nabla)$. En los cálculos puede resultar la expresión operacional $(\mathbf{a}\nabla) = a_x\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + a_y\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$. El vector $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{V} = (\mathbf{a}\operatorname{grad})\mathbf{V}$ se llama *gradiente del campo vectorial* **V** con respecto al vector **a**; éste es igual a la derivada de **V** con respecto al vector **a**:

$$(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{V} = (\mathbf{a}\ \mathrm{grad})\,\mathbf{V} = |\mathbf{a}|\cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbf{V}(\mathbf{r}+\varepsilon\mathbf{a}^0)-\mathbf{V}(\mathbf{r})}{\varepsilon} \quad \text{(fig. 413).}$$

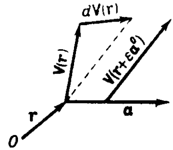



Fig. 413

*Ejemplo:* $\mathrm{grad}\,(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) = \nabla(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) = \nabla(\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}_1\mathbf{V}_2)+\nabla(\mathbf{V}_1\overset{\downarrow}{\mathbf{V}}_2)$.

Según la fórmula $\mathbf{b}(\mathbf{ac}) = (\mathbf{ab})\,\mathbf{c}+\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (véase la pág. 600) resulta:

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,(\mathbf{V}_1\mathbf{V}_2) &= \\ &= (\mathbf{V}_2\nabla)\,\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\times(\nabla\times\mathbf{V}_1)+(\mathbf{V}_1\nabla)\,\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_1\times(\nabla\times\mathbf{V}_2) = \\ &= (\mathbf{V}_2\ \mathrm{grad})\,\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2\times\mathrm{rot}\ \mathbf{V}_1+(\mathbf{V}_1\ \mathrm{grad})\,\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_1\times\mathrm{rot}\ \mathbf{V}_2\,.\end{aligned}$$

La expresión $(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{V}$ puede transformarse según la fórmula

$$\begin{aligned}2(\mathbf{a}\nabla)\,\mathbf{V} = {}&\mathrm{rot}\,(\mathbf{V}\times\mathbf{a})+\mathrm{grad}\,(\mathbf{aV})+\mathbf{a}\ \mathrm{div}\ \mathbf{V}-\mathbf{V}\ \mathrm{div}\ \mathbf{a}- \\ &-\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\ \mathbf{V}-\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\ \mathbf{a}.\end{aligned}$$

APLICAIÓN DOBLE DEL OPERADOR $\nabla$; EL OPERADOR $\Delta$.

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \nabla(\nabla\times\mathbf{V}) = \mathrm{div\ rot}\ \mathbf{V} = 0, \\ 2) & \nabla\times(\nabla U) = \mathrm{rot\ grad}\ U = 0, \\ 3) & \nabla(\nabla U) = \mathrm{div\ grad}\ U = \Delta U \end{array}\right\}\ \text{para cualquier campo.}$$

$\Delta$ (o $\nabla\nabla$, $\nabla^2$) es el *operador de Laplace;* su expresión en coordenadas es:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{(coordenadas cartesianas),}$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\,\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad \text{(coordenadas cilíndricas),}$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\,\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\,\mathrm{ctg}\,\theta\,\frac{\partial U}{\partial\theta}$$

(coordenadas esféricas).

4) $\nabla(\nabla\mathbf{V}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{V}$ y 5) $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{V}) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}$ están ligados entre sí por la fórmula $\nabla(\nabla\mathbf{V}) - \nabla\times(\nabla\times\mathbf{V}) = \Delta\mathbf{V}$. Aquí $\Delta\mathbf{V} = (\nabla\nabla)\mathbf{V}$ es el operador de Laplace aplicado al vector $\mathbf{V}$:

$$\Delta\mathbf{V} = \Delta V_x\mathbf{i} + \Delta V_y\mathbf{j} + \Delta V_z\mathbf{k} = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

## *15. Teoremas integrales**

TEOREMA DE OSTROGRADSKI-GAUSS:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{V}\,d\mathbf{S} = \oint_{v} \operatorname{div}\mathbf{V}\,dv,$$

el flujo escalar de un campo **V** a través de una superficie cerrada $\Sigma$ es igual a la integral de la divergencia de **V**, extendida al volumen $v$ comprendido en el interior de $\Sigma$.

En coordenadas cartesianas es:

$$\iint_{\Sigma} (V_x\,dy\,dz + V_y\,dz\,dx + V_z\,dx\,dy) = \iiint_{v} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

$V_x$, $V_y$, $V_z$ son funciones de tres variables $x$, $y$, $z$).

TEOREMA DE STOKES:

$$\oint_{C} \mathbf{V}\,d\mathbf{r} = \int_{\Sigma} \operatorname{rot}\mathbf{V}\,d\mathbf{S},$$

la circulación de un campo a lo largo de una curva $C$ es igual al flujo del rotor a través de una superficie cualquiera $\Sigma$, limitada por el circuito $C$**.

En coordenadas cartesianas:

$$\int_{C} (V_x\,dx + V_y\,dy + V_z\,dz) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

---

* Compárese con las págs. 497-498.

** Más exactamente, véase la pág. 497.

Para un circuito plano *(fórmula de Green)*:

$$\int_C (V_x\, dx + V_y\, dy) = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\, dy$$

($V_x$ y $V_y$ son funciones de dos variables, $x$ e $y$).

TEOREMAS DE GREEN:

1) $\int_\Sigma U_1 \operatorname{grad} U_2\, d\mathbf{S} = \int_v (U_1\, \Delta U_2 + \operatorname{grad} U_1 \operatorname{grad} U_2)\, dv,$

2) $\int_\Sigma (U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1)\, d\mathbf{S} = \int_v (U_1\, \Delta U_2 - U_2\, \Delta U_1)\, dv,$

($U_1$ y $U_2$ son campos escalares, $\Sigma$ es la superficie que encierra el volumen $v$). En particular (para $U_1 = 1$):

3) $\int_\Sigma \operatorname{grad} U\, d\mathbf{S} = \int_v \Delta \mathrm{U}\, dv.$

En coordenadas cartesianas el teorema 3) adquiere la siguiente forma:

$$\oint_\Sigma \frac{\partial U}{\partial x}\, dy\, dz + \frac{\partial U}{\partial y}\, dz\, dx + \frac{\partial U}{\partial z}\, dx\, dy = \int_v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) dv.$$

## *16. Campos vectoriales irrotacionales y solenoidales*

Se llama IRROTACIONAL EL CAMPO **V** cuyo rotor es igual a 0 en todas partes. Si rot **V** = 0, entonces **V** = grad $U$; la función $U$ (potencial de **V**)* puede expresarse en cualquier punto $M$ por la fórmula

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{div} \mathbf{V}\, dv}{r}, \tag{1}$$

donde $r$ es la distancia de $dv$ hasta $M$; la integral se extiende a todo el espacio**.

Se llama SOLENOIDAL EL CAMPO **V** cuya divergencia es igual a 0 en todas partes. Si div **V** = 0, entonces existe un campo solenoidal **W** *(potencial vectorial* de **V**) tal que **V** = rot **W** y

$$\mathbf{W} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{V}\, dv}{r}; \tag{2}$$

---

* O «menos potencial de V», véase la llamada** de la pág. 619.

** La fórmula (1) es válida, si la divergencia del campo V es diferenciable y decrece con suficiente rapidez al alejarse al infinito.

$r$ tiene el mismo sentido que en la fórmula (1); la integral se extiende a todo el espacio*.

Un campo vectorial cualquiera **V**, que decrece con suficiente rapidez al alejarse al infinito, se puede descomponer de una manera única en la suma de un campo irrotacional $\mathbf{V}_1$ y de un campo solenoidal $\mathbf{V}_2$ ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$), los cuales se determinan por las fórmulas:

$$\mathbf{V}_1 = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{grad}\int\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{V}\,dv}{r}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{rot}\int\frac{\mathrm{rot}\,\mathbf{V}\,dv}{r}.$$

CAMPO CON MANANTIALES PUNTUALES. *Campo de Newton (Coulomb).* $\mathbf{E} = \frac{e}{r^3}\,\mathbf{r}$ es irrotacional y solenoidal en todas partes, a excepción del polo $O$ (manantial del campo). Su potencial es: $U = -\frac{e}{r}$**. El flujo escalar $\oint_S E\,d\mathbf{S}$ es igual a cero, si la superficie $S$ no contiene en su interior al manantial, e igual a $4\pi e$, si lo contiene; el valor $e$ se llama *intensidad* del manantial.

Campo newtoniano con un manantial en el punto $\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{E} = \frac{e_1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1);$$

con varios manantiales $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots$, cuyas intensidades son iguales a $e_1, e_2, e_3, \ldots$, respectivamente:

$$\mathbf{E} = \Sigma\,\frac{e_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i).$$

El flujo $\int_S \mathbf{E}\,d\mathbf{S}$ es igual a cero, si la superficie $S$ no contiene en su interior manantiales, e igual a $4\pi\Sigma' e_i$, si los manantiales están situados en su interior ($\Sigma'$ se extiende a los manantiales que están situados en el interior de $S$).

## 17. *Ecuaciones de Laplace y Poisson*

ECUACIÓN DE LAPLACE. La búsqueda de un campo escalar $U$ para el cual $\Delta U = 0$ (div grad $U = 0$), conduce a la ***ecuación de Laplace:*** así se llama la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

* La fórmula (2) es válida, si el rotor del campo V es diferenciable y decrece con suficiente rapidez al alejarse al infinito.

** Ó $+\frac{e}{r}$; véase la llamada** de la pág. 619.

o, en el plano,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0.$$

Las funciones que satisfacen a esta ecuación (continuas y con derivadas parciales continuas de primero y segundo orden) se llaman *funciones de Laplace* o *funciones armónicas*. Si se conocen los valores de una función armónica en los puntos de una superficie cerrada $\Sigma$, entonces se determinan completamente los valores de esta función en todos los puntos del interior de esta superficie; la búsqueda de ellos representa el *problema de Dirichlet*. Si en una superficie cerrada se conocen los valores de una función armónica $U$ y de su derivada $\frac{\partial U}{\partial n}$ en dirección de la normal (exterior) a esta superficie, entonces los valores $U_M$ en los puntos $M$ del interior de la superficie se hallan por la fórmula

$$U_M=\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\frac{1}{r}\,\frac{\partial U}{\partial n}\,dS-\frac{1}{4\pi}\oint_{\Sigma}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,U\,dS,$$

donde $r$ es la distancia desde $dS$ hasta el punto $M$.

Ecuación de Poisson. La búsqueda de un campo escalar $U$, dada la divergencia $\rho(x, y, z)$, de su gradiente, conduce a la *ecuación de Poisson*

$$\Delta U=\rho(x, y, z)$$

ó

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\rho(x, y, z).$$

Si $\rho$ es una función continua y se sabe que cuando $r\to\infty$ (es decir, cuando el punto se aleja al infinito) la función $U$ tiende a cero y, además, con suficiente rapidez, entonces la solución de la ecuación de Poisson es el *potencial newtoniano* de la función $\rho$, determinado por la fórmula

$$U_M=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho\,dv}{r},$$

donde $r$ es la distancia del elemento de volumen $dv$ hasta el punto $M$; la integral se extiende a todo el espacio.

# III. SERIES DE FOURIER (ANÁLISIS ARMÓNICO)

## *1. Nociones generales*

Conceptos fundamentales. En toda una serie de problemas (ecuaciones diferenciales, teoría de las oscilaciones) suele ser necesario sustituir, exacta o aproximadamente, una función periódica dada $f(x)$, de período $T$, por una suma trigonométrica:

$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \ldots + a_n \cos n\omega x + b_1 \operatorname{sen} \omega x + b_2 \operatorname{sen} 2\omega x + \ldots + b_n \operatorname{sen} n\omega x$, donde $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (si $T = 2\pi$, entonces $\omega = 1$). La aproximación de $s_n(x)$ hacia $f(x)$ es la mejor (en el sentido indicado más adelante, véase la pág. 633), si por coeficientes $a_k$ y $b_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ se toman los *coeficientes de Fourier* de la función dada:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \cos k\omega x\, dx = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos k\omega x\, dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(x)+f(-x)] \cos k\omega x\, dx,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x) \operatorname{sen} k\omega x\, dx = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \operatorname{sen} k\omega x\, dx = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} [f(x)-f(-x)] \operatorname{sen} k\omega x\, dz$$

*(fórmulas de Euler)*.

Si para algún conjunto de valores de $x$, $s_n(x)$ tiende a un límite determinado $s(x)$ cuando $n \to \infty$, tenemos para estos $x$ la *serie* convergente *de Fourier* de la función $f(x)$:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + a_2 \cos 2\omega x + \ldots + a_n \cos n\omega x + \\ + \ldots + b_1 \operatorname{sen} \omega x + b_2 \operatorname{sen} 2\omega x + \ldots + b_n \operatorname{sen} n\omega x + \ldots$$

La serie de Fourier puede escribirse también en la forma:

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + A_1 \operatorname{sen} (\omega x + \varphi_1) + A_2 \operatorname{sen} (2\omega x + \varphi_2) + \\ + \ldots + A_n \operatorname{sen} (n\omega x + \varphi_n) + \ldots,$$

donde $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ y $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$. En forma compleja la serie de Fourier puede escribirse así:

$$s(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x},$$

donde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2} (a_n - ib_n) & \text{para } n > 0, \\ \frac{1}{2} (a_{-n} + ib_{-n}) & \text{para } n < 0. \end{cases}$$

La búsqueda de la serie de Fourier de una función dada $f(x)$ constituye el problema del *análisis armónico*.

PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS SERIES DE FOURIER.

1) Al sustituir aproximadamente la función $f(x)$ por la suma trigonométrica

$$s_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^n \alpha_k \cos k\omega x + \sum_1^n \beta_k \operatorname{sen} k\omega x$$

el error cuadrático medio (véase la pág. 658)

$$\delta^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx$$

será mínimo, si por coeficientes $\alpha_k$ y $\beta_k$ se toman los coeficientes de Fourier de la función dada.

2. Para toda función acotada y continua a trozos en el intervalo $0 < x < T$ (véase la pag. 328) la serie de Fourier *converge en media* hacia la función dada, es decir,

$$\int_0^T [f(x) - s_n(x)]^2 \, dx \to 0, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

De la convergencia en media se deduce que

$$\frac{2}{T} \int_0^T [f(x)]^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad \textit{(igualdad de Parseval)}.$$

3) Si la función $f(x)$ satisface a las *condiciones de Dirichlet*, es decir: a) el intervalo, en el cual la función está definida, se puede dividir en un número finito de intervalos, en cada uno de los cuales $f(x)$ es continua y monótona, y b) en todo punto de discontinuidad de $f(x)$ existen $f(x+0)$ y $f(x-0)$ (véase la pág. 328), entonces la serie de Fourier de esta función es *convergente* y su suma es igual a $f(x)$ en los puntos de continuidad de $f(x)$, mientras que en los puntos de discontinuidad es igual a $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

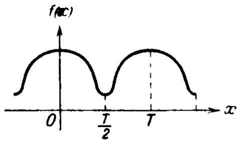


Fig. 414

4. Si una función periódica $f(x)$ es continua junto con sus derivadas, hasta el orden $k$-ésimo inclusive, entonces $a_n n^k \to 0$ y $b_n n^n \to 0$, cuando $n \to \infty$.

SIMETRÍA. Si $f(x)$ es una función *par*, es decir, $f(-x) = f(x)$ *(simetría de primera especie*, fig. 414), entonces

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos k \frac{2\pi x}{T}\, dx \quad \text{y} \quad b_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si $f(x)$ es una función *impar*, es decir, $f(-x) = -f(x)$ (simetría de segunda especie, fig. 415), entonces

$$a_k = 0 \quad \text{y} \quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \operatorname{sen} k \frac{2\pi x}{T}\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si $f\left(x+\frac{T}{2}\right) = -f(x)$ *(simetría de tercera especie*, fig. 416), entonces

$$\left.\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos (2k+1) \frac{2\pi x}{T}\, dx, \quad a_{2k} = 0 \\ b_{2k+1} &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \operatorname{sen} (2k+1) \frac{2\pi x}{T}\, dx, \quad b_{2k} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

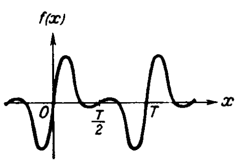


Fig. 415

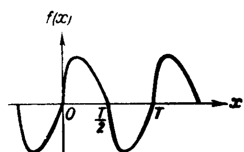


Fig. 416

Si la función es impar y, además, tiene simetría de III especie (*simetría de cuarta especie*, fig. 417, *a*), entonces

$$a_k = b_{2k} = 0 \quad \text{y} \quad b_{2k+1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(x)\,\text{sen}\,(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

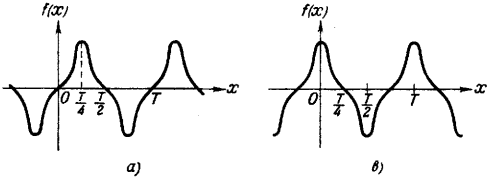



Fig. 417

Si la función es par y además tiene simetría de III especie (*simetría de cuarta b especie*, fig. 417 *b*), entonces

$$b_k = a_{2k} = 0 \quad \text{y} \quad a_{2k+1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(x)\cos(2k+1)\frac{2\pi x}{T}\,dx$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Desarrollo en serie de Fourier de una función no periódica.

Toda función $f(x)$ que satisfaga en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant l$ a las condiciones de Dirichlet (véase la pág. 634) puede desarrollarse en este intervalo en series convergentes de los tipos:

1) $$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{2\pi x}{l} + a_2\cos 2\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$
$$\ldots + a_n\cos n\frac{2\pi x}{l} + \ldots + b_1\,\text{sen}\,\frac{2\pi x}{l} + b_2\,\text{sen}\,2\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$
$$\ldots + b_n\,\text{sen}\,n\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

ó

2) $$f_2(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + a_2\cos 2\frac{\pi x}{l} + \ldots + a_n\cos n\frac{\pi x}{l} + \ldots$$

ó

3) $$f_3(x) = b_1\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{l} + b_2\,\text{sen}\,2\frac{\pi x}{l} + \ldots + b_n\,\text{sen}\,n\frac{\pi x}{l} + \ldots$$

La función $f_1(x)$ es periódica, de período $T = l$ y coincide con $f(x)$* en el intervalo $0 < x < l$, fig. 418. Los coeficientes del desarrollo se hallan por las fórmulas de Euler (véase la pág. 632) para $\omega = \frac{2\pi}{l}$. La función $f_2(x)$ es periódica, de período $T = 2l$, tiene simetría de primera especie y coincide con $f(x)$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant l$, (fig. 419). Los coeficientes

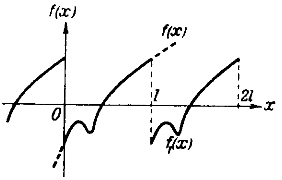



Fig. 418

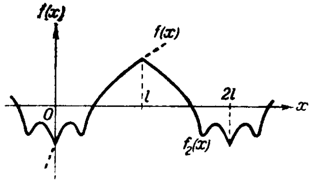



Fig. 419

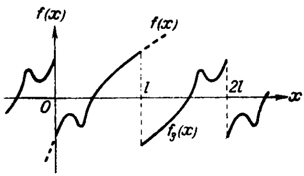



Fig. 420

del desarrollo de $f_2(x)$ se hallan por las fórmulas del caso de simetría de primera especie para $T = 2l$. La función $f_3(x)$ es periódica, de período $T = 2l$, tiene simetría de segunda especie y coincide con $f(x)$ en el intervalo $0 < x < 1$ (fig. 420). Los coeficientes del desarrollo de $f_3(x)$ se hallan por las fórmulas del caso de simetría de segunda especie para $T = 2l$.

Integral de Fourier. Si la función $f(x)$ satisface a las condiciones de Dirichlet en cualquier intervalo finito (véase la pág. 634) y, además, la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ es convergente (véase la pág. 456), entonces se

* En los puntos de discontinuidad se supone que $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$.

verifica la fórmula* *(integral de Fourier)*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\, du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt$$

(se supone que en los puntos de discontinuidad $f(x) = \frac{1}{2}[f(x-0)+$ $+f(x+0)]$). Esta fórmula puede considerarse como el límite de la fórmula del desarrollo en serie trigonométrica de la función no periódica $f(x)$ en el intervalo $(-l, +l)$ cuando $l \to \infty$. Del mismo modo que la serie de Fourier da la expresión de una función periódica (de período $T$) en forma de una suma de oscilaciones armónicas de frecuencias (o pulsaciones) $u_n = n\frac{2\pi}{T}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y amplitudes $A_n$, la integral de Fourier expresa la función $f(x)$ en forma de una suma de una cantidad infinitamente grande de oscilaciones de frecuencia $u$ de variación continua; se dice que la integral de Fourier da el desarrollo de la función en un *espector continuo*, donde a la frecuencia $u$ le corresponde la *densidad espectral*

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt.$$

La integral de Fourier admite una forma más simple si $f(x)$ es **par**:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos ux\, du \int_{0}^{\infty} f(t) \cos ut\, dt,$$

y si $f(x)$ es **impar**:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \operatorname{sen} ux\, du \int_{0}^{\infty} f(t) \operatorname{sen} ut\, dt.$$

*Ejemplo:* Para la función par $f(x) = e^{-|x|}$ obtenemos que la densidad espectral es

$$g(u) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cos ut\, dt = \frac{2}{\pi}\, \frac{1}{u^2+1},$$

$$\text{es decir,} \quad e^{-|x|} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos ux}{u^2+1}\, du.$$

---

* Existen condiciones menos rígidas para las cuales es válida la fórmula de la integral de Fourier.

## 2. Tabla de algunos desarrollos en serie de Fourier

Más adelante se dan los desarrollos en serie trigonométrica de algunas funciones elementales, definidas en un intervalo determinado y prolongadas después periódicamente. Al lado del desarrollo se muestra la gráfica correspondiente. Muchas funciones periódicas elementales pueden reducirse a la forma dada en la tabla variando la escala, tanto sobre el eje $Ox$ como sobre el eje $Oy$, y también trasladando los ejes de

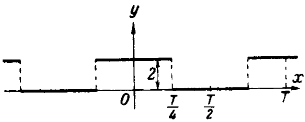



Fig. 421

coordenadas. Por ejemplo, la función de período $T$ (fig. 421) dada por las condiciones

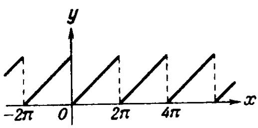
$$y = 2\left(0 < x < \frac{T}{4}\right), \quad y = 0\left(\frac{T}{4} < x < \frac{T}{2}\right),$$

$f(-x) = f(x)$ se reduce a la forma 5 ($a = 1$, véase la tabla) introduciendo las variables $Y = y-1$, $X = \frac{2\pi x}{T} + \frac{\pi}{2}$. Como sen $(2n+1)\left(\frac{2\pi x}{T} + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \cos(2n+1)\frac{2\pi x}{T}$, haciendo la sustitución de las variables en la serie (5), obtenemos para la función considerada

$$y = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{2\pi x}{T} - \frac{1}{3}\cos 3\frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{5}\cos 5\frac{2\pi x}{T} - \ldots\right).$$

---

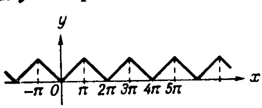
**1.** $y = x$ para $0 < x < 2\pi$




$$y = \pi - 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots\right)$$

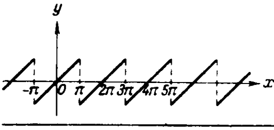
---

**2.** $y = x$ para $0 \leqslant x \leqslant \pi$



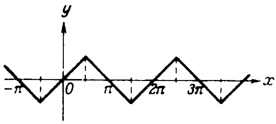

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

3. $y = x$ para $-\pi < x < \pi$



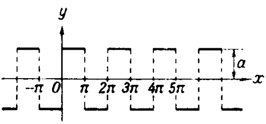

$$y = 2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots\right)$$

4. $y = x$ para $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$



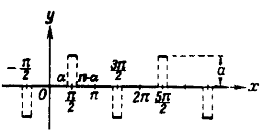

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2} - \dots\right)$$

5. $y = a$ para $0 < x < \pi$



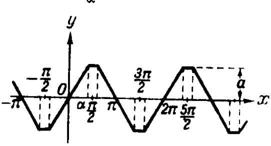

$$y = \frac{4a}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots\right)$$

6. $y = 0$ para $0 \leqslant x < \alpha$ y para $\pi - \alpha < x \leqslant \pi$,
$y = a$ para $\alpha < x < \pi - \alpha$




$$y = \frac{4a}{\pi}\left(\cos\alpha \operatorname{sen} x + \frac{1}{3}\cos 3\alpha \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\cos 5\alpha \operatorname{sen} 5x + \dots\right)$$

7. $y = \frac{ax}{\alpha}$ para $0 \leqslant x \leqslant \alpha$,
$y = a$ para $\alpha \leqslant x \leqslant \pi - \alpha$,
$y = \frac{a(\pi - x)}{\alpha}$ para $\pi - \alpha \leqslant x \leqslant \pi$

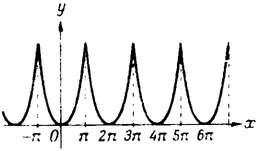



$$y = \frac{4}{\pi}\,\frac{a}{\alpha}\left(\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} x + \frac{1}{3^2}\operatorname{sen} 3\alpha \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen} 5\alpha \operatorname{sen} 5x + \dots\right)$$

En particular, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$:

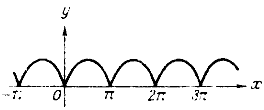
$$y = \frac{6\sqrt{3}\,a}{\pi^2}\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{5^2}\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{7^2}\operatorname{sen} 7x - \frac{1}{11^2}\operatorname{sen} 11x + \dots\right)$$

8. $y = x^2$ para $-\pi \leq x \leq \pi$



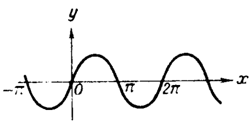

$$y = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \ldots\right)$$

9. $y = x(\pi - x)$ para $0 \leq x \leq \pi$



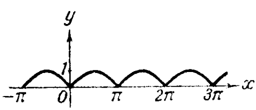

$$y = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$$

10. $y = x(\pi - x)$ para $0 \leq x \leq \pi$



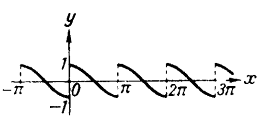

$$y = \frac{8}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3^3}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5^3}\operatorname{sen} 5x + \ldots\right)$$

11. $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \leq x \leq \pi$



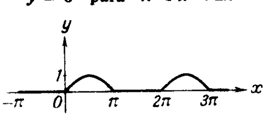

$$y = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$

12. $y = \cos x$ para $0 < x < \pi$




$$y = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2 \operatorname{sen} 2x}{1\cdot 3} + \frac{4 \operatorname{sen} 4x}{3\cdot 5} + \frac{6 \operatorname{sen} 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$

13. $y = \operatorname{sen} x$ para $0 \leq x \leq \pi$,
$y = 0$ para $\pi \leq x \leq 2\pi$




$$y = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots\right)$$

14. $y = \cos ux$ para $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

$$y = \frac{2u \operatorname{sen} u\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2u^2} - \frac{\cos x}{u^2-1} + \frac{\cos 2x}{u^2-4} - \frac{\cos 3x}{u^2-9} + \ldots\right]$$

($u$ — número arbitrario, no entero)

15. $y = \operatorname{sen} ux$ para $-\pi < x < \pi$

$$y = \frac{2 \operatorname{sen} u\pi}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1-u^2} - \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{4-u^2} + \frac{3 \operatorname{sen} 3x}{9-u^2} - \ldots\right)$$

($u$ — número arbitrario, no entero)

16. $y = x \cos x$ para $-\pi < x < \pi$

$$y = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{4 \operatorname{sen} 2x}{1\cdot 3} - \frac{6 \operatorname{sen} 3x}{3\cdot 5} + \frac{8 \operatorname{sen} 4x}{5\cdot 7} - \ldots$$

17. $y = -\ln\left(2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}\right)$ para $0 < x \leqslant \pi$

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x + \ldots$$

18. $y = \ln\left(2 \cos \frac{x}{2}\right)$ para $0 \leqslant x < \pi$

$$y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x - \ldots$$

19. $y = \frac{1}{2} \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ para $0 < x < \pi$

$$y = \cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \ldots$$

Puede obtenerse un gran número de fórmulas de desarrollos de funciones en series trigonométricas partiendo de las series de potencias de las funciones de variable compleja. Por ejemplo, del desarrollo

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots \qquad (|z| < 1),$$

haciendo

$$z = ae^{i\varphi}$$

y separando las partes real e imaginaria, se deduce que

$$\left.\begin{aligned} &1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^n \cos n\varphi + \ldots = \\ &\qquad\qquad = \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}, \\ &a \operatorname{sen}\varphi + a^2 \operatorname{sen} 2\varphi + \ldots + a^n \operatorname{sen} n\varphi + \ldots = \\ &\qquad\qquad = \frac{a\operatorname{sen}\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}. \end{aligned}\right\} \quad |a| < 1.$$

## 3. *Análisis armónico aproximado*

FÓRMULAS DE BESSEL. El cálculo aproximado de los coeficientes de una serie de Fourier se basa en la sustitución de las integrales en las fórmulas de Euler (véase la pág. 632) por sumas según alguna de las fórmulas de integración aproximada. Aquí, la más conveniente es la fórmula de los trapecios (véase la pág. 447). Mediante ésta pueden obtenerse las *fórmulas de Bessel* siguientes del análisis armónico aproximado. Dividamos el período $T$ en $2n$ partes iguales (fig. 422) y sean $x_k = \frac{kT}{2n}$ las abscisas de los puntos de división; las ordenadas en estos puntos son: $f(x_k) = y_k$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n)$. Tenemos aproximadamente:

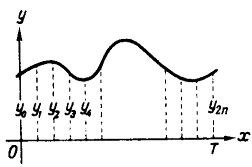



Fig. 422

$$na_0 = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k, \qquad na_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \cos\frac{km\pi}{n},$$

$$nb_m = \sum_{k=0}^{2n-1} y_k \operatorname{sen}\frac{km\pi}{n},$$

$$m = 1, 2, \ldots, n$$

(en este caso siempre es $b_n = 0$).

Formando la suma trigonométrica

$$s_r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{r} a_k \cos k\,\frac{2\pi x}{T} + \sum_{k=1}^{r} b_k \operatorname{sen} k\,\frac{2\pi x}{T}, \qquad r < n,$$

tendremos que esta última dará la mejor aproximación en el sentido del método de los cuadrados mínimos (véase la pág. 659) hacia la función dada por las ordenadas $y_k$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n)$, si sus coeficientes fueron calculados por las fórmulas de Bessel. En el caso $r = n$, la suma trigonométrica

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{2\pi x}{T} + a_2 \cos 2\frac{2\pi x}{T} + \ldots + \frac{a_n}{2}\cos n\frac{2\pi x}{T} +$$
$$+ b_1 \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{T} + b_2 \cos 2\frac{2\pi x}{T} + \ldots + b_{n-1} \operatorname{sen}(n-1)\frac{2\pi x}{T},$$

cuyos coeficientes se han calculado por las fórmulas de Bessel toma para $x = x_k$ los valores dados $y_k$ y, por lo tanto, resuelve el problema de *interpolación trigonométrica* para la función periódica (véase la pág. 660).

PLANTILLAS Y APARATOS. Para el cálculo por las fórmulas de Bessel se emplean esquemas y plantillas especiales de cálculo. A continuación se dan esquemas para el análisis armónico cuando el período se divide en 12 y 24 partes.

Si la función $f(x)$ viene dada gráficamente, entonces para el análisis armónico aproximado, a excepción del caso de aplicación de las fórmulas de Bessel, pueden emplearse aparatos especiales, llamados analizadores armónicos. Después de describir la gráfica de la función dada con el estilete del analizador, los contadores especiales del aparato dan los valores aproximados de los coeficientes de Fourier.

## Esquemas para el análisis armónico aproximado

**Esquema I.** *El período T está dividido en 12 partes iguales.* Las ordenadas en los puntos de división son: $y_0, y_1, \ldots, y_{11}$. Las sumas y diferencias se hallan por el siguiente esquema:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pm$ | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ |
| | | $y_{11}$ | $y_{10}$ | $y_9$ | $y_8$ | $y_7$ | | $s_6$ | $s_5$ | $s_4$ | | $d_5$ | $d_4$ | |
| Sumas | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $\sigma_0$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ |
| Diferencias | | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ | $d_5$ | | $\tau_0$ | $\tau_1$ | $\tau_2$ | | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | |

Los cálculos posteriores se efectúan por el siguiente esquema:

| | Términos con cosenos | | | | | | | | Términos con senos | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\sigma_0$<br>$\sigma_2$ | $\sigma_1$<br>$\sigma_3$ | $\tau_0$ | | $\sigma_0$ | $-\sigma_3$ | $\tau_0$ | $\tau_2$ | $\delta_3$ | | | | $\delta_1$ | $\delta_3$ |
| $1-0{,}134$ $(=0{,}866)$ | | | | $\tau_1$ | | | | | | $\delta_2$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | | |
| 0,5 | | | $\tau_2$ | | $-\sigma_2$ | $-\sigma_1$ | | | $\delta_1$ | | | | | |
| Sumas .... | I | II | I | II | I | II | I | II | I | II | I | II | I | II |
| Sumas I+II... | $6a_0$* | | $6a_1$ | | $6a_2$ | | — | | $6b_1$ | | $6b_2$ | | — | |
| Diferencias I−II... | $6a_6$* | | $6a_5$ | | $6a_4$ | | $6a_3$ | | $6b_5$ | | $6b_4$ | | $6b_3$ | |

* Se debe tener en cuenta que en la fórmula del polinomio trigonométrico de interpolación (véase la pág. 642) no figuran $a_0$ y $a_n$, sino $\frac{1}{2}a_0$ y $\frac{1}{2}a_n$.

Al efectuar los cálculos según este esquema, en lugar de $\sigma$, $\tau$, $\delta$ y $\gamma$ deben ponerse los valores correspondientes, multiplicados por los factores que están a la izquierda en la misma fila (en vez de 0,866 está escrito $1-0{,}134$, puesto que al emplear la regla de cálculo, se puede multiplicar con mayor exactitud por 0,134 que por 0,866).

ESQUEMA II. *El período T está dividido en 24 partes.*

Las ordenadas de los puntos de división $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{23}$ se escriben en la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & y_2 & y_4 & y_6 & y_8 & y_{10} & y_{12} \\ & y_{22} & y_{20} & y_{18} & y_{16} & y_{14} & \\ y_3 & y_5 & y_7 & y_9 & y_{11} & y_{13} & y_{15} \\ & y_1 & y_{23} & y_{21} & y_{19} & y_{17} & \end{array}$$

Para cada grupo de ordenadas se efectúan separadamente los cálculos según el esquema expuesto anteriormente para 12 ordenadas. Designemos con $A_k$ y $B_k$ los coeficientes obtenidos del primer grupo de ordenadas y con $A'_k$ y $B'_k$ los obtenidos del segundo grupo. Calculando $\overline{A}_k$ y $\overline{B}_k$ por las fórmulas:

$$\overline{A}_0 = A'_0, \quad \overline{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_1 - B'_1), \quad \overline{A}_2 = -B'_2, \quad \overline{A}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_3 + B'_3),$$

$$\overline{A}_4 = -A'_4, \quad \overline{A}_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_5 - B'_5),$$

$$\overline{B}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_1 + B'_1), \quad \overline{B}_2 = A'_2, \quad \overline{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(A'_3 - B'_3),$$

$$\overline{B}_4 = -B'_4, \quad \overline{B}_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A'_5 + B'_5), \quad \overline{B}_6 = -A'_6$$

(en realidad no es necesario calcular $\overline{A}_k$ y $\overline{B}_k$, sino sus valores multiplicados por 6, (véase más adelante), se hallan las sumas y diferencias que dan los coeficientes buscados:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $6A_0$ | $6A_1$ | $6A_2$ | $6A_3$ | $6A_4$ | $6A_5$ | $6A_6$ |
| | $6\overline{A}_0$ | $6\overline{A}_1$ | $6\overline{A}_2$ | $6\overline{A}_3$ | $6\overline{A}_4$ | $6\overline{A}_5$ | |
| Sumas | $12a_0$* | $12a_1$ | $12a_2$ | $12a_3$ | $12a_4$ | $12a_5$ | $12a_6$ |
| Diferencias | $12a_{12}$* | $12a_{11}$ | $12a_{10}$ | $12a_9$ | $12a_8$ | $12a_7$ | |
| | $6\overline{B}_1$ | $6\overline{B}_2$ | $6\overline{B}_3$ | $6\overline{B}_4$ | $6\overline{B}_5$ | $6\overline{B}_6$ | |
| | $6B_1$ | $6B_2$ | $6B_3$ | $6B_4$ | $6B_5$ | | |
| Sumas | $12b_1$ | $12b_2$ | $12b_3$ | $12b_4$ | $12b_5$ | $12b_6$ | |
| Diferencias | $12b_{11}$ | $12b_{10}$ | $12b_9$ | $12b_8$ | $12b_7$ | | |

* Véase la llamada de la pág. 643.

SÍNTESIS. Ordinariamente, se entiende por *síntesis* el cálculo de los valores de una función periódica $f(x)$, dada por su serie de Fourier. Si dentro de los límites del grado de exactitud admisible se puede limitarse en la serie de Fourier a las seis primeras armónicas (es decir, considerar que $a_k = b_k = 0$ para $k > 6$), entonces el cálculo de los valores $y_k = f(x_k)$ en los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ que dividen el período en 12 partes iguales, puede efectuarse mediante el esquema I dado anteriormente (pág. 643). Para esto es necesario poner en lugar de $s_0, s_1, \ldots, s_6$ los coeficientes dados $a_0, a_1, \ldots, a_6$, y en lugar de $d_1, d_2, \ldots, d_5$ los coeficientes $b_1, b_2, \ldots, b_5$ (el coeficiente $b_6$ se desprecia, pues se ve fácilmente que el término correspondiente de la serie no influye en los valores que toma la función en los puntos considerados) y efectuar los cálculos según el esquema hasta el final. Los números que se obtienen en las dos últimas filas de la tabla de la pág. 643 (en lugar de $6a_0, 6a_1, \ldots, 6a_6, 6b_1, \ldots, 6b_5$) los designamos con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_6, \beta_1, \ldots, \beta_5$. Entonces para obtener los valores buscados de la función no queda más que efectuar las sumas y restas según el esquema:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha_0$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ |
| | | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ | $\beta_4$ | $\beta_5$ | |
| Sumas | $y_0$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |
| Diferencias | | $y_{11}$ | $y_{10}$ | $y_9$ | $y_8$ | $y_7$ | |

SEXTA PARTE

# ELABORACIÓN DE LAS OBSERVACIONES

---

## I. FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES Y DE LA TEORÍA DE ERRORES

### *1. Teoría de probabilidades*

Acontecimientos casuales. Si un acontecimiento puede verificarse o no en unas condiciones dadas, entonces se llama *aleatorio* o *casual.* La apreciación cuantitativa de la posibilidad de aparición de un acontecimiento aleatorio dado, es *su probabilidad.*

Definición de probabilidad. Si, en ciertas condiciones, tiene que verificarse uno de $n$ acontecimientos aleatorios incompatibles y, además, no hay ningún fundamento para esperar que uno de ellos goce de mayor preferencia que los demás, entonces se dice que estos acontecimientos tienen **la misma probabilidad,** igual a $p = \frac{1}{n}$.

Si un acontecimiento aleatorio $A$ aparece como consecuencia de uno cualquiera de $m$ acontecimientos, tomados del número total $n$ de acontecimientos probables (incompatibles y de igual probabilidad), entonces se llama *probabilidad* del acontecimiento $A$ al número $p = \frac{m}{n}$. Al acontecimiento imposible le corresponde la probabilidad 0 y al cierto la probabilidad 1. La probabilidad de cualquier acontecimiento está comprendida entre 0 y 1.

Suma y multiplicación de probabilidades. La probabilidad de la aparición de un acontecimiento cualquiera (indiferentemente cuál) entre varios acontecimientos incompatibles es igual a la ***suma de las*** *probabilidades* de estos acontecimientos. La probabilidad de la aparición simultánea de varios acontecimientos es igual al *producto de las probabilidades* de estos acontecimientos; además, si los acontecimientos se verifican sucesivamente, al culcular la probabilidad de cada acontecimiento hay que tener en cuenta la influencia posible de todos los acontecimientos sucedidos anteriormente. Por ejemplo, en una urna hay 5 bolas negras, 3 blancas y 2 rojas. La probabilidad de extraer al azar una bola blanca es igual a 0,3; la probabilidad de extraer una bola roja es igual a 0,2; la probabilidad de extraer una bola blanca o roja es igual a $0{,}3+0{,}2 = 0{,}5$. La probabilidad de extraer sucesivamente una bola blanca y una roja es igual a $0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$, si la primera bola extraída se coloca de nuevo en la urna, y es igual a $0{,}3 \cdot \frac{2}{9} = 0{,}067$, si la bola extraída no se devuelve a la urna.

PRUEBAS REPETIDAS. Si se efectúan $n$ pruebas independientes y en cada una de ellas la probabilidad de un acontecimiento $A$ es igual a $p$, entonces la probabilidad de que el acontecimiento $A$ aparezca $m$ veces, es igual a

$$p_{m,n} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}. \tag{1}$$

Esta probabilidad será máxima para $np+p-1 \leqslant m < np+p$. Para valores grandes de $m$ y $n$ se puede obtener el valor aproximado de $p_{m,n}$ mediante la fórmula de Stirling (véase la pág. 185).

$$p_{m,n} \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \tag{2}$$

donde $\sigma = \sqrt{np(1-p)}, \quad x = \frac{m-np}{\sigma}$.

Para valores pequeños de $p$ da un valor más exacto la *fórmula de Poisson:*

$$p_{m,n} \approx \frac{y^m}{m!} e^{-y}, \quad \text{donde} \quad y = np^*. \tag{3}$$

Al aumentar el número $n$ de pruebas, la frecuencia $\frac{m}{n}$ más probable del acontecimiento $A$ se aproxima a la probabilidad $p$ de este acontecimiento. Además, la probabilidad de que la frecuencia del acontecimiento $A$ esté comprendida entre

$$p - \frac{a\sigma}{n} \quad \text{y} \quad p + \frac{a\sigma}{n},$$

* Para los $p$ próximos a la unidad también se aplica la fórmula de Poisson, considerando el acontecimiento contrario a $A$ ("no $A$"), cuya probabilidad $q = 1-p$ es pequeña.

se aproxima al límite

$$\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2} dx \quad \textit{(teorema de Laplace).}$$

La función $\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a e^{-x^2/2} dx$ se llama *integral de probabilidad** de Gauss (las tablas de $\Phi(x)$ véanse en las págs. 87-88).

*Ejemplos:* 1) ¿Cuál es la probabilidad de que, al arrojar 400 veces una moneda, la frecuencia de aparición del escudo se diferencie de la probabilidad $p = 1/2$ en menos de $\frac{1}{25}$, es decir, que el número de veces que aparece el escudo esté comprendido entre 216 y 184? Como $\sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 10$ y $\frac{a\sigma}{n} = \frac{1}{25}$, se tiene $a = \frac{400}{10 \cdot 25} = 1{,}6$. Según el teorema de Laplace, la probabilidad pedida es $\approx \Phi(1{,}6) = 0{,}8904$.

2) Supongamos que la probabilidad de obtener un artículo defectuoso es igual a 0,01. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya más de tres artículos defectuosos en una partida de 100 artículos? La probabilidad buscada es igual a $p = p_{0,\,100} + p_{1,\,100} + p_{2,\,100} + p_{3,\,100}$. Según la fórmula de Poisson ($y = 1$) obtenemos $p = \frac{1}{e}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = 0{,}9810$. La aplicación de la integral de Gauss en este ejemplo da un resultado muy grosero ($p = 0{,}928$). Un resultado algo mejor ($p = 0{,}938$) resulta mediante la fórmula (2). El valor exacto es $p = 0{,}9816$.

**Ley de los grandes números.** Corolario del teorema de Laplace: Con una probabilidad tan próxima como se quiera a 1, se puede esperar que, para un número suficientemente grande de experimentos, la frecuencia del acontecimiento $A$ se diferenciará de su probabilidad tan poco como se desee *(ley de los grandes números, teorema de Bernoulli).*

**Variables aleatorias.** Se llama *variable aleatoria* a aquella cuyos valores dependen del azar. Ejemplos de variables aleatorias: el número de aciertos en el blanco para un número dado de disparos, el número de puntos obtenidos al arrojar un dado de jugar; la velocidad de una molécula de gas.

---

* Frecuentemente se llama integral de probabilidad a la función

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \Phi(x\sqrt{2}).$$

Para caracterizar a la variable aleatoria es necesario conocer el conjunto de los valores posibles de esta variable, y también las probabilidades con las que estos valores pueden aparecer. Estos datos forman la *ley de distribución* de la variable aleatoria. Si la variable aleatoria $A$ puede tomar cualquier valor de un intervalo $(a, b)$ (tal variable aleatoria se llama *continua*), entonces, la probabilidad de que la variable $A$ tome un valor determinado cualquiera $x$, es igual a cero, puesto que el número de casos posibles es infinito. Suponiendo que para cada intervalo pequeño, situado en el intervalo $(a, b)$ de valores admisibles de la variable $A$, la probabilidad de que A tome valores de dicho intervalo es proporcional a su longitud, se puede caracterizar la variable aleatoria $A$ indicando la probabilidad $\varphi(x)\,dx$ de que $x < A < x+dx$. La función $\varphi(x)$ se llama *densidad de distribución de la probabilidad* de la variable aleatoria $A$. Del teorema de la suma de probabilidades se deduce que la probabilidad de que $A$ tome valores del intervalo desde $x_0$ hasta $x_1$, es igual a $\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\,dx$. Como la variable aleatoria siempre toma algún valor, se tiene $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1$.

Valor medio de una variable aleatoria. Si la variable aleatoria puede tomar los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con las probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente entonces se llama *valor medio* o media de la variable $x$ (o *esperanza matemática*) al número

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

En el caso de una variable aleatoria continua $y$ con densidad de distribución de probabilidad $\varphi(y)$, la esperanza matemática es igual a

$$\bar{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi(y)\,dy.$$

*Ejemplos:* En una lotería de 1000 billetes hay un premio de 1000 rublos, 10 premios de 100 rublos y 100 premios de 20 rublos. La ley de distribución de la variable aleatoria $a$ del premio ganado en un billete (en rublos) viene dado por la tabla:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 1000 | 100 | 20 | 0 |
| $p_i$ | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 0,889 |

La esperanza matemática de $a$ es igual a $\bar{a} = 1000 \cdot 0{,}001 + 100 \cdot 0{,}01 + {}+ 20 \cdot 0{,}1 = 4$ rublos.

2) La ley de distribución de Maxwell (en la teoría cinética de los gases) es: $\varphi(v) = 4\sqrt{\frac{k^3}{\pi}}\, v^2 e^{-kv^2}$; la probabilidad de que la velocidad de la molécula de un gas homogéneo que se encuentra en equilibrio calórico esté comprendida entre $v$ y $v+dv$, es igual a $\varphi(v)\,dv$ ($k$ es una constante positiva). El valor medio de la velocidad es igual a

$$\bar{v} = \int_0^\infty v\varphi(v)\,dv = \frac{2}{\sqrt{k\pi}}$$ (véase la pág. 465).

Dɪsᴘᴇʀsɪóɴ. Se llama *dispersión* de una variable aleatoria al valor medio del cuadrado de la desviación de la variable aleatoria de su valor medio.

*Ejemplo:* Para la ley de distribución de Maxwell dada anteriormente, la dispersión es igual a

$$\overline{(v-\bar{v})^2} = \int_0^\infty (v-\bar{v})^2\,\varphi(v)\,dv = \int_0^\infty v^2\varphi(v)\,dv - (\bar{v})^2 = \frac{3}{2k} - \frac{4}{\pi k} = \frac{0{,}227}{k}.$$

La igualdad obtenida en este ejemplo $\overline{(v-\bar{v})^2} = \overline{v^2} - (\bar{v})^2$, es una identidad y se emplea generalmente para el cálculo de la dispersión.

## 2. Teoría de errores

Eʀʀᴏʀᴇs ᴀᴄᴄɪᴅᴇɴᴛᴀʟᴇs. Los valores obtenidos en las experimentaciones inevitablemente contienen errores debidos a causas diversas. Entre ellos se deben diferenciar los errores *sistemáticos* y *accidentales*. Los errores sistemáticos se deben a causas que actúan de manera absolutamente determinada, y siempre pueden corregirse o se les puede tener en cuenta con bastante precisión (por ejemplo: los errores ocasionados por instrumentos incorrectamente graduados, o debidos a las condiciones exteriores del experimento, etc.). Los errores accidentales se producen generalmente por un número muy grande de causas aisladas que actúan en cada medición individual de manera distinta. Es imposible eliminar absolutamente estos errores; sólo se les puede tener en cuenta *en término medio*, para lo cual es necesario conocer las leyes a las que se someten los errores accidentales. Designaremos por $A$ la magnitud medible y por $x$ el error accidental de la medición. Como el error $x$ puede tomar valores cualesquiera, éste es una variable aleatoria continua que se caracteriza totalmente por su ley de distribución (véase la pág. 649). Como muestra la experiencia, la densidad de distribución de la probabilidad $\varphi(x)$ del error accidental debe poseer en la gran mayoría de casos las propiedades siguientes: 1) $\varphi(x)$ es una función *par:* $\varphi(-x) = \varphi(x)$, es decir, los errores de signo distinto son igualmente probables. 2) $\varphi(x)$, para $x > 0$, es una *función monótona decreciente*, es decir, los errores mayores en valor absoluto son menos probables. 3) La esperanza matemática del valor absoluto de un error, es decir, $2\int_0^{\infty} x\varphi(x)\,dx$, es finita. Se pueden obtener unas leyes determinadas de distribución agregando también otras condiciones.

LEY NORMAL DE DISTRIBUCIÓN. MEDIDA DE EXACTITUD. La más simple y que en la mayoría de las veces refleja con suficiente exactitud la realidad es la llamada *ley normal de distribución de errores*:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}.$$

Esta ley de distribución puede obtenerse partiendo de diferentes premisas teóricas, en particular, exigiendo que el valor más probable de la magnitud incógnita, para la cual por mediciones directas se han obtenido una serie de valores del mismo grado de exactidud, sea la media aritmética de estos valores. La magnitud $\sigma^2$ es el *parámetro* de la ley normal y puede tomar cualquier valor. Como $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx = 0$ y $\bar{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)\,dx = \sigma^2$, se tiene que $\sigma^2 = \bar{x^2} - (\bar{x})^2$ es la dispersión del error $x$. Al aumentar $\sigma^2$ disminuye el máximo de $\varphi(x)$, que corres-

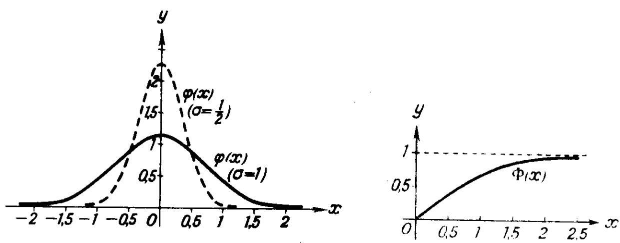



Fig. 423

ponde a $x = 0$ y es igual a $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Como, en este caso, el área bajo a gráfica de $\varphi(x)$ (fig. 423) queda invariable ($= 1$, véase pág. 649), resulta que al crecimiento de la dispersión le corresponde un aumento de la probabilidad de errores mayores. En el caso de la ley normal, la probabilidad de que el error $x$ no supere en valor absoluto a $a$, es igual a

$$\Phi\left(\frac{a}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a/\sigma} e^{-t^2/2}\, dt.$$

La variable $X = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, que es una combinación lineal de las variables aleatorias $x_1, x_2, \ldots, x_n$, con ley normal de distribución y con las dispersiones $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$, respectivamente se somete a la ley normal con la dispersión $\sigma^2$:

$$\sigma^2 = \lambda_1^2\sigma_1^2 + \lambda_2^2\sigma_2^2 + \ldots + \lambda_n^2\sigma_n^2.$$

Además de la dispersión $\sigma^2$, para caracterizar la ley normal de distribución se aplican los siguientes valores:

1) *El error medio simple* $\eta$, que representa la esperanza matemática del valor absoluto del error:

$$\eta = \overline{|x|} = 2\int_0^{\infty} x\varphi(x)\, dx.$$

2) *El error medio cuadrático* o *standard* $\sigma$, igual a la raíz cuadrada de la dispersión.

3) *El error probable* $r$, que es un valor tal que la probabilidad de que el error no supere a $r$ en valor absoluto, es igual a $\frac{1}{2}$:

$$\int_{-r}^{+r} \varphi(x)\, dx = \Phi\left(\frac{r}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}.$$

4) *Medida de precisión:* $h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$. Todos estos valores están ligados entre sí por las siguientes relaciones*:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, h} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma = \frac{r}{\rho\sqrt{\pi}}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}\, h} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\eta = \frac{r}{\sqrt{2}\,\rho},$$

$$r = \frac{\rho}{h} = \rho\sqrt{2}\sigma = \rho\sqrt{\pi}\eta, \qquad h = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma} = \frac{\rho}{r}.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071 = \frac{1}{1{,}4142}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979 = \frac{1}{1{,}2533},\right.$$

$$\left.\rho = 0{,}4769, \quad \rho\sqrt{2} = 0{,}6745 = \frac{1}{1{,}4826}, \quad \rho\sqrt{\pi} = 0{,}8454 = \frac{1}{1{,}1829}\right).$$

---

* El valor $\rho$ se define de la ecuación $\Phi(\rho\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$.

Determinación de la dispersión por datos experimentales. Si para alguna magnitud $A$ por medición directa se han obtenido $n$ valores $a_i$, con igual grado de exactitud y si los errores de la magnitud $A$ se someten a la ley normal de distribución, entonces el valor más probable de $A$ es la *media aritmética* (el promedio)

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

Designemos por $\varepsilon_i$ la desviación del valor observado $a_i$ (para cada observación) de la magnitud $A$ de la media aritmética $a$: $\varepsilon_i = a_i - a$.

Para determinar la dispersión de la ley normal de distribución de errores se emplea en este caso la fórmula

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{n=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n-1} \, *$$

o determinan $\sigma$ por el error medio simple, el cual se halla por la fórmula:

$$\eta = \frac{\sum |\varepsilon_i|}{\sqrt{n(n-1)}} \approx \frac{\sum |\varepsilon_i|}{n - \frac{1}{2}}.$$

Si los valores $\sigma$, obtenidos por los dos procedimientos se diferencian bastante uno del otro, esto demuestra que no se puede aplicar en este caso la ley normal de distribución.

Si los valores individuales $a_i$ de la magnitud $A$ se han obtenidos con diferente grado de exactitud, que se caracteriza por el error medio cuadrático $\sigma_i$, entonces el valor más probable de la magnitud $A$ es la *media pondareda*

$$a = \frac{w_1 a_1 + w_2 a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n},$$

donde los *pesos* $w_i$ son unos números inversamente proporcionales a los cuadrados de los errores medios cuadráticos correspondientes. El error medio cuadrático del valor individual $a_i$ de peso $w_i$ es igual a

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2}}{(n-1) w_i},$$

* En la teoría de probabilidades y en la estadística matemática para escribir la sumación se emplea frecuentemente la notación de Gauss: $[\varepsilon\varepsilon]$ en lugar de $\sum \varepsilon_i^2$, $[ab]$ en lugar de $\sum a_i b_i$, etc.

donde $\varepsilon_i$ es la desviación $a_i$ de la media ponderada. En correspondencia con la fórmula para la dispersión de una combinación lineal, los errores medios cuadráticos de la media aritmética y de la media ponderada se determinan por las fórmulas:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}{n(n-1)}} \quad \text{y} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i^2}{(n-1)(w_1+w_2+\ldots+w_n)}}.$$

*Ejemplo:* Por medición directa se determinaron cinco veces las dimensiones de los diámetros interior ($d$) y exterior ($D$) de un vaso cilíndrico hueco. Los resultados de las mediciones vienen dados en la tabla siguiente:

| Nº de observaciones ($i$) | $d$ | $D$ | $\varepsilon_{d_i}$ | $\varepsilon_{d_i}^2$ | $\varepsilon_{D_i}$ | $\varepsilon_{D_i}^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 17,3 | 22,7 | 0,06 | 0,0036 | −0,08 | 0,0064 |
| 2 | 17,0 | 22,8 | −0,24 | 0,0576 | 0,02 | 0,0004 |
| 3 | 17,3 | 23,0 | 0,06 | 0,0036 | 0,22 | 0,0484 |
| 4 | 17,4 | 22,8 | 0,16 | 0,0256 | 0,02 | 0,0004 |
| 5 | 17,2 | 22,6 | −0,04 | 0,0016 | −0,18 | 0,0324 |
| $\sum_i$ | 86,2 | 113,9 | 0,56* | 0,0920 | 0,52* | 0,0880 |

Hallando las medias aritméticas $d = 17{,}24$ y $D = 22{,}78$, calculamos las desviaciones $\varepsilon_{d_i}$ y $\varepsilon_{D_i}$. Según las fórmulas expuestas anteriormente hallamos para la medición individual de $d$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}0920}{4}} = 0{,}152 \quad \text{ó} \quad \eta = \frac{0{,}56}{\sqrt{20}} = 0{,}125 \text{ (lo que da } \sigma = 0{,}157);$$

para la medición individual de $D$:

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}0880}{4}} = 0{,}148 \quad \text{ó} \quad \eta = \frac{0{,}52}{\sqrt{20}} = 0{,}116 \quad \text{(lo que da } \sigma = 0{,}146).$$

La coincidencia de los valores obtenidos de $\sigma$ por los dos procedi-

* En esta columna está calculada la suma de los valores absolutos.

mientos es absolutamente satisfactoria. Para las medias aritméticas:

$$\sigma_d = \frac{0{,}152}{\sqrt{5}} = 0{,}068, \quad \sigma_D = \frac{0{,}148}{\sqrt{5}} = 0{,}066.$$

Para el espesor de las paredes del vaso, $m = \frac{1}{2}(D-d) = 2{,}77$, el error medio cuadrático es: $\sigma_m = \sqrt{\frac{1}{4}\sigma_d^2 + \frac{1}{4}\sigma_D^2} = 0{,}047$.

MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS. Si en un experimento se determinan los valores $f_i$ de ciertas funciones

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

de las magnitudes incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, entonces para la determinación de estas magnitudes es necesario resolver el sistema de *ecuaciones de condición*

$$\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

En general, este sistema es incompatible (para $m > n$) y para las magnitudes incógnitas se buscan los valores más probables. Si los errores de los valores $f_1, \ldots, f_n$ poseen una ley normal de distribución (lo que se admite ordinariamente), entonces para el sistema más probable de valores de las incógnitas, la suma de los cuadrados de las desviaciones $\varepsilon_i = \varphi_i - f_i$ será mínimo. Resulta que si las ecuaciones de condición son lineales:

$$\begin{aligned}
a_1x_1 + b_1x_2 + \ldots + l_1x_n &= f_1, \\
a_2x_1 + b_2x_2 + \ldots + l_2x_n &= f_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_mx_1 + b_mx_2 + \ldots + l_mx_n &= f_m,
\end{aligned}$$

la exigencia de que sea mínima (véase la pág. 376) la suma de los cuadrados de las desviaciones conduce al sistema de *ecuaciones normales* lineales*:

$$\begin{aligned}
[aa]\,x_1 + [ab]\,x_2 + \ldots + [al]x_n &= [af], \\
[ba]\,x_1 + [bb]\,x_2 + \ldots + [bl]x_n &= [bf], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[la]\,x_1 + [lb]\,x_2 + \ldots + [ll]x_n &= [lf].
\end{aligned}$$

Para obtener la $k$-ésima ecuación normal es necesario multiplicar cada ecuación de condición por el coeficiente de $x_k$ y sumar todas las ecuaciones.

* En las notaciones de Gauss, véase la llamada de la pág. 653.

En el caso de dependencias no lineales, de ordinario, se hallan groseramente los valores aproximados $x_1^0, \ldots, x_n^0$ de los valores pedidos $x_1, \ldots, x_n$ y se desarrolla $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ en serie de potencias de $\xi_1 = x_1 - x_1^0, \ldots, \xi_n = x_n - x_n^0$. Despreciando los términos de grado superior al primero, se obtienen las ecuaciones de condición lineales, mediante las cuales se determinan los valores más probables de corrección $\xi_i$.

El método indicado sirve para el caso en que todos los valores tienen igual exactitud. En caso contrario, cada ecuación de condición debe multiplicarse previamente por un peso inversamente proporcional al error medio cuadrático del valor correspondiente $f_i$.

*Ejemplo:* Las mediciones de una resistencia eléctrica $R$ de una varilla de cobre a diferentes temperaturas ($t^0$ Celsius) dan los resultados insertados en la tabla siguiente (las primeras dos columnas):

| $t$ | $R$ | $t^2$ | $tR$ | $R_{\text{calculada}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 19,1 | 76,30 | 364,8 | 1457,3 | 76,26 |
| 25,0 | 77,80 | 625,0 | 1945,0 | 77,96 |
| 30,1 | 79,75 | 906,0 | 2400,5 | 79,43 |
| 36,0 | 80,80 | 1296,0 | 2908,8 | 81,13 |
| 40,0 | 82,35 | 1600,0 | 3294,0 | 82,28 |
| 45,1 | 83,90 | 2034,0 | 3783,9 | 83,76 |
| 50,0 | 85,10 | 2500,0 | 4255,0 | 85,16 |
| Σ 245,3 | 566,00 | 9325,8 | 20044,5 | |

Si se busca la dependencia de $R$ con respecto a $t^\circ$ en la forma: $R = a+bt$, entonces, para la determinación de las constantes $a$ y $b$ obtenemos siete ecuaciones de condición de la forma

$$R_i = a+bt_i,$$

donde $t_i$ y $R_i$ son los valores correspondientes de $t$ y $R$.

Las ecuaciones normales son:

$$7a+[t]\,b = [R], \quad [t]\,a+[t^2]\,b = [tR]$$

ó

$$7a+245{,}3b = 566{,}0, \quad 245{,}3a+9325{,}8b = 20\,044{,}5.$$

Resolviéndolas, obtenemos $a = 70{,}76$ y $b = 0{,}288$. Los valores de $R$, calculados según la fórmula $R = 70{,}76+0{,}288\ t$, se dan en la última columna de la tabla.

# II. FÓRMULAS EMPÍRICAS E INTERPOLACIÓN

## *1. Representación aproximada de una dependencia funcional*

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. En muchos casos, para una función dada solamente por una tabla o por su gráfica, suele ser necesario hallar la expresión analítica que representa aproximadamente a esta función. También puede surgir un problema semejante para una función dada por una fórmula, si esta última es muy complicada o no es conveniente para los objetivos pedidos (por ejemplo, se debe integrar la función y su integral no se expresa mediante funciones elementales). Las fórmulas que expresan la dependencia funcional obtenida de la experiencia en forma de una tabla o de una gráfica, se llaman *fórmulas empíricas.* Generalmente, para la representación aproximada de una función dada $f(x)$ se elige la función *de aproximación* $\varphi(x)$ entre las funciones de un tipo determinado; por ejemplo, se busca $\varphi(x)$ en forma de polinomio

$$\varphi(x) = a_0+a_1x+ \dots +a_nx^n,$$

o en la forma

$$\varphi(x) = Ae^{rx}+Be^{sx}+ \dots \text{ etc.},$$

exigiendo que la función $\varphi(x)$ se aproxime lo más posible a $f(x)$ en un intervalo determinado ($a \leqslant x \leqslant b$). Según sea el procedimiento por el cual se aprecie la proximidad de las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, se obtendrá una u otra aproximación mejor.

APROXIMACIÓN UNIFORME. Para la mejor aproximación, teóricamente es útil exigir que el máximo de la magnitud $|f(x)-\varphi(x)|$ en el intervalo $a \leqslant x \leqslant b$, en el cual es necesario obtener la representación aproximada de $f(x)$, sea el mínimo (en comparación con otra elección de $\varphi(x)$). Sin embargo, no existen métodos de obtención efectiva de tales *aproximaciones uniformes*, a excepción de casos aislados particulares. Así, por ejemplo, si en el intervalo $a < x < b$ existe la derivada segunda de la función $f(x)$ y ésta conserva el signo, la función lineal de mejor aproximación uniforme en este intervalo se halla de la manera siguiente (fig. 424). En la gráfica de la función $y = f(x)$ se halla un punto $P$ en el cual la tangente es paralela a la cuerda $MN$. La recta que une los puntos medios de las cuerdas $MP$ y $PN$ es la gráfica de la función lineal pedida.

Las aproximaciones uniformes se aplican principalmente en los estudios teóricos. La teoría de tales aproximaciones fue elaborada considerablemente por P. L. Chébishev.

APROXIMACIÓN POR EL MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS. La más empleada es la aproximación $\varphi(x)$ para la cual la magnitud alcanza el valor mínimo

$$M = \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2\, dx.$$

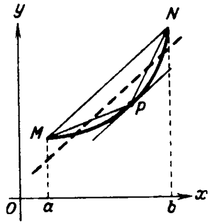


Fig. 424

Eligiendo que se anulen las derivadas parciales de $M$ con respecto a los parámetros que determinan la función $\varphi(x)$ (véase la pág. 376), se obtienen las ecuaciones que permiten encontrar los mejores valores (en el sentido indicado) de estos parámetros. El valor $\delta = \sqrt{M : (b-a)}$ se llama en este caso *error medio cuadrático*.

Si la función $\varphi(x)$ se busca en forma de una combinación lineal de unas funciones dadas

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ \ldots\ + a_n\varphi_n(x)$$

(por ejemplo, $\varphi(x)$ es un polinomio, si $\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = x,\ \ldots,\ \varphi_n = x^n$ o un polinomio trigonométrico, si $\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = \cos x,\ \varphi_2 = \operatorname{sen} x,\ \ldots,\ \varphi_{2n-1} = \cos nx,\ \varphi_{2n} = \operatorname{sen} nx$), entonces para la determinación de $a_0, a_1, \ldots, a_n$ se obtiene un sistema de ecuaciones lineales

$$\frac{1}{2}\ \frac{\partial M}{\partial a_k} = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\, dx - \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\, dx = 0$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Este sistema toma una forma particularmente simple, si las funciones $\varphi_i(x)$ poseen la propiedad de *ortogonalidad* en el intervalo $(a, b)$, es decir, si

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)\, dx = 0 \quad \text{para} \quad i \neq k^*.$$

* He aquí dos ejemplos de sistemas ortogonales de funciones:
1) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots; \operatorname{sen} x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \ldots$ en el intervalo $(0, 2\pi)$.
2) Los polinomios de Legendre $P_i(x)$ en el intervalo $(-1, +1)$ (véase la pág. 535).

En este caso,

$$a_k \int_a^b [\varphi_k(x)]^2\,dx = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

(compárese con las fórmulas de Euler, pág. 632). En relación con esta simplificación, si se pide hallar el polinomio de aproximación $b_0+b_1x+ + \ldots + b_nx^n$, es conveniente transformar el intervalo dado $(a, b)$ en el intervalo $(-1, +1)$ mediante la sustitución $x = \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t$ y buscar este polinomio en la forma:

$$\varphi(x) = a_0P_0+a_1P_1+ \ldots +a_nP_n,$$

donde $P_k(t)$ son los polinomios de Legendre.

*Ejemplo:* Hallar la aproximación mejor para $y = \operatorname{sen} x$ en forma de un polinomio de segundo grado en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Haciendo la sustitución de la variable independiente $x = \frac{\pi}{2}(t+1)$, transformaremos el intervalo $(0, \pi)$ en $(-1, +1)$. Buscamos la aproximación en la forma

$$\varphi = a_0+a_1P_1(t)+a_2P_2(t).$$

Entonces (véase la pág. 423)

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(t+1)\,dt = \frac{2}{\pi}, \quad a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} t\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(t+1)\,dt = 0,$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(t+1)\,dt = \frac{10}{\pi}\left(1-\frac{12}{\pi^2}\right).$$

Así, pues,

$$\operatorname{sen} x \approx \frac{2}{\pi}+\frac{10}{\pi}\left(1-\frac{12}{\pi^2}\right)\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right) \approx 0{,}980-0{,}418\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Aproximación en puntos aislados. En muchos casos, y sobre todo si la función $f(x)$ está dada gráficamente o por una tabla, para apreciar el grado de aproximación se considera la diferencia $f(x)-\varphi(x)$ no en todos los puntos del intervalo $(a, b)$, en el cual se necesita representar aproximadamente la función $f(x)$, sino sólo en unos puntos aislados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ elegidos previamente. Se considera que la función $\varphi(x)$ es la mejor aproximación de $f(x)$ (según el método de cuadrados mínimos), si $S = \sum_{i=0}^{n}[f(x_i)-\varphi(x_i)]^2$ tiene el valor mínimo en comparación con otras funciones, entre las cuales se elige la aproximación pedida*. Si $\varphi(x)$ se determina absolutamente por los parámetros $k, l, m, \ldots$, entonces los mejores valores (en el sentido indicado) de estos parámetros se hallan resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial m} = 0, \ldots$$

Si el número de parámetros que determinan la función $\varphi(x)$ es igual al número $(n+1)$ de puntos elegidos, entonces, por lo general, es posible elegir $\varphi(x)$ de tal modo que sea $\varphi(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, resolviendo para ello este sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas. En este caso, la función $\varphi(x)$ se llama función *de interpolación* y el proceso de la búsqueda y del cálculo de los valores de $\varphi(x)$ se llama *interpolación*.

La más difundida es la ***interpolación parabólica***, en la cual como función de interpolación se toma un polinomio $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Para las funciones periódicas se emplea la ***interpolación trigonométrica***; véase la pág. 642.

*La aproximación por el método de los valores medios*, véase la pág. 666.

## 2. Interpolación parabólica

CASO GENERAL. Cualquiera que sea la función dada $f(x)$ y cualesquiera que sean los *nodos de interpolación* elegidos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, siempre existe un polinomio único de $n$-ésimo grado $\varphi_n(x)$ que toma en estos puntos los mismos valores que $f(x)$: $\varphi(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Para hallar el polinomio de interpolación puede emplearse la *fórmula de Lagrange:*

$$\varphi_n(x) = L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + \ldots + L_n(x) f_n,$$

donde

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0) \ldots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \ldots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \ldots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \ldots (x_i-x_n)}$$

y

$$f_i = f(x_i).$$

Si se necesita calcular el valor de $\varphi_n(x)$ para un $x$ determinado, se puede emplear el siguiente esquema ("cruz por cruz"), que es cómodo

---

* Igual que anteriormente, se puede determinar también la mejor aproximación como aquella para la cual el máximo de $|f(x_i) - \varphi(x_i)|$ sea el mínimo; sin embargo, la averiguación de la aproximación por este procedimiento es prácticamente difícil.

sobre todo para la aplicación de una máquina computadora:

$$\begin{array}{llllll}
x_0-x & f_0 & & & & \\
x_1-x & f_1 & (f_0,f_1) & & & \\
x_2-x & f_2 & (f_0,f_2) & (f_0,f_1,f_2) & & \\
\multicolumn{6}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
x_n-x & f_n & (f_0,f_n) & (f_0,f_1,f_n) & \dots & (f_0,f_1,\dots,f_n).
\end{array}$$

Cada símbolo $(f_0, f_1, \dots, f_k)$ representa el valor en el punto $x$ del polinomio de interpolación construido según los nodos $x_0, x_1, \dots, x_k$. Estos números se calculan columna por columna de la siguiente manera. Los números de la columna $(f_0, f_k)$ se obtienen por la fórmula

$$(f_0, f_k) = \frac{(x_0-x)f_k-(x_k-x)f_0}{(x_0-x)-(x_k-x)}.$$

Cada columna siguiente se obtiene de la anterior por el mismo esquema; por ejemplo:

$$(f_0, f_1, f_k) = \frac{(x_1-x)\,(f_0,f_k)-(x_k-x)\,(f_0,f_1)}{(x_1-x)-(x_k-x)}, \quad \text{etc.}$$

El orden de disposición de los nodos puede elegirse arbitrariamente.

*Ejemplo:* Se necesita calcular sen 50° empleando los valores de los senos de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° con cinco cifras significativas. El esquema "cruz por cruz" tendrá en este caso la forma siguiente:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| −50 | 0,00000 | | | | |
| −20 | 0,50000 | 0,83333 | | | |
| − 5 | 0,70711 | 0,78568 | 0,7 6980 | | |
| 10 | 0,86603 | 0,72169 | 0,7 5890 | 66 17 | |
| 40 | 1,00000 | 0,55556 | 0,7 4074 | 66 57 | 04 |

Si las primeras cifras, en alguna columna, resultan iguales (en el ejemplo dado ellas están separadas), se puede no incluirlas en los cálculos posteriores. Así, por ejemplo, en la última columna se obtienen las últimas cifras del resultado:

$$\frac{10\cdot 57-40\cdot 17}{10-40} = 04.$$

Definitivamente, sen 50° = 0,76604.

Nodos equidistantes. Tablas de diferencias. Muy frecuentemente se presenta el caso en que los nodos de interpolación se encuentran a igual distancia. El valor constante $h = x_{i+1}-x_i$ se llama, en este caso, *paso* de la tabla dada de valores de $f(x)$; $x_k = x_0+hk$. (Esta notación se conserva para $k < 0$.)

*Las diferencias primeras* de una función con respecto a un paso dado $h$ se determinan por las fórmulas:

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad \Delta f_i = f_{i+1} - f_i.$$

Las diferencias de las diferencias primeras forman las *diferencias de segundo orden* (o diferencias segundas):

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x); \quad \Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i.$$

Así mismo se determinan también las diferencias de órdenes más superiores. Las diferencias pueden expresarse mediante los valores dados de la función:

$$\Delta^k f_0 = f_k - k f_{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} f_{k-2} - \dots \pm f_0$$

[simbólicamente: $\Delta^k f_0 = (E-1)^k f_0$, haciendo la notación $E^i f_0 = f_i$]. Para los fines de la interpolación, según los valores dados de la función se forma la *tabla de diferencias* de acuerdo al esquema siguiente:

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta f(x)$ | $\Delta^2 f(x)$ | $\Delta^3 f(x)$ | $\Delta^4 f(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | ... | | | | | |
| | | $\Delta f_{-3}$ | | | | |
| $x_{-2}$ | $f_{-2}$ | | $\Delta^2 f_{-3}$ | | $\Delta^4 f_{-4}$ | $N_{II}$ |
| | | $\Delta f_{-2}$ | | $\Delta^3 f_{-3}$ | | |
| $x_{-1}$ | $f_{-1}$ | | $\Delta^2 f_{-2}$ | | $\Delta^4 f_{-3}$ | |
| | | $\Delta f_{-1}$ | | $\Delta^3 f_{-2}$ | | |
| $x_0$ | $f_0$ | | $\Delta^2 f_{-1}$ | | $\Delta^4 f_{-2}$ | $S$ |
| | | $\Delta f_0$ | | $\Delta^3 f_{-1}$ | | $B$ |
| $x_1$ | $f_1$ | | $\Delta^2 f_0$ | | $\Delta^4 f_{-1}$ | |
| | | $\Delta f_1$ | | $\Delta^3 f_0$ | | |
| $x_2$ | $f_2$ | | $\Delta^2 f_1$ | | $\Delta^4 f_0$ | $N_I$ |
| | | $\Delta f_2$ | | $\Delta^3 f_1$ | | |
| $x_3$ | $f_3$ | | $\Delta^2 f_2$ | | | |
| ... | ... | | | | | |

En esta tabla, todo número (a excepción de los que se encuentran en las dos primeras columnas) es la diferencia de los dos números de la columna anterior que se encuentran media fila más abajo y media fila más arriba de la considerada*. Al formar la tabla de diferencias se debe tener en cuenta que la existencia de errores en la primera columna, no superiores a $\varepsilon$ en valor absoluto, puede conducir a errores que llegan hasta $2\varepsilon$ en la segunda columna, hasta $4\varepsilon$ en la tercera columna, hasta $2^{m-1}\varepsilon$ en la $m$-ésima columna. Por lo tanto, incluso errores insignificantes (por ejemplo, los errores de redondeo) en los valores de la función pueden influir seriamente en las diferencias de órdenes superiores. Debe

* Véase en la pág. 664 un ejemplo de tal esquema.

darse fin al cálculo de las diferencias, si todos los números de una columna resultan casi iguales entre sí ("las diferencias son constantes"). Las diferencias de $m$-ésimo orden son constantes para un polinomio de $m$-ésimo grado. Esto muestra que, cuando éstas son aproximadamente constantes la función dada puede representarse con suficiente exactitud por un polinomio de $m$-ésimo grado. (En la tabla de la pág. 664 $m = 3$, las diferencias de cuarto orden están de sobra).

FORMULAS DE INTERPOLACIÓN EN DIFERENCIAS. Mediante las direfencias, el polinomio de interpolación puede hallarse por una de las fórmulas siguientes $\left(\text{se ha introducido la notación } u = \frac{x-x_0}{h}\right)$:

$$N_{\mathrm{I}}(x) = f_0 + u\,\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \frac{u(u-1)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n f_0,$$

$$N_{\mathrm{II}}(x) = f_0 + u\,\Delta f_{-1} + \frac{u(u+1)}{2}\Delta^2 f_{-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{u(u+1)\ldots(u+n-1)}{n!}\Delta^n f_{-n}$$

(*fórmulas de Newton*)

$$S(x) = f_0 + u\,\frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{u^2}{2}\Delta^2 f_{-1} +$$

$$+ \frac{u(u^2-1)}{3!}\,\frac{\Delta^3 f_{-2} + \Delta^3 f_{-1}}{2} + \frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta^4 f_{-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{u^2(u^2-1)\ldots[u^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} f_{-n}$$

(*fórmula de Stirling*)

$$B(x) = f_0 + u\,\Delta f_0 + \frac{u(u-1)}{2}\,\frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0}{2} +$$

$$+ \frac{u(u-1)(u-0{,}5)}{3!}\Delta^3 f_{-1} + \frac{u(u^2-1)(u-2)}{4!}\,\frac{\Delta^4 f_{-2} + \Delta^4 f_{-1}}{2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(u-0{,}5)\,u(u^2-1)\ldots[u^2-(n-1)^2](u-n)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} f_{-1}.$$

(*fórmula de Bessel*)

Las fórmulas de Newton dan el polinomio de interpolación si $x_0$ es el primero o el último de los nodos de interpolación, respectivamente, mientras que para las fórmulas de Bessel y Stirling $x_0$ es el nodo del medio o uno de los nodos del medio. Las diferencias que se emplean en los cálculos, en una u otra fórmula, están señaladas en el esquema incluido en la pág. 662. Las fórmulas de interpolación se aplican principalmente para los cálculos de los valores intermedios de una función dada por una tabla. Eligiendo adecuadamente $x_0$ siempre se puede conseguir que sea $|u| < 1$. Para $|u| \leqslant 0{,}25$ es más conveniente aplicar la fórmula de Stirling, mientras que para $0{,}25 \leqslant u \leqslant 0{,}75$ es más conveniente la fórmula de Bessel. Las fórmulas de Newton se emplean cuando es imposible usar las fórmulas $S$ ó $B$, es decir, cuando $x$ está situado cerca del comienzo o del final de la tabla.

*Ejemplo:* Calcular, para $x = 22$, el valor de la función $f(x)$ dada por la tabla de abajo*.

Como ya se señaló, aquí hay que limitarse a la diferencia tercera. Tomando $x_0 = 20$, se tiene $u = \frac{22-20}{5} = 0{,}4$.

Según la fórmula de Bessel:

$$f(22) = 25{,}34 + 0{,}4\cdot 9{,}82 - \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{2}\,\frac{1{,}72+1{,}99}{2} + \frac{0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 0{,}1}{6}\,0{,}27 = 29{,}05.$$

Según la fórmula de Stirling:

$$f(22) = 25{,}34 + 0{,}4\,\frac{8{,}10+9{,}82}{2} + \frac{0{,}16}{2}\,1{,}72 - \frac{0{,}4\cdot 0{,}84}{6}\cdot\frac{0{,}34+0{,}27}{2} = 29{,}04.$$

Según la primera fórmula de Newton:

$$f(22) = 25{,}34 + 0{,}4\cdot 9{,}82 - \frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{2}\,1{,}99 + \frac{0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 1{,}6}{6}\,0{,}32 = 29{,}05.$$

Si nos limitásemos a las diferencias segundas, obtendríamos, según la fórmula $B$ 29,05, según la fórmula $S$ 29,06 y según la fórmula $N$ 29,03.

| $x$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | | |
| | | 487 | | | |
| 5 | 4,87 | | 78 | | |
| | | 565 | | 29 | |
| 10 | 10,52 | | 107 | | 2 |
| | | 672 | | 31 | |
| 15 | 17,24 | | 138 | | 3 |
| | | 810 | | 34 | |
| 20 | 25,34 | | 172 | | −7 |
| | | 982 | | 27 | |
| 25 | 35,16 | | 199 | | 5 |
| | | 1181 | | 32 | |
| 30 | 46,97 | | 231 | | 1 |
| | | 1412 | | 33 | |
| 35 | 61,09 | | 264 | | |
| | | 1676 | | | |
| 40 | 77,85 | | | | |

ERROR DE INTERPOLACIÓN. Si $f(x)$ está dada analíticamente y en el intervalo considerado posee un número suficiente de derivadas continuas, entonces el error que se obtiene al sustituir $f(x)$ por el polinomio de interpolación según la fórmula de Lagrange, es igual a

$$f(x) - \varphi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)(x-x_1)\,\ldots\,(x-x_n),$$

* Por lo general, en la tabla de diferencias no se pone el signo de la fracción, expresando las diferencias en unidades del orden de la última cifra significativa.

unas magnitudes $X = \varphi(x, y)$ e $Y = \psi(x, y)$, que, en suposición hecha, estén ligadas por una dependencia lineal $\left(\text{por ejemplo, si } y = \frac{x}{a+bx}\right.$, se toma $X = x$, $Y = \frac{x}{y}$ ó $X = \frac{1}{x}$, $\left. Y = \frac{1}{y}\right)$. Calculando para los valores dados de $x$ e $y$ los valores correspondientes de $X$ e $Y$ y representándolos gráficamente, es fácil ver inmediatamente si la dependencia entre $X$ e $Y$ es próxima o no a la lineal (si se encuentran o no los puntos correspondientes en una línea recta aproximadamente) y, por lo tanto, si sirve o no la fórmula elegida.

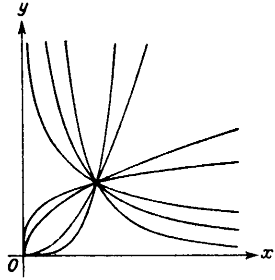
Las indicaciones con respecto a la alineación de algunas fórmulas elementales se dan más abajo junto con las indicaciones de las gráficas correspondientes; véanse las págs. 667-672. *Ejemplo:* véase la pág. 671.

DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS. El método más exacto de determinación de los parámetros es el de los cuadrados mínimos (véanse las págs. 655 y 659). No obstante, en la mayoría de los casos pueden aplicarse con éxito métodos más simples, en particular, el método de los *valores medios*. Si la fórmula obtenida por este método no resulta suficientemente exacta, para su precisión posterior puede emplearse ya el método de los cuadrados mínimos; además, el conocimiento de los valores aproximados de los parámetros permitirá hacer los cálculos menos engorrosos (véase la pág. 656). Según el método de los valores medios, se determina primero la dependencia lineal entre las variables "alineadas" $X$ e $Y$: $Y = aX+b$. Para esto, las ecuaciones de condición $Y_i = aX_i+b$, para el par de valores que se tiene $X_i$ e $Y_i$, se dividen en dos grupos iguales (o casi iguales) en el orden de crecimiento de la variable $X_i$ o $Y_i$. Sumando las ecuaciones de cada grupo obtendremos dos ecuaciones, de las cuales se determinan $a$ y $b$. Expresando $X$ e $Y$ mediante las variables primitivas, obtendremos la dependencia pedida entre $x$ e $y$. Si en este caso, todavía no se han determinado todos los parámetros, se debe aplicar de nuevo este mismo método, alineando ahora otras magnitudes $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ (véase, por ejemplo, la fórmula XIII de la pág. 671). *Ejemplo*, véase la pág. 671.

FÓRMULAS EMPÍRICAS DE MAYOR USO. A continuación se dan algunas fórmulas sencillas con sus gráficas correspondientes. En cada figura se muestran unas cuantas curvas para distintos valores contenidos en la fórmula de los parámetros (investigación de la influencia de la variación de los parámetros en la forma de las curvas véase en el capítulo "Gráficas" págs. 89-111). Al considerar las gráficas siempre se debe tener presente que empleando las fórmulas empíricas sólo se utiliza la parte de la curva que corresponde a cierto intervalo de variación de la variable independiente. Por ejemplo, no se debe creer que la fórmula $y = ax^2+bx+c$ (véase más abajo) sólo es conveniente cuando en la curva dada hay un máximo o un mínimo.

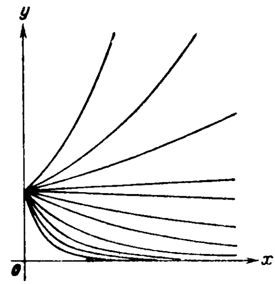
I. $y = ax^b$. Véase la gráfica en las figs. 6, 12, 15 y 16 y las explicaciones en las págs. 91,96 y 98. Se alinean $X = \lg x$ e $Y = \lg y$:

$$Y = \lg a + bX.$$




II. $y = ae^{bx}$. Véase la gráfica en la fig. 17 y las explicaciones en la pág. 99. Se alinean $x$ e $Y = \lg y$:

$$Y = \lg a + b \lg e \cdot x.$$



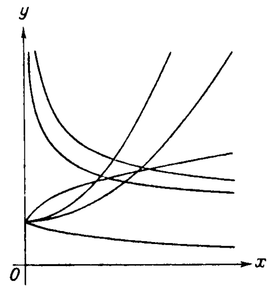

III. $y = ax^b + c$. Las gráficas son las mismas que para la fórmula I, pero desplazadas en la dirección del eje $Oy$. Si está dado $b$, se alinean $X = x^b$ e $y$:

$$y = aX + c.$$

Si $b$ es desconocido se alinean $X = \lg x$ e $Y = \lg (y-c)$,

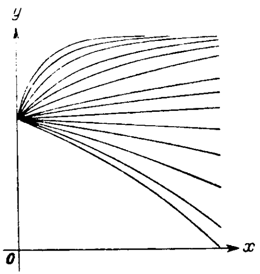
$$Y = \lg a + bX,$$

determinando primero $c$. Para esto se hallan en la gráfica de la función dada tres puntos de abscisas $x_1$, $x_2$ y $x_3 = \sqrt{x_1, x_2}$ ($x_1$ y $x_2$ se eligen arbitrariamente) y ordenadas $y_1$, $y_2$, $y_3$ respectivamente, y se toma $c = \frac{y_1 y_2 - y_3^2}{y_1 + y_2 - 2y_3}$ *.




---

* Después de haber determinado $a$ y $b$, se puede tomar de nuevo $c$ igual al valor medio de $y - ax^b$.

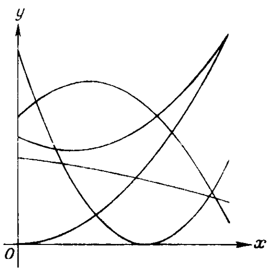



IV. $y = ae^{bx}+c$. Las gráficas son las mismas que para la fórmula II, pero desplazadas en la dirección del eje $Oy$. Se alinean $Y = \lg(y-c)$ y $x$:

$$Y = \lg a + b \lg e \cdot x,$$

determinando primeramente $c$. Para esto se hallan en la gráfica de la función dada tres puntos de abscisas $x_1$, $x_2$ y $x_3 = {}^1/_2(x_1+x_2)$ ($x_1$ y $x_2$ son arbitrarios) y de ordenadas $y_1$, $y_2$, e $y_3$, respectivamente, y se toma

$$c = \frac{y_1y_2-y_3^2}{y_1+y_2-2y_3}\,^*.$$




V. $y = ax^2+bx+c$. Véase la gráfica en la fig. 3 y las explicaciones en la pág. 89. Si se toma en la gráfica de la función dada un punto cualquiera $(x_1, y_1)$ entonces se alinean $x$ e $Y = \frac{y-y_1}{x-x_1}$:

$$Y = (b+ax_1)+ax.$$

Si los valores dados de $x$ forman una progresión aritmética de diferencia $h$, entonces se alinean $Y = \Delta y$ y $x$:

$$Y = (bh+ah^2)+2ahx.$$

En ambos casos, después de determinar $a$ y $b$ se halla $c$ de la ecuación

$$\Sigma y = a\Sigma x^2+b\Sigma x+nc,$$

dondé $n$ es el número de valores dados de $x$, con respecto a los cuales se efectúa la sumación.

VI. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Véase la gráfica en la fig. 8 y las explicaciones en la pág. 92. En la gráfica de la función dada se elige un punto cualquiera $(x_1, y_1)$ y se alinean $Y = \frac{x-x_1}{y-y_1}$ y $x$:

$$Y = A+Bx;$$

* Después de haber determinado $a$ y $b$, se puede tomar de nuevo $c$ igual al valor medio de $y - ae^{bx}$.

aquí se limitan a determinar $A$ y $B$ escribiendo la fórmula obtenida en la forma

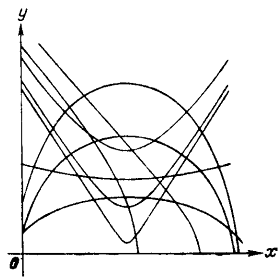
$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{A + B_x}.$$

A veces se puede limitar a fórmulas del tipo

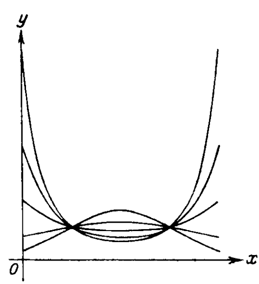
$$y = \frac{x}{cx+d} \quad \text{ó} \quad y = \frac{1}{cx+d}.$$

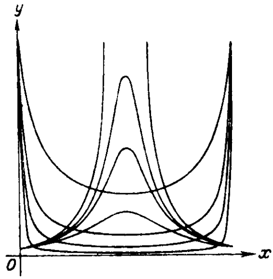
Entonces se alinean $X = \frac{1}{x}$ e $Y = \frac{1}{y}$ ó $x$ e $Y = \frac{x}{y}$ en el primer caso y $x$ e $Y = \frac{1}{y}$ en el segundo.

VII. $y^2 = ax^2 + bx + c$. Véase la gráfica en la fig. 14 y las explicaciones en la pág. 98. Introduciendo la nueva variable $\bar{y} = y^2$, se pueden efectuar después los cálculos como para la fórmula V.

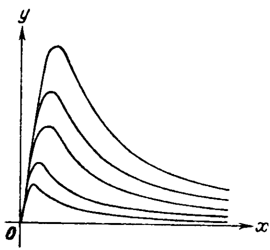



VIII. $y = ae^{bx+cx^2}$ ó $\lg y = \lg a + \lg e \cdot bx + \lg e \cdot cx^2$. Véase la gráfica en la fig. 21 y las explicaciones en la pág. 100. Introduciendo la nueva variable $\bar{y} = \lg y$, se reduce este caso a la fórmula V.

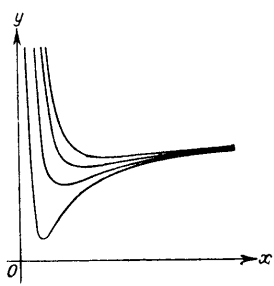





IX. $y = \frac{1}{ax^2+bx+c}$. Véase la gráfica en la fig. 10 y las explicaciones en la pág. 94. Introduciendo la nueva variable $\bar{y} = \frac{1}{y}$ se reduce este caso a la fórmula V.




X. $y = \frac{x}{ax^2+bx+c}$. Véase la gráfica en la fig. 11 y las explicaciones en la pág. 95. Introduciendo la nueva variable $\bar{y} = \frac{x}{y}$ se reduce este caso a la fórmula V.




XI. $y = a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$. Véase la gráfica en la fig. 9 y las explicaciones en la pág. 93. Introduciendo la nueva variable $\bar{x} = \frac{1}{x}$ se reduce este caso a la fórmula V.

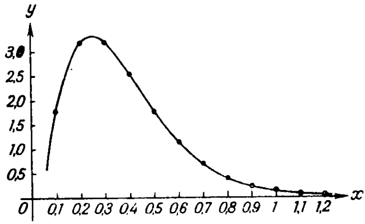


Fig. 425

que la dependencia entre $x$ y $\Delta \frac{x}{y}$ está lejos de ser lineal. Para comprobar la validez de la fórmula XII construimos la gráfica de la dependencia entre $\Delta$ lg $x$ y $\Delta$ lg $y$, (para $h = 0{,}1$; fig. 426) y también entre $\Delta_1$ lg $y$ y $x$ (para $q=2$; fig. 427). En ambos casos se puede considerar que la coincidencia con la línea recta es suficientemente satisfactoria y, por lo tanto, se puede tomar $y = ax^b e^{cx}$.

Para determinar las constantes $a$, $b$ y $c$ buscamos la dependencia lineal entre $x$ y $\Delta_1$ lg $y$ por el método de los valores medios. Sumando las ecuaciones de condición

$$\Delta_1 \lg y = b \lg 2 + cx \lg e$$

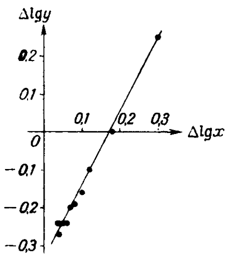


Fig. 426

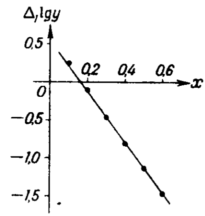


Fig. 427

por grupos (cada uno de tres ecuaciones), obtenemos

$$-0{,}292 = 0{,}903b + 0{,}2606c,$$

$$-3{,}392 = 0{,}903b + 0{,}6514c,$$

de donde $b = 1{,}966$ y $c = -7{,}932$. Para determinar $a$ sumamos todas las ecuaciones de la forma lg $y$ = lg $a + b$ lg $x + c$ lg $e \cdot x$, lo que da

$$-2{,}670 = 12 \lg a - 6{,}529 - 26{,}87,$$

de donde lg $a = 2{,}561$, $a = 364$. Los valores de $y$, calculados por la fórmula $y = 364x^{1{,}966}\, e^{-7{,}932x}$, se dan en la última columna incluída en la tabla insertada a continuación.

| $x$ | $y$ | $\frac{x}{y}$ | $\Delta \frac{x}{y}$ | $\lg x$ | $\lg y$ | $\Delta \lg x$ | $\Delta \lg y$ | $\Delta_1 \lg y$ | $y$ calculado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 1,78 | 0,056 | 0,007 | −1,000 | 0,250 | 0,301 | 0,252 | 0,252 | 1,78 |
| 0,2 | 3,18 | 0,063 | 0,031 | −0,699 | 0,502 | 0,176 | +0,002 | −0,097 | 3,15 |
| 0,3 | 3,19 | 0,094 | 0,063 | −0,523 | 0,504 | 0,125 | −0,099 | −0,447 | 3,16 |
| 0,4 | 2,54 | 0,157 | 0,125 | −0,398 | 0,405 | 0,097 | −0,157 | −0,803 | 2,52 |
| 0,5 | 1,77 | 0,282 | 0,244 | −0,301 | 0,248 | 0,079 | −0,191 | −1,134 | 1,76 |
| 0,6 | 1,14 | 0,526 | 0,488 | −0,222 | 0,057 | 0,067 | −0,218 | −1,455 | 1,14 |
| 0,7 | 0,69 | 1,014 | 0,986 | −0,155 | −0,161 | 0,058 | −0,237 | − | 0,70 |
| 0,8 | 0,40 | 2,000 | 1,913 | −0,097 | −0,398 | 0,051 | −0,240 | − | 0,41 |
| 0,9 | 0,23 | 3,913 | 3,78 | −0,046 | −0,638 | 0,046 | −0,248 | − | 0,23 |
| 1,0 | 0,13 | 7,69 | 8,02 | 0,000 | −0,886 | 0,041 | −0,269 | − | 0,13 |
| 1,1 | 0,07 | 15,71 | 14,29 | 0,041 | −1,155 | 0,038 | −0,243 | − | 0,07 |
| 1,2 | 0,04 | 30,0 | − | 0,079 | −1,398 | − | − | − | 0,04 |

# BIBLIOGRAFÍA

## A. TEXTOS Y MANUALES GENERALES

### 1. Textos

1) Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. I – V, ФМ*. (Smirnov V., Cours de mathématiques supérieures, tomes I, II, III, Edicions MIR, Moscou, 1969—1970)**.

2) Березин Н. С. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I и II, изд. 2, ФМ, 1962. (Berezin N. S. y Zhidkov N. P. Métodos de cálculos, tomo I y II).

3) Milne W. E., Numerical calculus, Princeton (1949). (En los libros 2) y 3) se exponen problemas, relacionados con los métodos de análisis numérico y cálculos aproximados en diversas secciones de las matemáticas).

4) Julio Rey Pastor, Pedro Pi Calleja, Cesar A. Trejo, "Análisis matemático", Volúmenes I, II, III, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1960–1966.

### 2. Manuales

5) Градштейн И. С. и Рыжик И, М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4, ФМ, 1962. (Gradshtein I. S. y Rizhik I. M., Tablas de integrales, sumas, series y productos, 4 edición. Es un manual muy detallado de integrales y funciones elementales y especiales).

6) Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы, "Наука", 1964. (Dvait G. B., Tablas de integrales y otras fórmulas matemáticas. Contiene numerosas fórmulas referentes a las

* ФМ es abreviatura del nombre de la Editorial estatal de la literatura físico-matemática, Moscú.

** Entre paréntesis se da la traducción de los títulos de los libros originales soviéticos no editados en español y la breve síntesis de su contenido. Siendo publicados algunos libros por la Editorial MIR en otros idiomas, su título se escribe en la transcripción correspondiente.

funciones elementales y algunas funciones especiales y también tablas de valores numéricos.)

7) von Erwin Madelung. Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers, Sechste, revidierte Auflage, Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1957. (Contiene numerosas nociones teóricas y fórmulas sobre distintas ramas de las matemáticas y de la física).

8) "Справочная математическая библиотека" (СМБ). Серия справочников по различным отделам математики под общей редакцией Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского, ФМ. ("Biblioteca enciclopédica de matemáticas". Serie de manuales de las diferentes ramas de las matemáticas, bajo la redacción general de L. A. Liusternik y A. R. Yanpolski. Se han editado las siguientes obras: 1–3 "Análisis matemático" (1 – funciones, límites, series, fracciones continuas, 1961; 2 – Cálculo de funciones elementales, 1963; 3 – Cálculo diferencial e integral, 1961); 4 – "Algebra superior" (álgebra lineal, polinomios, álgebra general, 1962); 5 – "Transformaciones integrales y cálculo operacional" (1961); 6 – "Método de experimentaciones estadísticas" (Monte Carlo, 1961); 7 – "Programación" (1963); 8 – "Elementos de la teoría de funciones" (funciones de variable real, aproximación de funciones, funciones casiperiódicas, 1963). Su edición se continúa).

9) "Problemas y ejercicios de análisis matemático", revisado por el profesor B. Demidovich, 2ª-edición, Editorial MIR, 1967.

## B. LITERATURA DE CADA CAPÍTULO

### PARTE I. *Tablas y gráficas*

10) Janke E., Emde F., Lösch F., Tafeln Höherer Funktionen, Sechste Auflage, Neubearbeitet von F. Lösch, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960. (Contiene numerosas tablas y gráficas de funciones elementales y especiales en el campo real y complejo.)

### TABLAS

11) Barlow's tables of squares cubes, square roots, cube roots and reciprocals of all integers up to 12,500. Edited by L. J. Comrie, M. A., Ph.D. Fourth Edition, New Impression, 1947.

12) Сегал Б. И. и Семендяев К. А., Пятизначные матаматические таблицы, изд. 3, ФМ, 1962. (Segal B. I. y Semendiaev K. A., Tablas matemáticas de cinco cifras significativas, 3 edición). Contiene funciones elementales y especiales (la integral de probabilidad, la función Gamma, integrales elípticas, funciones de Bessel, etc.

13) L. M. Milne-Thomson, M. A., L. J. Comrie, M. A., Ph. D.

Standard four-figure mathematical tables, Macmillan and Co., Limited, London, 1948.

14) Хренов Л. С., Пятизначные таблицы тригонометрических функций, изд. 4, ФМ, 1962. (Jrenov L. S. Tablas de funciones trigonométricas de cinco cifras significativas, 4ª-edición).

15) Хренов Л. С., Шестизначные таблицы тригонометрических функций, ФМ, 1960. (Jrenov L. S. Tablas de funciones trigonométricas de seis cifras significativas).

16) Bremiker's, Logarithmischtrigonometrische Tafeln mit sechs Decimalstellen, Zwölfte Stereotyp-Ausgabe, Berlin, 1895.

### GRÁFICAS

17) Савелов А. А., Плоские кривые (систематика, свойства, применения), Справочное руководство, ФМ, 1960. (Savelov A. A. Curvas planas (sistemática, propiedades, aplicaciones, texto-manual). Véase también Vigodsky (18).

## PARTE II. *Matemática elemental*

18) Выгодский М. Я., Справочник по элементарной математике (таблицы, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, функции и графики), изд. 15, ФМ, 1963. (Vigodsky M. Y. Manual de matemática elemental (tablas, aritmética, álgebra, geometría, trigonometría, funciones y gráficas, 15ª-edición).

### CÁLCULOS APROXIMADOS

19) "Principles of numerical analysis" by A. S. Householder, New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, 1953.

20) Панов Д. Ю., Счётная линейка, изд. 16, ФМ, 1962. (Panov D. Y. Regla de cálculo, 16ª-edición).

21) Румшиский Л. З., Счётная линейка, ФМ, 1963. (Rumshisky L. Z. Regla de cálculo).

22) Семендяев К. А. Счетная линейка, изд. 11, ФМ 1960, (Semendiaev K. A. Regla de cálculo, 11ª-edición). Véase también Berezin y Zhidkov (2), tomo I, B.E.M. (7), N2.

### ALGEBRA

23) Фаддеев Д. К. и Соминский И. С., Алгебра (для самообразования), ФМ, 1960. (Faddeev D. K. y Sominsky I. S., Algebra (para el estudio individual).

24) Соминский И. С., Алгебра (дополнительный курс), ФМ, 1962. (Sominsky I. S., Algebra (curso complementario).

25) Curosch A. G., Curso de álgebra superior, Editorial MIR, Moscú, 1968.

26) Гельфанд И, М., Лекции по линейной алгебре, изд. 2, ФМ, 1951. (Guelfand I. M., Lecciones de álgebra lineal, 2ª-edición).

27) Фаддеев Д. К. и Фаддеева В, И., Вычислительные методы линейной алгебры, ФМ, 1960. (Faddeev D. K. y Faddeeva V. I., Métodos de cálculo del álgebra lineal). Véase también Smirnov (1), tomo I, Berezin y Zhidkov (2), tomo II, Milne (3), Madelung (7).

### TRIGONOMETRÍA

28) Бермант А. Ф. и Люстерник Л. А., Тригонометрия, изд. 3, ФМ, 1960. (Bermant A. F. y Liusternik L. A., Trigonometría, 3ª-edición).

29) Янпольский А. Р., Гиперболические функции, ФМ, 1960. (Yanpolsky A. R., Funciones hiperbólicas).

## PARTE III. *Geometría analítica y diferencial*

### GEOMETRÍA ANALÍTICA

30) Привалов И. И., Аналитическая геометрия, изд. 27, ФМ, 1962. (Privalov I. I., Geometría analítica, 27ª-edición).

31) Efimov N. V., Curso breve de geometría analítica, 2ª-edición, Editorial MIR, Moscú, 1969.

32) Efimov N. V., Formas cuadráticas y matrices, Editorial MIR, Moscú, 1970.

33) Выгодский М. Я., Аналитическая геометрия, ФМ, 1963. (Vigodsky M. Y., Geometría analítica).

### GEOMETRÍA DIFERENCIAL

34) Рашевский П. К., Курс дифференциальной геометрии, изд. 4, ФМ, 1956. (Rashevsky P. K., Curso de geometría diferencial, 4ª-edición). Véase también Smirnov (1), tomos I–II, Madelung (7), apartado 8.

## PARTE IV. *Fundamentos del análisis matemático*

35) Бермант А. Ф,. Краткий курс математического анализа, изд. 2, ФМ, 1963. (Bermant A. F., Curso breve de análisis matemático, 2ª-edición).

36) Толстов Г. П., Курс математического анализа, т. I, II, изд. 2, ФМ, 1957. (Tolstov G. P., Curso de análisis matemático, tomos I–II, 2ª-edición).

37) Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интеграль-

ного исчисления, т. I, II, III, ФМ. (Fijtengolts G. M., Curso de cálculo diferencial e integral, tomos I, II, III).

38) Натансон И. Н., Краткий курс высшей математики, ФМ, 1963. (Natansón I. N., Curso breve de matemáticas superiores).

39) Мышкис А. Д., Лекции по высшей математике, "Наука", 1964. (Mishkis A. D., Lecciones de matemáticas superiores). Véase también B.E.M. (7), N 1-3, 5.

## Cálculo integral

40) Смолянский М, Л., Таблицы неопределенных интегралов, изд. 2, ФМ, 1962. (Smoliansky M. L., Tablas de integrales indefinidas, 2ª-edición). Véase también Gradshtein y Rizhik (5), Dvait (6), Householder (19).

## Ecuaciones diferenciales

41) Гутер Р. С., и Янпольский А. Р., Дифференциальные уравнения, ФМ, 1962. (Guter R. S. y Yanpolsky A. R., Ecuaciones diferenciales).

42) Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, изд. 8, ФМ, 1959. (Stepanov V. V., Curso de ecuaciones diferenciales, 8ª-edición).

43) Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ФМ, 1961. (Pontriaguine L. Les équationes differentielles ordinaires, Editions MIR, Moscou, 1969).

44) Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными, изд. 3, ФМ, 1961. (Petrovsky I. G., Lecciones de ecuaciones en derivadas parciales, 3ª-edición).

45) Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, изд. 2, ФМ, 1953. (Tijonov A. N. y Samarsky A. A., Ecuaciones de física matemática, 2ª-edición).

46) Канторович Л. В. и Крылов В. И., Приближенные методы высшего анализа, изд. 5, ФМ, 1962. (Kantorovich L. V. y Krilov V. I., Métodos aproximados del análisis superior, 5ª-edición).

47) Араманович И. Г. и Левин В. И., Уравнения математической физики, "Наука", 1964. (Aramanovich I. G. y Levin V. I., Ecuaciones de la física matemática).

48) Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям, изд. 2, ФМ, 1961. (Kamke E., Manual de ecuaciones diferenciales, 2ª-edición).

49) Interscience tracts in pure and applied mathematics, Editors: L. Bers, R. Courant, J. J. Stoker, Tract 4, "Difference methods for initial-value problems", Robert D. Richtmyer, Interscience Publishers, Inc., New York, Interscience Publishers Ltd., London. Véase también Smirnov (1). tomos II-IV, Berezin y Zhidkov 2), tomo II.

## PARTE V. *Capítulos complementarios del análisis*

50) Романовский П. И., Ряды Фурье; теория поля; аналитические и специальные функции; преобразование Лапласа, изд. 3, ФМ, 1961. (Romanovsky P. I., Series de Fourier; teoría de campo; funciones analíticas y especiales; transformación de Laplace, 3ª-edición).

### NÚMEROS COMPLEJOS Y FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

51) Фукс Б. А. и Шабат Б. В., Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, изд. 2, ФМ, 1959. (Fuks B. A. y Shabat B. V., Funciones de variable compleja y algunas de sus aplicaciones).

52) Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2, ФМ, 1958. (Lavrentiev M. A. y Shabat B. V., Métodos de la teoría de funciones de variable compleja, 2ª-edición). Véase también Smirnov (1), tomo I-III.

### CÁLCULO VECTORIAL

53) Меркин Д. Р., Алгебра свободных и скользящих векторов, ФМ, 1962. (Merkin D. R., Algebra de vectores libres y deslizantes).

54) Голфанд И. А., Векторный анализ и теория поля, ФМ, 1962. (Golfand I. A., Análisis vectorial y teoría de campo).

### SERIES DE FOURIER

55) Толстов Г. П., Ряды Фурье, изд. 2, ФМ, 1960. (Tolstov G.P., Series de Fourier, 2ª-edición). Véase también Smirnov (1), tomo II.

## PARTE VI. *Elaboración de observaciones*

### FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES Y DE LA TEORÍA DE ERRORES

56) Вентцель Е. С., Теория вероятностей, изд. 2, ФМ, 1962. (Venttsel E. S., Teoría de probabilidades, 2ª-edición).

57) Смирнов М. В. и Дунин-Барковский И. В., Краткий курс математической статистики для технических приложений, ФМ, 1959. (Smirnov M. V. y Dunin-Barkovsky I. V., Curso breve de estadística matemática para las aplicaciones técnicas).

58) Гутер Р. С. и Овчинский Б. В., Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта, ФМ, 1962. (Guter R S. y Ovchinsky B. V., Elementos del análisis numérico y elaboración matemática de los resultados experimentales).

### FÓRMULAS EMPÍRICAS E INTERPOLACIÓN

Véase Berezin y Zhidkov (2), Milne (3), Householder (19).

# ÍNDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

## E

## G

## R

## S